załącznik nr 2a do wniosku habilitacyjnego

Autoreferat

Zbigniew Leśniak

Podstawowe dane osobowe:

Imię i nazwisko:	Zbigniew Leśniak
Adres:	Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie, ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków
Email:	zbigniew.lesniak@up.krakow.pl

Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:

- 1988 – magister matematyki (Uniwersytet Jagielloński w Krakowie), tytuł pracy magisterskiej: Aksjomat Martina, promotor: dr B. Grell
- 1994 – doktor nauk matematycznych (Wydział Matematyczno-Fizyczno-Techniczny WSP w Krakowie), tytuł rozprawy doktorskiej: Równanie Abela na płaszczyźnie i pewne jego zastosowania w teorii iteracji, promotor: prof. dr hab. M. C. Zdun

Studia i przebieg pracy zawodowej:

- 1983-1988 – Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, Wydział Matematyki i Fizyki, studia na kierunku matematyka
- od 1 października 1988 r. do chwili obecnej zatrudniony w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie (wcześniej WSP i AP) - na stanowisku naukowo-dydaktycznym: 1988-1989 asystent stażysta, 1989-1994 asystent, od 1994 adiunkt

Spis treści

Rozdział 1

Wskazane osiągnięcie naukowe i pozostałe publikacje

Cykl publikacji wskazany jako osiągnięcia naukowe składa się z 6 publikacji i został zatytułowany:

Potoki homeomorfizmów Brouwera – postać, równoważność i sprzężenie topologiczne

1.1 Lista prac składających się na osiągnięcie naukowe

Wskazany cykl publikacja obejmuje następujące pozycje:

[A1] Z. Leśniak, *On boundaries of parallelizable regions of flows of free mappings*, Abstr. Appl. Anal., Vol. 2007 (2007), Article ID 31693, 8 pp.

[A2] Z. Leśniak, *On a decomposition of the plane for a flow free mappings*, Publ. Math. Debrecen 75 (2009), No. 1-2, 191–202.

[A3] Z. Leśniak, *On fractional iterates of a Brouwer homeomorphism embeddable in a flow*, J. Math. Anal. Appl. 366 (2010), No. 1, 310–318.

[A4] Z. Leśniak, *On the topological equivalence of flows of Brouwer homeomorphisms*, J. Difference Equ. Appl. 22 (2016), 853–864.

[A5] Z. Leśniak, *On properties of the set of invariant lines of a Brouwer homeomorphism*, J. Difference Equ. Appl. 24 (2018), 746–752.

[A6] Z. Leśniak, *On the topological conjugacy of Brouwer flows*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., DOI: 10.1007/s40840-017-0567-8.

1.2 Lista pozostałych publikacji

Pozostałe publikacje ułożone w porządku chronologicznym tworzą następującą listę:

[B1] Z. Leśniak, *On homeomorphic and diffeomorphic solutions of the Abel equation on the plane*, Ann. Polon. Math. 58 (1993), No. 1, 7–18.

[B2] Z. Leśniak, *On simultaneous Abel inequalities*, Opuscula Math. 14 (1994), 107–115.

[B3] M.C. Zdun, Z. Leśniak, *On iteration groups of singularity-free homeomorphisms of the plane*, Ann. Math. Sil. 8 (1994), 203–210.

[B4] Z. Leśniak, *On the system of the Abel equations on the plane*, Ann. Math. Sil. 9 (1995), 105–122.

[B5] Z. Leśniak, *Constructions of fractional iterates of Sperner homeomorphisms of the plane*, Förg-Rob, W. (ed.) et al., Iteration theory. Proceedings of the European conference, ECIT '92, Batschuns, Austria, September 13–19, 1992, World Scientific, Singapore (1996), 182–192.

[B6] Z. Leśniak, *On continuous iteration groups of some homeomorphisms of the plane*, Grazer Math. Ber. 334 (1997), 193–198.

[B7] Z. Leśniak, *On fractional iterates of a homeomorphism of the plane*, Ann. Polon. Math. 79 (2002), No. 2, 129–137.

[B8] Z. Leśniak, *On an equivalence relation for free mappings embeddeable in a flow*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 17 (2003), No. 7, 1911–1915.

[B9] Z. Leśniak, *On parallelizability of flows of free mappings*, Aequationes Math. 71 (2006), No. 3, 280–287.

[B10] Z. Leśniak, *On parallelizable regions of flows of the plane*, Grazer Math. Ber. 350 (2006), 175–183.

[B11] Z. Leśniak, *On maximal parallelizable regions of flows of the plane*, Int. J. Pure Appl. Math. 30 (2006), No. 2, 151–156.

