Ergodyczność procesów filtracji

- o wieloletnim błędzie i próbach jego poprawienia

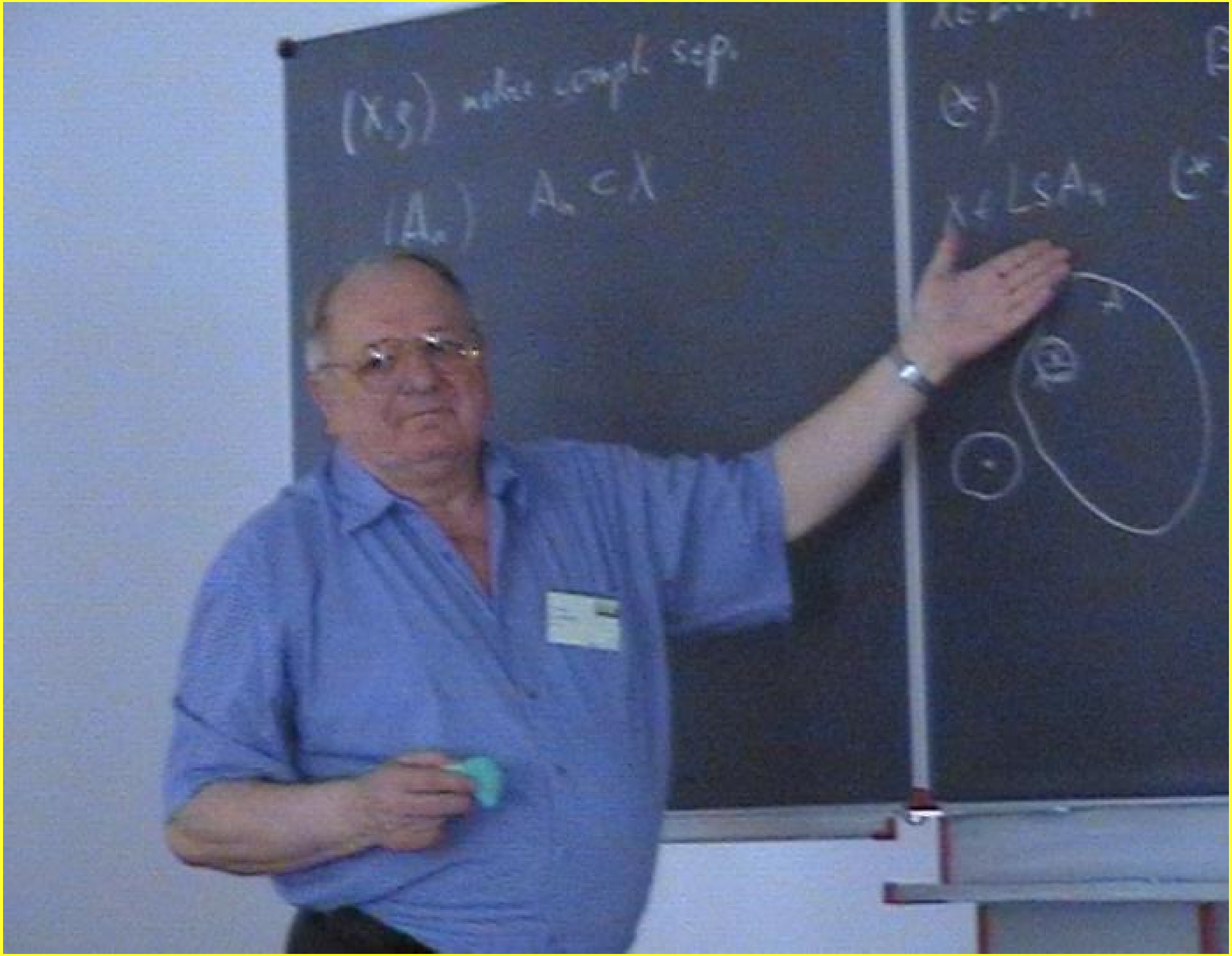
Łukasz Stettner

Instytut Matematyczny PAN

VI Wykład im. Profesora Andrzeja Lasoty, UŚ, 11 stycznia 2013

Prof. Andrzej Lasota 11 stycznia 1932, Warszawa - 28 grudnia 2006

Dobra matematyka jest to odkrywanie matematyki w rzeczywistości, czy raczej odkrywanie matematycznej struktury w rzeczywistości, w złej matematyce struktury buduje się formalnie, zła matematyka przypomina mi koszmarny sen ... dobra matematyka jak dobra poezja to twórcze poznawanie struktury rzeczywistości. (z wypowiedzi prof. A. Lasoty)



Historia problemu i jego motywacje

proces stanu (x_n)

proces obserwacji (y_n)

1801 C.F. Gauss, planetoida Ceres (Giuseppe Piazzi, Franz Xaver von Zach)

1809 C.F. Gauss, *Theory of the motion of the heavenly bodies moving about the sun in conic sections* - New York: Nachdruck Dover Publications 1963,