[B12] Z. Leśniak, *On boundary orbits of a flow of free mappings of the plane*, Int. J. Pure Appl. Math. 42 (2008), No. 1, 5–11.

[B13] Z. Leśniak, *On the first prolongational limit set of flows of free mappings*, Tamkang J. Math. 39 (2008), No. 3, 263–269.

[B14] Z. Leśniak, *On the existence of analytic solutions of the d'Alembert equation*, Int. J. Pure Appl. Math. 48 (2008), No. 3, 385–397.

[B15] Z. Leśniak, Yong-Guo Shi, *One class of planar rational involutions*, Nonlinear Anal. 74 (2011), No. 17, 6097–6104.

[B16] Z. Leśniak, *On the structure of Brouwer homeomorphisms embeddable in a flow*, Abstr. Appl. Anal., Vol. 2012 (2012), Article ID 248413, 8 pp.

[B17] Yong-Guo Shi, Lin Li, Z. Leśniak, *On conjugacy of r-modal interval maps with non-monotonicity height equal to 1*, J. Difference Equ. Appl. 19 (2013), 573–584.

[B18] K. Ciepliński, Z. Leśniak, *On conjugacy equation in dimension one*, Banach Center Publ. 99 (2013), 31–44.

[B19] Z. Leśniak, *On strongly irregular points of a Brouwer homeomorphism embeddable in a flow*, Abstr. Appl. Anal., Vol. 2014 (2014), Article ID 638784, 7 pp.

[B20] J. Brzdęk, K. Ciepliński, Z. Leśniak, *On Ulam's type stability of the linear equation and related issues*, Discrete Dyn. Nat. Soc., Vol. 2014 (2014), Art. ID 536791, 14 pp.

[B21] A. Bahyrycz, J. Brzdęk, Z. Leśniak, *On approximate solutions of the generalized Volterra integral equation*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 20 (2014), 59–66.

[B22] Z. Leśniak, Yong-Guo Shi, *Topological conjugacy of piecewise monotonic functions of nonmonotonicity height ≥ 1*, J. Math. Anal. Appl. 423 (2015), 1792–1803.

[B23] J. Brzdęk, L. Cădariu, K. Ciepliński, A. Fošner, Z. Leśniak, *Survey on recent Ulam stability results concerning derivations*, J. Funct. Spaces, Vol. 2016 (2016), Article ID 1235103, 9 pp.

[B24] J. Brzdęk, El-s. El-hady, W. Förg-Rob, Z. Leśniak, *A note on solutions of a functional equation arising in a queueing model for a LAN gateway*, Aequationes Math. 90 (2016), 671–681.

[B25] J. Brzdęk, Z. Leśniak, R. Malejki, *On the generalized Fréchet functional equation with constant coefficients and its stability*, Aequationes Math. 92 (2018), 355–373.

[B26] J. Brzdęk, El-s. El-hady, Z. Leśniak, *On fixed points of a linear operator of polynomial form of order 3*, J. Fixed Point Theory Appl. 20 (2018), No. 2, Article:85, 10 pp.

[B27] J. Brzdęk, El-s. El-hady, Z. Leśniak, *On Fixed-point theorem in classes of function with values in a dq-metric space*, J. Fixed Point Theory Appl. 20 (2018), No. 4, Article:143, 16 pp.

Rozdział 2

Omówienie wyników wskazanego osiągnięcia naukowego

Rozdział ten stanowi zasadniczą część tego opracowania. Omówiono w nim wyniki prac wchodzących w skład cyklu stanowiącego wskazane osiągnięcie naukowego. Rozdział podzielony został na siedem podrozdziałów zgodnie z rozpatrywanymi kolejno zagadnieniami.

W pierwszym z nich przedstawiono definicje i twierdzenia stanowiące punkt wyjścia do badań dotyczących homeomorfizmów Brouwera. Po wprowadzeniu odpowiednich deficji zamieszczone zostało tutaj twierdzenie Brouwera o translacji i lemat Brouwera. Następnie podano deficje punktów regularnych i osobliwych oraz twierdzenie o strukturze dowolnego homeomorfizmu Brouwera pochodzące z pracy T. Hommy i H. Terasaki, które wraz z twierdzeniem Brouwera o translacji wytyczyło program badań. W podrozdziale tym omówiono również podstawowe własności potoków homeomorfizmów Brouwera.

W podrozdziale drugim przedstawiono własności relacji współzbieżności do nieskończoności. Większość z prezentowanych tu wyników zachodzi dla dowolnego homeomorfizmu Brouwera bez założenia, że homeomorfizm ten jest zanurzalny w potok. Pokazano tutaj również zastosowanie twierdzenia o równości zbioru punktów silnie osobliwych homeomorfizmu Brouwera i pierwszego przedłużenia granicznego potoku, w który ten homeomorfizm jest zanurzony do wykazania kolejnych własności relacji współzbieżności do nieskończoności przy dodanym już założeniu, że homeomorfizm Brouwera jest zanurzalny w potok.

W podrozdziale trzecim przedstawiono twierdzenia dotyczące obszarów prostowalnych potoku homeomorfizmów Brouwera. Ważną rolę w naszych badaniach odgrywają trajektorie zawarte w brzegu tych obszarów. Dlatego też większość z prezentowanych tu wyników opisuje własności pierwszego przedłużenia granicznego brzegu obszarów prostowalnych.

Najważniejszym wynikiem podrozdziału czwartego jest twierdzenie o postaci potoku homeomorfizmów Brouwera. Znaleźć tutaj można również wynik opisujący zależności między homeomorfizmami prostującymi maksymalnych obszarów prostowalnych tworzących rodzinę pokrywającą płaszczyznę, która występuje w tym twierdzeniu.

W podrozdziale piątym pokazano zastosowanie twierdzenia o postaci potoku homeomorfizmów Brouwera do wyznaczenia pierwiastków iteracyjnych homeomorfizmu Brouwera zanurzalnego w potok. Wykazując ciągłość konstruowanych pierwiastków korzystamy z własności trajektorii zawartych w brzegu maksymalnych obszarów prostowalnych należących do rodziny występującej w głównym twierdzeniu poprzedniego podrozdziału.

Podrozdział szósty poświęcony jest topologicznej równoważności potoków homeomorfizmów Brouwera. Zamieszczono tu m.in. wynik, który mówi, że homeomorfizm realizujący równoważność topologiczną takich potoków przekształca pierwsze przedłużenie graniczne jednego z tych potoków na pierwsze przedłużenie graniczne drugiego z nich.

Najważniejsze wyniki znajdują się w podrozdziale siódmym. Dotyczą one sprzężenia topologicznego potoków homeomorfizmów Brouwera. W dowodzie twierdzenia o sprzężeniu wykorzystano twierdzenie o postaci potoku homeomorfizmów Brouwera oraz twierdzenia dotyczące topologicznej równoważności takich potoków.

W spisie literatury zostały umieszczone pozycje, które miały istotny wpływ na omówione tutaj wyniki (bezpośredni lub pośredni).

2.1 Homeomorfizmy Brouwera

W podrozdziale tym omówimy podstawowe własności odwzorowań nazywanych *homeomorfizmami Brouwera*, tj. homeomorfizmów płaszczyzny na siebie, które nie posiadają punktów stałych i zachowują orientację. Przedstawimy tu m.in. twierdzenie Brouwera o translacji oraz twierdzenie o strukturze dowolnego homeomorfizmu Brouwera pochodzące od T. Hommy i H. Terasaki.

Zanim przystąpimy do przedstawienia własności homeomorfizmów Brouwera ustalimy niezbędną terminologię (terminologia ta będzie używana w całym tym opracowaniu). Przez *krzywą* rozumiemy odwzorowanie ciągłe $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, zaś krzywą będącą odwzorowaniem różnowartościowym nazywamy *łukiem*. *Krzywą zamkniętą* nazywamy taką krzywą γ, że $\gamma(0) = \gamma(1)$. Przez *krzywą Jordana* rozumiemy krzywą zamkniętą taką, że $\gamma_{|[0,1)}$ jest odwzorowaniem różnowartościowym. Krzywe oznaczać będziemy małymi literami alfabetu greckiego. Zbiór wartości krzywej będziemy też niekiedy nazywać krzywą i analogicznie zbiór wartości łuku będziemy nazywać łukiem, ale dla uniknięcia nieporozumień obraz oznaczać będziemy dużą literą alfabetu łacińskiego.

Indeks $\mathrm{Ind}_\gamma(p)$ punktu p względem krzywej zamkniętej γ takiej, że $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma([0,1])$ definiujemy dwuetapowo. W pierwszym kroku określamy indeks punktu $p =$

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ względem krzywych rodziny $\{\gamma_k : k \in \mathbb{Z}\}$, gdzie

$$\gamma_k(t) = (x_0 + \cos 2k\pi t,\ y_0 + \sin 2k\pi t),$$

kładąc $\mathrm{Ind}_{\gamma_k}(p) = k$ (zależność krzywej γ_k od punktu p nie jest zaznaczona w oznaczeniu tej krzywej, gdyż nie będzie potrzeby zmiany ustalonego punktu). Obrazem krzywej γ_k dla $k \neq 0$ jest okrąg o środku p i promieniu 1 i zbiór jednoelementowy $\{(x_0 + 1, y_0)\}$ dla $k = 0$.