1821 C.F. Gauss, *Theoria combinations observationum erroribus minimis obnoxiae*, Gesammelte Werke, Bd.4. Götingen

1941 A.N. Kolmogorov, *Intiergrirovanije i ekstrapolirovanije stacjonarnych sluczajnych posledovatelnostiej*, Izv. AN SSSR, t. 5 no.1

1949 N. Wiener, *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series* - New York, Wiley

Liniowy proces filtracji

Thorvald Nicolai Thiele, Peter Swerling 1958, 1959 R.C. Bucy, 1960 Rudolf E. Kalman, R.E. Kalman and R.C. Bucy 1961

liniowa filtracja $\bar{x}_n := E\left[x_n | y_1, \ldots, y_n\right]$

przez warunkową wartość oczekiwaną $E\left[X|Y\right]$ rozumiemy projekcję (rzut) zmiennej X na przestrzeń $L^2\left(\Omega, \sigma\left\{Y\right\}, P\right)$ (zakładając cicho, że $X \in L^2\left(\Omega, F, P\right)$)

filtr Kalmana Bucy'ego (w wersji uogólnionej przez szkołę rosyjską R. Liptser i A. Shiryaev lata 70-te)

ciągi warunkowo normalne

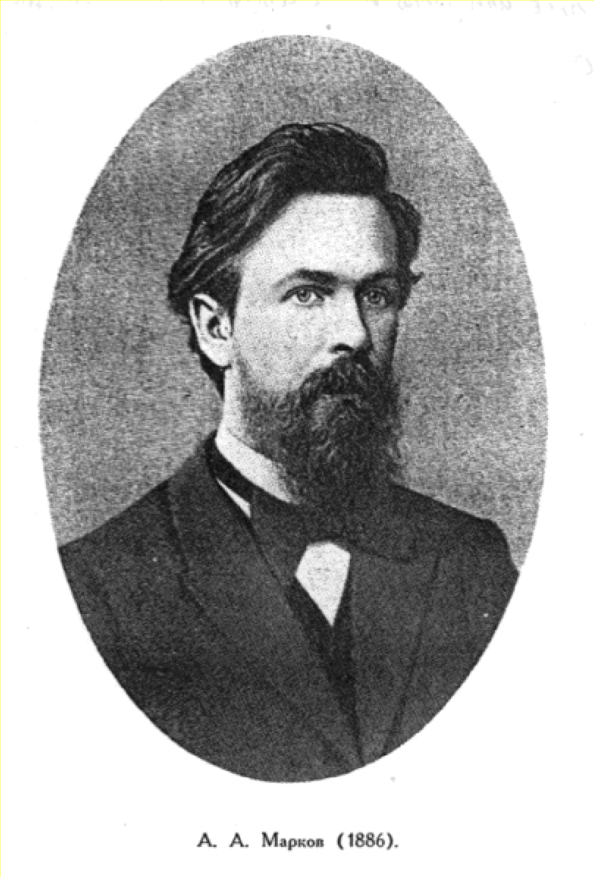
$x_{n+1} = a(y_n)x_n + b(y_n) + c(y_n)w_n$

$y_{n+1} = d(y_n)x_n + e(y_n) + f(y_n)v_n$

$(w_n), (v_n)$ i.i.d. $N(0,1)$

$\bar{x}_n$, $E\left[\left(x_n - \bar{x}_n\right)\left(x_n - \bar{x}_n\right)^T | y_1, \ldots, y_n\right]$ dane rekurencyjnymi równaniami

Procesy Markowa



Andrey (Andrei) Andreyevich Markov (14 czerwca 1856 - 20 lipca 1922)

(x_n), $P(x, A) = P\{x_1 \in A \mid x_0 = x\}$ prawdopodobieństwo przejścia

$Pf(x) := \int_{E_0} f(x')P(x, dx')$

Miary niezmiennicze dla procesów Markowa

μ jest miarą niezmienniczą dla $P(x, dy)$ jeżeli

$\mu(A) = \int_{E_0} P(x, A)\mu(dx) = P(\mu, A)$ dla $A \in \mathcal{E}_0$

miary niezmiennicze opisują zachowanie się procesu, gdy czas dąży do nieskończoności i operatora $P^n(x, A)$

($P^n(x, A) \to \mu(A)$ lub $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P^n(x, A) \to \mu(A)$ gdy $n \to \infty$)

miara niezmiennicza - miara równowagi

N. N. Bogoliubov and N. M. Krylov (1937). "La theorie generalie de la mesure dans son application a l'etude de systemes dynamiques de la mecanique non-lineaire"

Opis modelu i jego własności - proces stanu

(x_n), (y_n) procesy o wartościach w przestrzeni polskiej E_0 and E

(x_n), proces stanu (nieobserwowany, ukryty) - proces Markowa o prawdopodobieństwie przejścia $P(x_{n-1}, dx')$