Następnie korzystając z twierdzenia mówiącego, że dla każdej krzywej zamkniętej γ takiej, że $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma([0, 1])$, istnieje dokładnie jedno $k \in \mathbb{Z}$ takie, że krzywe γ i γ_k są homotopijne w $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ (zob. Newman [93], Theorem 8.6, str. 192), definiujemy $\mathrm{Ind}_\gamma(p)$ jako indeks punktu p względem krzywej γ_k homotopijnej z γ w $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$.

Do zdefiniowania pojęcia zachowywania orientacji przez homeomorfizm płaszczyzny na siebie wykorzystujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.1. (Newman [93], Theorem 11.1, str. 197) *Dla każdego homeomorfizmu f płaszczyzny na siebie istnieje dokładnie jedna liczba $d_f \in \{-1, 1\}$ taka, że*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(p) = d_f \cdot \mathrm{Ind}_{f \circ \gamma}(f(p))$$

dla każdego $p \in \mathbb{R}^2$ i każdej krzywej zamkniętej $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ takiej, że $p \notin \gamma([0, 1])$.

Jeśli $d_f = 1$, to mówimy, że homeomorfizm f *zachowuje orientację*, natomiast w przypadku, gdy $d_f = -1$ mówimy, że f *zmienia orientację*. Ponieważ d_f nie zależy od wyboru punktu p i krzywej zamkniętej γ dla rozstrzygnięcia czy dany homeomorfizm f płaszczyzny na siebie zachowuje czy zmienia orientację wystarczy ustalić punkt p i sprawdzić indeksy punktów p i $f(p)$ względem odpowiednio γ i $f \circ \gamma$ dla jednej wybranej krzywej Jordana γ takiej, że $p \notin \gamma([0, 1])$ oraz $\mathrm{Ind}_\gamma(p) \neq 0$. Dla homeomorfizmów płaszczyzny, które są klasy C^1 warunkiem koniecznym i wystarczającym na zachowywanie orientacji jest to, aby jakobian tego homeomorfizmu był dodatni w co najmniej jednym punkcie (zob. Newman [93], Theorem 11.2, str. 198).

Badania homeomorfizmów płaszczyzny bez punktów stałych zachowujących orientację zostały zapoczątkowane przez Luitzena E.J. Brouwera. W 1912 r. zostało opublikowane twierdzenie nazywane twierdzeniem Brouwera o translacji, które można sformułować w następujący sposób.

Twierdzenie 2.2. (Brouwer [19], Translationssatz) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera. Wówczas dla dowolnego $p \in \mathbb{R}^2$ istnieją obszar jednospójny U_p taki, że $p \in U_p$, $f(U_p) = U_p$, oraz homeomorfizm $\varphi : U_p \to \mathbb{R}^2$ spełniający równanie Abela*

$$\varphi(f(x, y)) = \varphi(x, y) + (1, 0) \qquad \text{dla} \quad (x, y) \in U_p \tag{2.1}$$

taki, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$ przeciwobraz $\varphi^{-1}(\{t\} \times \mathbb{R})$ jest domknięty na płaszczyźnie.

Warunek (2.1) oznacza, że zacieśnienie $f|_{U_p}$ homeomorfizmu Brouwera f do obszaru jednospójnego U_p jest sprzężone topologicznie z translacją T daną wzorem $T(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2)$ poprzez homeomorfizm $\varphi : U_p \to \mathbb{R}^2$, tj.

$$\varphi \circ f|_{U_p} = T \circ \varphi.$$

Twierdzeniem Brouwera o translacji nazywane jest też twierdzenie, które sformułował i wykazał Stephen A. Andrea ([5], Proposition 1.1). Twierdzenie to ma słabszą wypowiedź od oryginalnego sformułowania twierdzenia Brouwera. Pojawia się ono w książce S. Alperna i V. S. Prasada [4] w następującej postaci.

Twierdzenie 2.3. (Alpern, Prasad [4], Theorem 5.1, str. 32) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera. Wówczas jeśli kontinuum (tj. niepusty, spójny i zwarty zbiór) D spełnia warunek $f(D) \cap D = \emptyset$, to $f^n(D) \cap D = \emptyset$ dla każdego $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

W tym opracowaniu, jeśli pojawi się nazwa twierdzenie Brouwera o translacji będziemy mieć na myśli Twierdzenie 2.2.

Istotną rolę w dowodach twierdzeń opisujących własności homeomorfizmów Brouwera odgrywa lemat Brouwera.

Twierdzenie 2.4. (Brouwer [19], Satz 1 & 2) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera oraz $p \in \mathbb{R}^2$. Niech K będzie łukiem o początku p i końcu $f(p)$ takim, że*

$$f(K) \cap K = \{f(p)\}.$$

Wówczas zbiór $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(K)$ jest homeomorficznym obrazem zbioru liczb rzeczywistych.

Łuk K występujący w lemacie Brouwera nazywany jest *łukiem translacyjnym* (ang. *translation arc*). Terminu łuk używamy tu mając na myśli obraz odwzorowania ciągłego różnowartościowego $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, gdyż w tym przypadku ważne jest, że $\gamma(0) = p$ i $\gamma(1) = f(p)$, a parametryzacja zbioru K nie odgrywa roli. Zbiór $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(K)$ nazywać będziemy *krzywą translacyjną*.

Zauważmy, że dla homeomorfizmu φ występującego w twierdzeniu Brouwera o translacji zbiór $C_s := \varphi^{-1}(\mathbb{R} \times \{s\})$ jest krzywą translacyjną dla każdego $s \in \mathbb{R}$. Przeciwobraz ten nie musi być jednak zbiorem domkniętym na płaszczyźnie. Przedmiotem naszego zainteresowania będą krzywe translacyjne, które są zbiorami domkniętymi. W celu skrócenia wypowiedzi homeomorficzny obraz prostej będący zbiorem domkniętym na płaszczyźnie będziemy nazywać *linią*. Przy badaniu własności homeomorfizmów Brouwera ważną rolę odgrywają też relacje opisujące wzajemne położenie trójek parami rozłącznych linii niezmienniczych.

Oznaczmy przez $\mathcal{F}$ dowolną rodzinę złożoną z linii parami rozłącznych. Każdy element rodziny $\mathcal{F}$ na mocy twierdzenia Jordana dla sfery rozcina płaszczyznę na dwa obszary jednospójne. Zatem dwa różne zbiory C_1, C_2 rodziny $\mathcal{F}$ dzielą płaszczyznę na trzy obszary jednospójne w taki sposób, że tylko jeden z nich zawiera zarówno C_1, jak i C_2 w swym brzegu. Obszar ten nazywamy *pasem* pomiędzy C_1 i C_2.

Dla dowolnych różnych między sobą elementów C_1, C_2, C_3 rodziny $\mathcal{F}$ dokładnie jedna z następujących możliwości może mieć miejsce: albo dokładnie jeden ze zbiorów C_1, C_2, C_3 jest zawarty w pasie pomiędzy pozostałymi dwoma, albo każdy ze zbiorów C_1, C_2, C_3 jest zawarty w pasie pomiędzy pozostałymi dwoma. W pierwszym przypadku piszemy $C_i|C_j|C_k$ (dla różnych między sobą i, j, $k \in \{1,2,3\}$), gdy C_j leży w pasie pomiędzy C_i i C_k. W drugim przypadku piszemy $|C_1, C_2, C_3|$. Innymi słowy, albo dokładnie jeden ze zbiorów C_i, C_j, C_k, powiedzmy C_j, rozcina płaszczyznę w taki sposób, że pozostałe dwa zbiory zawierają się w różnych składowych jego dopełnienia $\mathbb{R}^2 \setminus C_j$, albo każdy ze zbiorów C_i, C_j, C_k rozcina płaszczyznę w taki sposób, że pozostałe dwa zbiory zawierają się w tej samej składowej jego dopełnienia.

Wzajemne położenie trójek elementów pokrywającej płaszczyznę rodziny parami rozłącznych i domkniętych homeomorficznych obrazów prostej rozważał Wilfred Kaplan [58], przy czym wyróżniał on trzy możliwe konfiguracje. Konfiguracje $|C_1, C_2, C_3|^+$ i $|C_1, C_2, C_3|^-$ występujące w pracy W. Kaplana zostały zastąpione tutaj przez konfigurację $|C_1, C_2, C_3|$, gdyż w naszych rozważaniach nie jest istotne czy krzywa Jordana mająca dokładnie jeden punkt wspólny z każdym ze zbiorów C_1, C_2, C_3 i orientację wyznaczoną przez kolejność tych punktów jest zgodnie czy przeciwnie zorientowana w stosunku do okręgu jednostkowego.