(y_n), proces obserwacji $P_1^{x_n}(y_{n-1}, dy')$

(np. $y_n = h(x_n) + w_n$ lub $y_n = h(x_n, y_{n-1}) + w_n$)

$X^n = \sigma\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $Y^n = \sigma\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$,

$$P\left\{x_{n+1} \in A \mid X^n, Y^n\right\} = P\left(x_n, A\right), \qquad (1)$$

Opis modelu i jego własności - proces obserwacji

Przypadek szczególny: $y_n = h(x_n, w_n)$

$$P\left\{y_{n+1} \in B \mid X^{n+1}, Y^n\right\} = \int_B r\left(x_{n+1}, y'\right)\eta(dy') \tag{2}$$

Przypadek ogólny: $y_{n+1} = h(y_n, x_{n+1}, w_{n+1})$

$$P\left\{y_{n+1} \in B \mid X^{n+1}, Y^n\right\} = P_1^{x_{n+1}}(y_n, B) = \int_B r\left(x_{n+1}, y_n, y'\right)\eta(dy') \tag{3}$$

para $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ jest procesem Markowa z operatorem prawdopodobieństw przejścia

$$Tf(x,y) = \int_{E_0}\int_E f\left(x', y'\right) P_1^{x'}(y, dy')P(x, dx') \tag{4}$$

Proces nieliniowej filtracji - przypadek szczególny

$\pi_n(A) = P\{x_n \in A \mid Y^n\} = E\{1_A(x_n) \mid Y^n\}$ P a.s. dla $A \in \mathcal{E}_0$ informacja o procesie (x_n) na podstawie obserwacji Y^n

$\pi_0(A) = \nu(A)$ rozkład początkowy procesu (x_n), π_n to proces o wartościach w przestrzeni miar probabilistycznych $\mathcal{P}(E_0)$ nad E_0

$$M(y,\nu)(A) = \frac{\int_A r(x',y)\, P(\nu, dx')}{\int\limits_{E_0} r(x',y)\, P(\nu, dx')} := \frac{N(y,\nu)(A)}{N(y,\nu)(E_0)}$$

.

Mamy, że $\pi_{n+1}(A) = M\left(y_{n+1}, \pi_n\right)(A)$, co jest równaniem rekurencyjnym

(π_n) jest procesem Markowa z prawdopodobieństwem przejścia

$\prod F(\nu) = \int_{E_0} \int_E F(M(y,\nu))\, r(x,y)\, dy P(\nu, dx)$

Proces nieliniowej filtracji - przypadek ogólny

$$M\left(y,y',\nu\right)(A)=\frac{\int_A r\left(x',y,y'\right)P\left(\nu,dx'\right)}{\int\limits_{E_0} r\left(x',y,y'\right)P\left(\nu,dx'\right)}:=\frac{N(y,y',\nu)(A)}{N(y,y',\nu)(E_0)}.$$

$\rho(dx,dy)=p_\rho(y,dx)\rho(E_0,dy)$

$$\begin{aligned}\pi_0^\rho(A)&=p_\rho\left(y_0,A\right)\\ \pi_n^\rho(A)&=M\left(y_{n-1},y_n,\pi_{n-1}^\rho\right)(A)\end{aligned}\tag{5}$$

$$\pi_n^\rho(A)=P\left\{x_n\in A\mid Y^n\right\}\quad P\text{ a.s.}$$

Para $\begin{pmatrix}\pi_n^\rho\\ y_n\end{pmatrix}$ tworzy proces Markowa z operatorem

$$\prod F(\nu,y)=\int_{E_0}\int_E F\left(M\left(y,y',\nu\right),y'\right)P_1^x\left(y,dy'\right)P(\nu,dx)\tag{6}$$

Główny problem

w przypadku szczególnym: ergodyczność (istnienie jedynej miary niezmienniczej) dla procesu (π_n); w przypadku ogólnym: ergodyczność pary $\begin{pmatrix} \pi_n^\rho \\ y_n \end{pmatrix}$,

H.Kunita (1971), L. Stettner (1989), H. Kunita (1991), A.G. Bhatt, A. Budhiraja, R.L. Karandikar (2000)

T. Kaijser (1975), P. Baxendale, P. Chigansky, R. Liptser (2004), A. Budhiraja (2003), Di Masi, L.S. (2005), F. Le Gland, N. Oudiane (2004), V. Tadic, A. Doucet (2005), M.L. Kleptsyna, A.Yu. Veretennikov (2007)

Twierdzenie (nieprawdziwe). Załóżmy, że istnieje jedyna miara niezmiennicza μ dla procesu stanu (x_n). Wtedy proces nieliniowej filtracji (π_n) ma dokładnie jedną miarę niezmienniczą wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi warunek

$$\limsup_{n\to\infty} \int |E_x\{f(x_n)\} - \mu(f)|\mu(dx) = 0.$$

Gdzie był błąd?

w przejściu granicznym, gdzie $Y_{-\infty}^{n} = \sigma\left\{\ldots, y_{-n}, y_{-n+1}, \ldots, y_0, y_1, \ldots, y_n\right\}$

$X_{-\infty}^{m} = \sigma\left\{\ldots, x_{-n}, x_{-n+1}, \ldots, \ldots, x_m\right\}$

$\lim_{m\to-\infty} E\left\{\phi(x_n)|Y_{-\infty}^{n} \vee X_{-\infty}^{m}\right\} \neq E\left\{\phi(x_n)|Y_{-\infty}^{n}\right\}$,

$X_{-\infty}^{-\infty} = \{\emptyset, \Omega\}$, (z tw. Levy'ego $E\left\{Z|X_{-\infty}^{m}\right\} \to E\left\{Z|X_{-\infty}^{-\infty}\right\}$)

Kontrprzykład (T. Kaijser (1975), P. Baxendale, P. Chigansky, R. Liptser (2004))

$E_0 = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{0, 1\}$ macierz prawdopodobieństw przejścia procesu (x_n)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$E_{01} = \{1,3\}$, $E_{02} = \{2,4\}$

$$y_n = 1_{E_{01}}(x_n)$$

$r(x,1) = 2$ for $x \in E_{01}$, $r(x,1) = 0$ for $x \in E_{02}$

$r(x,0) = 2$ for $x \in E_{02}$, $r(x,0) = 0$ for $x \in E_{01}$

with $\eta(0) = \eta(1) = \frac{1}{2}$.

$P(x, E_{01}) = \frac{1}{2}$, (y_n) i.i.d. $P\{y_n = 0\} = P\{y_n = 1\} = \frac{1}{2}$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1-\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 1-\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1-\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \right\}$$

dla $\alpha \in (0,1)$ mamy kontinuum zbiorów niezmienniczych i miar niezmienniczych.

Dlaczego zadziałał kontrprzykład?

Jeżeli $y_n = 1_{E_{01}}(x_n) + w_n$, gdzie (w_n) i.i.d. np. $N(0,1)$ to istnieje jedyna miara niezmiennicza dla (π_n).

Hipoteza: G.B. Di Masi Stettner (2005) Istnienie jedynej miary niezmienniczej dla (x_n) plus równoważność operatorów obserwacji

$$\int r(x,y)\eta(dy),$$

$(P_1^x(y,\cdot) = \int r(x,y,y')\eta(dy')$ w przypadku ogólnym) dla $x \in E_0$, (również dla $y \in E$ w przypadku ogólnym) implikuje istnienie jedynej miary niezmienniczej dla operatora Π, czyli procesu filtracji (π_n),

$\left(\begin{pmatrix} \pi_n^\rho \\ y_n \end{pmatrix}\right.$ w przypadku ogólnym) (np. $y_{n+1} = h(y_n, x_{n+1}) + w_{n+1}$, z (w_n) i.i.d. $N(0,1))$

Asymptotyczna stabilność procesów filtracji

R. Atar, O. Zeitouni (1997),

$\rho'(dx,dy) = p_{\rho'}(y,dx)\rho'(E_0,dy)$; zdefiniujmy rekursywnie

$$
\begin{aligned}
&\pi_0^{\rho\rho'}(A) = p_{\rho'}(y_0, A)\\
&\pi_{n+1}^{\rho\rho'}(A) = M\left(y_n, y_{n+1}, \pi_n^{\rho\rho'}\right)(A) =\\
&\frac{\int_A r(x', y_n, y_{n+1}) P\left(\pi_{n+1}^{\rho\rho'}, dx'\right)}{\int\limits_{E_0} r(x', y_n, y_{n+1}) P\left(\pi_{n+1}^{\rho\rho'}, dx'\right)} =: \frac{N(y_n, y_{n+1}, \pi_n^{\rho\rho'})(A)}{N(y_n, y_{n+1}, \pi_n^{\rho\rho'})(E_0)}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$(\pi_n^{\rho\rho'})$ aproksymacyjny proces filtracji

Mamy asymptotyczną stabilność według prawdopodobieństwa jeżeli dla $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{P}(E_0 \times E)$ zachodzi

$$\pi_n^{\rho\rho_1}(f) - \pi_n^{\rho\rho_2}(f) \to 0$$

według P_ρ, gdy $n \to \infty$, dla $f \in C(E_0)$ i ρ - początkowego rozkładu (x_n, y_n)

Metryka Hilberta

dla $\mu, \nu \in \mathcal{M}(E_0)$

$$h(\mu,\nu) = \sup_{A,B\in\mathcal{B}(E_0),\mu(B),\nu(A)>0} \ln \frac{\mu(A)\nu(B)}{\mu(B)\nu(A)} = \ln \frac{\alpha(\mu,\nu)}{\beta(\mu,\nu)} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\mu,\nu) &= \inf\{a : a\mu \geq \nu\} \\ \beta(\mu,\nu) &= \sup\{b : b\mu \leq \nu\}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

jeżeli L jest liniową transformacją zachowującą porządek w $\mathcal{M}(E_0)$ to

$$h\left(L\mu, L\nu\right) \leq \tanh\left(\frac{\Delta}{4}\right) h(\mu,\nu) \tag{10}$$

z $\Delta = \sup_{\mu,\nu} h(L\mu, L\nu)$.