Omówimy teraz definicję i podstawowe własności relacji współzbieżności do nieskończoności pochodzącej z pracy Stephena Andrei [5]. W definicji tej relacji wykorzystywane są ciągi iteracji łuków. Jeśli f jest homeomorfizmem Brouwera, to dla każdego punktu $p \in \mathbb{R}^2$ zachodzi warunek $f^n(p) \to \infty$ przy $n \to \pm\infty$ (zob. Brouwer [19], Satz 8). Natomiast, własność ta na ogół nie zachodzi, jeśli punkt zastąpimy łukiem.

Definicję relacji współzbieżności do nieskończoności określonej na płaszczyźnie dla dowolnego homeomorfizmu Brouwera f możemy sformułować w następujący sposób:

$$p \sim q, \quad \text{jeśli } p = q \text{ lub } p,\ q \text{ są końcami pewnego łuku } K, \text{ dla którego } f^n(K) \to \infty \text{ przy } n \to \pm\infty.$$

Zauważmy, że zdefiniowana powyżej relacja jest relacją równoważności. Zagwarantowanie zwrotności relacji w samym sformułowaniu definicji pozwala uniknąć łuków zdegenerowanych.

S. Andrea wykazał, że homeomorfizm Brouwera nie może mieć dokładnie dwóch klas abstrakcji (zob. [5], Proposition 3.2). Ponadto zauważył, że dla każdej liczby naturalnej n różnej od 2 można skonstruować homeomorfizm Brouwera posiadający dokładnie n klas abstrakcji. W przeglądowej pracy Mortona Browna [21] można znaleźć przykłady homeomorfizmów Brouwera z przeliczalnym zbiorem klas abstrakcji, jak i mających nieprzeliczalnie wiele klas abstrakcji.

Przejdziemy teraz do zagadnienia niezmienniczości klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności. M. Brown, E.E. Slaminka, W. Transue [23] oraz E.W.

Daw [29] podali przykłady takich homeomorfizmów Brouwera, które nie posiadają żadnej niezmienniczej klasy abstrakcji.

M. Brown ([21], str. 56) zauważa, że homeomorfizm Brouwera nie posiada niezmienniczej klasy abstrakcji wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje domknięta krzywa translacyjna, tj. żadna krzywa translacyjna nie jest zbiorem domkniętym. Jeżeli pewna klasa abstrakcji jest niezmiennicza, to w klasie tej zawarta jest pewna domknięta krzywa translacyjna. Konstrukcja takiej krzywej translacyjnej została opisana w dowodzie twierdzenia mówiącego, że homeomorfizm Brouwera nie może mieć dokładnie dwu klas abstrakcji (Andrea [5], Proposition 3.2).

Przejdziemy teraz do twierdzenia z pracy T. Hommy i H. Terasaki [51] opisującego strukturę dowolnego homeomorfizmu Brouwera. Dla dowolnego ciągu podzbiorów $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ płaszczyzny definiujemy *granicę górną* $\limsup_{n\to\infty} A_n$ jako zbiór punktów $p \in \mathbb{R}^2$ takich, że każde otoczenie punktu p ma punkty wspólne z nieskończenie wieloma wyrazami ciągu $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Możemy zapisać to w następujący sposób

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl}\,(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m).$$

Zatem $\limsup_{n\to\infty} A_n$ jest zbiorem domkniętym.

Dla homeomorfizmu Brouwera f i podzbioru B płaszczyzny definiujemy *dodatni zbiór graniczny* $\omega_f(B)$ jako granicę górną ciągu jego iteracji $(f^n(B))_{n\in\mathbb{N}}$ oraz *ujemny zbiór graniczny* $\alpha_f(B)$ jako granicę górną ciągu $(f^{-n}(B))_{n\in\mathbb{N}}$. Zbiory te możemy przy założeniu, że B jest zwarty przedstawić w następującej postaci (zob. Nakayama [91]):

$$\begin{aligned} \omega_f(B) = \{q \in \mathbb{R}^2 : \quad & \text{istnieją ciągi } (p_j)_{j\in\mathbb{N}},\ (n_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ takie, że } p_j \in B, \\ & n_j \in \mathbb{N},\ n_j \to \infty,\ f^{n_j}(p_j) \to q \text{ przy } j \to \infty\}, \\ \alpha_f(B) = \{q \in \mathbb{R}^2 : \quad & \text{istnieją ciągi } (p_j)_{j\in\mathbb{N}},\ (n_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ takie, że } p_j \in B, \\ & n_j \in \mathbb{N},\ n_j \to \infty,\ f^{-n_j}(p_j) \to q \text{ przy } j \to \infty\}. \end{aligned}$$