jeżeli $\mu, \nu \in \mathcal{P}(E_0)$ to

$$\|\mu - \nu\|_{var} \leq \frac{2}{\ln 2} h(\mu,\nu) \tag{11}$$

Twierdzenie 1 *Jeżeli dla $k = 1$ mamy (A1) i dla $k > 1$,*

(A1) $\sup_{x,x' \in E_0} h(P^k(x,\cdot), P^k(x',\cdot)) < \infty$

(A2) istnieją funkcje ciągłe $\underline{r}(y,y')$, $\overline{r}(y,y')$, $\overline{\overline{r}}(y')$ takie, że dla dowolnych $x \in E_0$, $y, y' \in E$, mamy $0 < \underline{r}(y,y') \le r(x,y,y') \le \overline{r}(y,y') \le \overline{\overline{r}}(y')$, oraz $\sum_{i=1}^{k-1} E_\rho \left\{ \ln \frac{\overline{r}(y_{i-1},y_i)}{\underline{r}(y_{i-1},y_i)} \right\} < \infty$ i

$$\int_E \int_E \dots \int_E \int_E \underline{r}\,(y(k-2), y(k-1))\, \eta(dy(k-1))$$
$$\overline{r}(y(k-3), y(k-2))\eta(dy(k-2)) \dots \overline{r}(y(0), y(1))$$
$$\eta(dy(1))\overline{\overline{r}}(y(0))\eta(dy(0)) < \infty. \tag{12}$$

to dowolnych miar $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{P}(E_0 \times E)$ przy $n \to \infty$ mamy

$$E_\rho \left[h\left(\pi_n^{\rho\rho_1}, \pi_n^{\rho\rho_2} \right) \right] \to 0 \tag{13}$$

Propozycja 1 *Jeżeli dla $k = 1$ zachodzi (B1) i (B2) lub dla $k > 1$*

(B1) $\exists_{k \in N}$ *takie, że*

$$\sup_{x,x' \in E_0} \sup_{y,y' \in E} h\left(T^k(x,y,\cdot), T^k\left(x', y', \cdot\right)\right) < \infty,$$

(B2) istnieją funkcje ciągłe $\underline{r}(y,y')$, $\overline{r}(y,y')$ *takie, ze dla każdego* $x \in E_0$

$$0 < \underline{r}\left(y, y'\right) \leq r\left(x, y, y'\right) \leq \overline{r}\left(y, y'\right)$$

i dla k jak w (B1), zachodzi (A2),

(B3) dla $f_1 \in C(E_0)$, $f_2 \in C(E)$ *odwzorowanie*

$$x \mapsto Pf_1(x) \quad \textit{and} \quad (x,y) \mapsto P_1^x f_2(y)$$

jest ciągłe,

wtedy dla dowolnych miar $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{P}(E_0 \times E)$, *gdy* $n \to \infty$ *mamy*

$$E_\rho\left[h\left(\pi_n^{\rho\rho_1}, \pi_n^{\rho\rho_2}\right)\right] \to 0.$$

Ergodyczne własności aproksymacyjnych procesów filtracji

Trójka $(x_n, y_n, \pi_n^{\rho\rho'})$ jest procesem Markowa z operatorem przejścia S danym dla $F \in b\mathcal{B}(E_0 \times E \times \mathcal{P}(E_0))$ wzorem $SF(x,y,\nu) = \int_{E_0} \int_E F\left(x', y', M\left(y, y', \nu\right)\right) P_1^{x'}\left(y, dy'\right) P\left(x, dx'\right)$.

$\pi^{\mu_0\eta_0\nu}$ lub $\pi^{xy\nu}$ aproksymacyjnym procesem fitracji $\pi^{\rho\rho'}$ z $\rho = \mu_0 \times \eta_0$ i $\rho' = \nu \times \eta_0$ lub $\rho = \delta_x \times \delta_y$ i $\rho' = \nu \times \delta_y$

Aproksymacyjne procesy filtracji $\pi^{\mu_0\eta_0\nu}$ są asymptotycznie stabilne wg prawd. w (μ_0, η_0) jeżeli dla dowolnego $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{P}(E_0)$ i $\varphi \in b\mathcal{B}(E_0)$ $\pi_n^{\mu_0\eta_0\nu_1}(\varphi) - \pi_n^{\mu_0\eta_0\nu_2}(\varphi) \to 0$, $P_{\mu_0\eta_0}$ prawie wszędzie, gdy $n \to \infty$.