T. Homma i H. Terasaka [51] wprowadzili pojęcia punktu dodatnio osobliwego i ujemnie osobliwego dla dowolnego homeomorfizmu Brouwera. Wykorzystali w tym celu pojęcie *zbioru Jordana* rozumianego jako suma krzywej Jordana i obszaru ograniczonego wyciętego z płaszczyzny przez tę krzywą. Punkt p nazywamy *dodatnio osobliwym*, jeśli dla każdego zbioru Jordana B zawierającego p w swym wnętrzu mamy $\omega_f(B) \neq \emptyset$, natomiast *ujemnie osobliwym*, jeśli dla każdego zbioru Jordana B zawierającego p w swym wnętrzu zachodzi $\alpha_f(B) \neq \emptyset$. Punkt, który jest dodatnio lub ujemnie osobliwy nazywamy *punktem osobliwym*, a punkt, który nie jest osobliwy nazywamy *punktem regularnym*.

Dla dowolnego punktu osobliwego p homeomorfizmu Brouwera f definiujemy zbiór $P^+(p)$ jako iloczyn wszystkich dodatnich zbiorów granicznych $\omega_f(B)$, gdzie B jest zbiorem Jordana zawierającym punkt p w swym wnętrzu. Podobnie definiujemy zbiór $P^-(p)$ jako iloczyn wszystkich ujemnych zbiorów granicznych $\alpha_f(B)$. Ponadto, kładziemy $P(p) := P^+(p) \cup P^-(p)$. Punkt dodatnio osobliwy p nazywamy *silnie dodatnio osobliwym*, jeśli $P^+(p) \neq \emptyset$. Analogicznie, punkt ujemnie osobliwy p

nazywamy *silnie ujemnie osobliwym*, jeśli $P^-(p) \neq \emptyset$. Mówimy, że punkt p jest *silnie osobliwy*, jeśli jest silnie dodatnio osobliwy lub silnie ujemnie osobliwy. W przeciwnym przypadku, punkt osobliwy p nazywamy *słabo osobliwym*.

Wspomniane wyżej twierdzenie o strukturze homeomorfizmu Brouwera można sformułować w następującej postaci.

Twierdzenie 2.5. (Homma, Terasaka [51], First structure theorem) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera. Wówczas płaszczyznę można przedstawić jako sumę parami rozłącznych zbiorów trzech typów: $\{O_i : i \in I\}$, gdzie $I = \mathbb{N}$ lub $I = \{1, \ldots, n\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, $\{O_i^{'} : i \in \mathbb{N}\}$ oraz F. Zbiory $\{O_i : i \in I\}$ i $\{O_i^{'} : i \in \mathbb{N}\}$ są składowymi zbioru wszystkich punktów regularnych takimi, że każdy ze zbiorów O_i jest niezmienniczym obszarem jednospójnym, który jest sumą parami rozłącznych domkniętych krzywych translacyjnych, a każdy ze zbiorów $O_i^{'}$ jest obszarem jednospójnym spełniającym warunek $O_i^{'} \cap f^n(O_i^{'}) = \emptyset$ dla każdego $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Natomiast, zbiór punktów osobliwych F jest domknięciem zbioru punktów silnie osobliwych.*

Wyniki prezentowane w tym opracowaniu dotyczyć będą głównie homeomorfizmów Brouwera zanurzalnych w potok. Dlatego też przedstawimy teraz pojęcia używane przy badaniu własności takich potoków.

Potokiem (*ciągłą grupą iteracji*, *grupą jednoparametrową*) nazywamy rodzinę homeomorfizmów płaszczyzny na siebie $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ z działaniem składania spełniającą warunki:

(1) funkcja $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \phi(x,t) = f^t(x)$ jest ciągła,

(2) $f^t(f^s(x)) = f^{t+s}(x)$ dla $x \in \mathbb{R}^2$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Mówimy, że homeomorfizm Brouwera f jest *zanurzalny w potok*, jeśli istnieje potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ taki, że $f = f^1$.

Można wykazać, że każdy element potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$, gdzie f^t jest homeomorfizmem płaszczyzny na siebie, musi zachowywać orientację. Co więcej, w przypadku gdy jeden z elementów potoku jest homeomorfizmem Brouwera, dowolny homeomorfizm tego potoku różny od identyczności nie posiada punktów stałych. Fakt ten wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.6. (Andrea [5], Proposition 2.1) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Wówczas dla każdego $p \in \mathbb{R}^2$ zachodzi warunek $f^t(p) \to \infty$ przy $t \to \pm\infty$.*

Zatem jeśli jeden z elementów potoku jest homeomorfizmem Brouwera, to każdy homeomorfizm tego potoku różny od identyczności jest homeomorfizmem Brouwera. Wówczas mówimy, że $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ jest potokiem homeomorfizmów Brouwera.