Główne wyniki

Twierdzenie 2 *Załóżmy, że istnieje jedyna miara niezmiennicza $\zeta(dx, dy)$ dla operatora T i aproksymacyjne procesy filtracji $(\pi_n^{xy\nu})$ są asymptotycznie stabilne wg prawd. w (x, y) dla ζ prawie wszystkich (x, y). Wtedy istnieje co najwyżej jedna miara niezmiennicza dla operatora S.*

Propozycja 2 *Jeżeli operator jest S fellerowski i istnieje miara niezmiennicza ζ dla operatora T to istnieje miara niezmiennicza dla operatora S.*

Wniosek 1 *Jeżeli operator Π jest fellerowski i istnieje miara niezmiennicza ζ dla operatora T, to istnieje miara niezmiennicza dla Π.*

Główne wyniki - kontynuacja

dla miary $\Phi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E_0) \times E)$ zdefiniujmy barycenter $b\Phi$, $A \in \mathcal{B}(E_0)$ i $B \in \mathcal{B}(E)$, jako

$$b\Phi(A \times B) = \int_{\mathcal{P}(E_0)} \nu(A)\Phi(d\nu, B),$$

wtedy $b\Phi \in \mathcal{P}(E_0 \times E)$.

Lemat 1 *Jeżeli* Φ *jest niezmiennicza dla* Π*, to* $b\Phi$ *jest niezmiennicza dla* T*.*

Twierdzenie 3 *Jeżeli* S *jest fellerowski i ma co najwyżej jedną miarę niezmienniczą to operator* Π *też ma co najwyżej jedną miarę niezmienniczą.*

Wniosek 2 *Jeżeli* S *jest fellerowski i istnieje jedyna miara niezmiennicza* ζ *dla* T *i dla* ζ *prawie wszystkich* (x, y) *aproksymacyjne procesy filtracji* $(\pi_n^{xy\rho'})$ *są asymptotycznie stabilne wg prawdopodobieństwa w* (x, y)*, to istnieją jedyne miary niezmiennicze dla operatorów* S *and* Π*.*

Minimal and maximal invariant measures for Π

$C_c(\mathcal{P}(E_0) \times E)$ funkcji ciągłych, ograniczonych $\mathcal{P}(E_0) \times E \ni (\nu, y) \mapsto F(\nu, y)$ wypukłych ze względu na ν przy ustalonym $y \in E$. Wprowadźmy porządek $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E_0) \times E)$:

$q_1 \prec q_2$ if $\forall_{f \in C_c(\mathcal{P}(E_0) \times E)} \quad q_1(f) \leq q_2(f)$

i dwa procesy filtracji (oba z tym samym operatorem prawdopodobieństw przejścia Π): $\tilde{\pi}_n^\rho(A) = P_\rho\{x_n \in A | x_0 \vee Y^n\}$ i $\pi_n^\rho(A) = P_\rho\{x_n \in A | Y^n\}$

rozkłady $\tilde{\pi}_n^\rho$ i π_n^ρ, gdy ρ miara niezmiennicza dla T, dążą do miar ekstremalnych niezmienniczych M i m procesów filtracji, gdzie $m \prec M$, jest to największa i najmniejsza miara niezmiennicza dla operatora Π

Dostateczne warunki na asymptotyczną stabilność aproksymacyjnych procesów filtracji D. Ocone, E. Pardoux (1996), A. Budhiraja (2003);

istnienie jedynej miary niezmienniczej dla Π implikuje asymptotyczną stabilność aproksymacyjnych procesów filtracji

Ergodyczność procesu filtracji metodą znikającego dyskonta

M. Schäl (1993), G.B. Di Masi i Ł. Stettner (2008); dla $F : \mathcal{P}(E_0) \times E \mapsto R$ zdefiniujmy $g_F := \inf_{\mu \in \mathcal{P}(E_0), y \in E} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \Pi^i F(\mu, y)$

$w_F^\beta(\mu, y) := \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \Pi^i F(\mu, y)$, z $0 < \beta < 1$, $\quad m_F^\beta := \inf_{\mu \in \mathcal{P}(E_0), y \in E} w_F^\beta(\mu, y)$

$\bar{g}_F := \limsup_{\beta \to 1} (1-\beta) m_F^\beta, \quad \underline{g}_F := \liminf_{\beta \to 1} (1-\beta) m_F^\beta$

Wtedy $0 \le \underline{g}_F \le \bar{g}_F \le g_F$

Lemat 2 *Jeżeli istnieje nieujemna funkcja borelowska w_F taka, że dla $\mu \in \mathcal{P}(E_0)$ i $y \in E$ mamy*

$$w_F(\mu, y) + \underline{g}_F \ge F(\mu, y) + \Pi w_F(\mu, y) \tag{14}$$

to wtedy dla $\mu \in \mathcal{P}(E_0)$ i $y \in E$

$$\underline{g}_F = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \Pi^i F(\mu, y) \tag{15}$$

Niech

$$h_F^\beta(\mu, y) := w_F^\beta(\mu, y) - m_F^\beta \tag{16}$$

(A_F) $\sup_{\beta<1} h_F^\beta(\mu, y) < \infty$ for all $(\mu, y) \in \mathcal{P}(E_0) \times E$

$$w_F^\beta(\mu, y) = F(\mu, y) + \beta \Pi w_F^\beta(\mu, y) \tag{17}$$

$$h_F^\beta(\mu, y) := F(\mu, y) - (1-\beta) m_F^\beta + \beta \Pi h_F^\beta(\mu, y) \tag{18}$$

Lemat 3 *Przy założeniu (A_F) istnieje nieujemna funkcja borelowska w_F taka, że dla $\mu \in \mathcal{P}(E_0)$ i $y \in E$ mamy*

$$w_F(\mu, y) + \underline{g}_F \geq F(\mu, y) + \Pi w_F(\mu, y) \tag{19}$$

Główny wynik

$$\underline{g}_F = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \Pi^i F(\mu, y)$$

Propozycja 3 *Załóżmy, że zachodzi* (A_F) *dla ograniczonych funkcji* F *z klasy wyznaczającej miary* $\mathcal{P}(E_0)\times E$. *Wtedy istnieje co najwyżej jedna miara niezmiennicza* Φ *dla pary* $\begin{pmatrix} \pi_n^\rho \\ y_n \end{pmatrix}$.

Warunek dostateczny na (A)

$M^+(E_0)$; $F : \mathcal{P}(E_0) \times E \mapsto R$ let

$$ZF(\zeta, y) = \zeta(E_0)F(\frac{\zeta}{\zeta(E_0)}, y) \tag{20}$$

$$\Pi F(\mu, y) = \int_E ZF(N(y, y', \mu), y')\eta(dy') \tag{21}$$

Lemat 4 *Jeżeli* $F : \mathcal{P}(E_0) \times E \mapsto R$ *jest wklęsła ze względu na pierwszą zmienną to* $ZF : M^+(E_0) \times E \mapsto R$ *jest także wklęsła ze względu na pierwszą zmienną.*

Niech

$$N_0(y,\mu)(A) = \mu(A)$$
$$N_1(y,y',\mu)(A) = N(y,y',\mu)(A) \tag{22}$$

i indukcyjnie

$$N_n(y_0,y_1,\ldots,y_n,\mu)(A) =$$
$$N(y_{n-1},y_n,N_{n-1}(y_0,y_1,\ldots,y_{n-1},\mu))(A) \tag{23}$$

$$M_n(y_0,y_1,\ldots,y_n,\mu)(A) =: \frac{N_n(y_0,y_1,\ldots,y_n,\mu)(A)}{N_n(y_0,y_1,\ldots,y_n,\mu)(E_0)}. \tag{24}$$

Jeżeli rozkładem początkowym (x_n) jest μ i $y_0 = y$ to

$$\pi_n^{\mu y}(A) = M_n(y,y_1,\ldots,y_n,\mu)(A) \tag{25}$$

P p.w..

Lemat 5

$$\Pi^n F(\mu, y) = E_{\mu y}\{F(\pi_n, y_n)\} =$$
$$E^0\{ZF(N_n(y, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n, \mu), \tilde{y}_n)\} \tag{26}$$

gdzie E^0 *to wartość oczekiwana względem miary* P^0 *przy której zmienne losowe* $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n$ *są i.i.d. z rozkładem* η*.*

Lemat 6 *Dla ograniczonej funkcji mierzalnej* $F : \mathcal{P}(E_0) \times E \mapsto R$ *i* $\beta \in (0, 1)$ *istnieje jedyne rozwiązanie* w_F^β *równania (23). Jeżeli* F *jest ciągła zaś* Π *fellerowska to* w_F^β *jest także ciągła. Jeżeli* F *wklęsła ze względu na pierwszą zmienną to* w_F^β *jest także wklęsła ze względu na pierwszą zmienna.*

Niech $\mu, \nu \in \mathcal{P}(E_0)$, $\epsilon \in (0, 1)$, naturalne m

$$D_{\epsilon,m}^{\nu,\mu}(y, y') := \tag{27}$$
$$\left\{\omega : N_m(y, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m, \nu) \geq \epsilon N_m(y', \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m, \mu)\right\}$$

(C1) $\exists_m \exists_{\epsilon>0,\delta>0}$ takie, że $\forall_{y,y' \in E_0}$

$$E^0\left\{1_{D_{\epsilon,m}^{\nu,\mu}(y,y')}(\omega) N_m(y', \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m, \mu)(D_1)\right\} \geq \delta \tag{28}$$

$$
\begin{aligned}
h_F^\beta(\mu, y) = \sum_{i=0}^{m-1} \beta^i E^0 \left\{ZF(N_i(y, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_i, \mu), \tilde{y}_i)\right\} - \\
(1-\beta) m_F^\beta \sum_{i=0}^{m-1} \beta^i + \\
\beta^m E^0 \left\{Zh_F^\beta(N_m(y, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m, \mu), \tilde{y}_m\right\}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Propozycja 4 *Przy założeniu (C1) dla ograniczonej ciągłej wklęsłej ze względu na pierwszą zmienną funkcji F mamy*

$$
\|h_F^\beta\| \le \frac{m\|F\|}{\epsilon\delta}. \tag{30}
$$

Równanie Poissona

Zakładamy, że E σ - zwarta; tj. istnieją zwarte zbiory (E^k) takie, że $E^k \subset E^{k+1}$ i $E = \cup_{k=1}^{\infty} E^k$.

$$\lambda_m^k(\nu, y', \mu, y) := \sup \Big\{ s \in [0,1] \ s.t. \ N_m(y', y_1, \ldots, y_m, \nu) \geq N_m(y, y_1, \ldots, y_m, \mu) \ for \ y_1, \ldots, y_m \in E^k \Big\} \tag{31}$$

(C2) if $\nu \Rightarrow \mu$ and $y' \to y$ mamy dla $k = 1, 2, \ldots$

$$\lambda_m^k(\nu, y', \mu, y) \to 1 \quad i \quad \lambda_m^k(\mu, y, \nu, y') \to 1$$

(C3) $E^0 \left\{ 1_{E^k}(\tilde{y}_1) \ldots 1_{E^k}(\tilde{y}_m) N_m(y, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m, \mu)(E_0) \right\} \to 1$ gdy $k \to \infty$ and for any $y'_k \to y$, $\nu_k \to \nu$

$$E^0 \left\{ 1_{E^k}(\tilde{y}_1) \ldots 1_{E^k}(\tilde{y}_m) N_m(y'_k, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m, \nu_k)(E_0) \right\} \to 1$$

(C4) for each $i = 1, 2, \ldots$ odwzorowanie $(\mu, y) \mapsto N_i(y, y_1, \ldots, y_i, \mu)$ and $y_1 \mapsto N_1(y, y_1, \mu)$ jest ciągłe w słabej topologii.

Propozycja 5 *Przy założeniach (C1)-(C4) dla każdej ciągłej ograniczonej ze względu na pierwszą współrzędną funkcji F funkcje h_F^β są jednakowo ciągłe w każdym punkcie $(\mu, y) \in \mathcal{P}(E_0) \times E$.*

Wniosek 3 *Przy założeniach (C1)-(C4) dla ograniczonej ciągłej, wypukłej ze względu na pierwszą współrzędna funkcji F istnieje ograniczona funkcja $w_F : \mathcal{P} \times D_2 \mapsto R$ taka, że $\mu \in \mathcal{P}(E_0)$ i $y \in E$*

$$w_F(\mu, y) + \underline{g}_F = F(\mu, y) + \Pi w_F(\mu, y). \tag{32}$$

Ergodyczne problemy z częściową obserwacją

L. Stettner 1993, V. Borkar 1999, 2003, V. Borkar A. Budhiraya 2004, T. Duncan B. Pasik-Duncan L. Stettner 2005, J. Palczewski L. Stettner 2007, A. Arapostathis, V.S. Borkar i M.K. Ghosh 2012,

$P^{v_n}(x_n, dx)$, $P_1^{x_{n+1}, v_n}(y_n, dy)$

$V = (v_n)$, v_n mierzalne względem Y^n np. $v_n = u(\pi_n)$

$J(V) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} E^V \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} c(x_i, y_i) \right\} \to \min$

$$w(\mu, y) + \underline{\mathsf{g}} = \inf_{a\in U} [c(\mu, y) + \Pi^a w(\mu, y)]. \tag{33}$$

Co z hipotezą?

prace R. van Handela (2009) i X.T. Tong, R. van Handel (2012)

(R) operatory obserwacji

$$\int r(x,y,y')\eta(dy'),$$

są równoważne (dla różnych x i y)

(H) istnieje miara probabilistyczna $\phi \in \mathcal{P}(E \times (0,\infty))$ taka, że

$P\{(x_n, y_n) \in \cdot\} \to \phi(\cdot)$, w normie wahania, gdy $n \to \infty$.

(jest to spełnione dla szerokie klasy ergodycznych procesów Harrisa)

Twierdzenie 4 *Przy założeniu (R) i (H) istnieje jedyna miara niezmiennicza Φ dla pary (y_n, π_n) i ponadto Π^n zbiega w normie wahania do Φ, gdy $n \to \infty$.*

Uwaga 1 *Jeżeli (H) jest zastąpione przez słabą zbieżność to może być więcej miar niezmienniczych dla pary (y_n, π_n) (kontrprzykład R. van Handela 2010). Zatem hipoteza nie jest prawdziwa. Pytanie co należałoby dodać do słabej zmienności, by mieć jedyną miarę niezmienniczą do operator Π?*

Dziękuję za uwagę!


2 14:35