Z Twierdzenia 2.6 otrzymujemy, że trajektoria dowolnego punktu $p \in \mathbb{R}^2$, tj. zbiór $C_p := \{f^t(p) : t \in \mathbb{R}\}$ jest krzywą translacyjną będącą zbiorem domkniętym. Dlatego też rodzina wszystkich trajektorii potoku homeomorfizmów Brouwera $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$

jest ważnym przykładem określonej powyżej rodziny $\mathcal{F}$ i możemy rozważać w niej zdefiniowane powyżej dwie konfiguracje trójek linii parami rozłącznych.

Przy założeniu, że homeomorfizm Brouwera f jest zanurzalny w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$, klasy abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności są niezmiennicze. Dokładniej, dla każdej klasy abstrakcji G zachodzi warunek $f^t(G) = G$ dla $t \in \mathbb{R}$ (zob. Andrea [5], Proposition 3.1). W szczególności, dla każdego punktu $p \in \mathbb{R}^2$ trajektoria C_p jest zawarta w tej klasie abstrakcji G_p, do której należy punkt p.

Przypomnimy teraz definicję obszaru prostowalnego potoku homeomorfizmów Brouwera. Obszar $U \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy *obszarem prostowalnym* potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$, jeśli istnieje homeomorfizm $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ spełniający warunek

$$\varphi(f^t(x,y)) = \varphi(x,y) + (t,0), \qquad (x,y) \in U,\ t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Obszar prostowalny U nazywamy *maksymalnym obszarem prostowalnym* potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$, jeśli nie jest on zawarty w żadnym innym obszarze prostowalnym tego potoku.

Warunek (2.2) oznacza, że potok $\{f^t|_U : t \in \mathbb{R}\}$ jest topologicznie sprzężony z potokiem translacji $\{T^t : t \in \mathbb{R}\}$, gdzie T^t dane jest wzorem $T^t(x,y) = (x+t, y)$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, tj.

$$\varphi \circ f^t|_U = T^t \circ \varphi, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ przeciwobraz $\varphi^{-1}(\{t\} \times \mathbb{R})$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z każdą z trajektorii potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ zawartych w obszarze U. Dowolny zbiór $S \subset U$ o tej własności, że dla każdego $p \in U$ istnieje dokładnie jedna liczba $\tau(p)$ taka, że $f^{\tau(p)}(p) \in S$ nazywamy cięciem obszaru U. Istnienie ciągłego cięcia obszaru U, tj. cięcia o tej własności, że funkcja $\tau : U \to \mathbb{R}$ jest ciągła, jest równoważne prostowalności tego obszaru (zob. Bhatia, Szegö [14], Theorem 2.4, str. 49).

W badaniach dotyczących maksymalnych obszarów prostowalnych potoków homeomorfizmów Brouwera ważną rolę odgrywa pojęcie pierwszego przedłużenia granicznego. Podane poniżej definicje zostały zaczerpnięte z książki A. Pelczara [96] (por. Bhatia, Szegö [14]). Dla potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ definiujemy

$$\begin{aligned} J^+(q) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \ & \text{istnieją ciągi } (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ oraz } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ takie, że} \\ & q_n \to q,\ t_n \to +\infty,\ f^{t_n}(q_n) \to p \text{ przy } n \to +\infty\}, \\ J^-(q) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \ & \text{istnieją ciągi } (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ oraz } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ takie, że} \\ & q_n \to q,\ t_n \to -\infty,\ f^{t_n}(q_n) \to p \text{ przy } n \to +\infty\}. \end{aligned}$$

Zbiór $J(q) = J^+(q) \cup J^-(q)$ nazywamy *pierwszym przedłużeniem granicznym* punktu q. Dla zbioru $H \subset \mathbb{R}^2$ definiujemy odpowiednio

$$J^+(H) = \bigcup_{q\in H} J^+(q), \quad J^-(H) = \bigcup_{q\in H} J^-(q), \quad J(H) = \bigcup_{q\in H} J(q).$$

Zbiory $J^+(q)$ i $J^-(q)$ są domknięte i niezmiennicze dla każdego $q \in \mathbb{R}^2$ (zob. Bhatia, Szegö [14], Theorem 4.3, str. 26). Jeżeli H jest zbiorem zwartym, to zbiory $J^+(H)$ i $J^-(H)$ są domknięte (zob. Pelczar [96], Twierdzenie 57.1, str. 135). Ponadto $J^+(q) = J^+(f^t(q))$ oraz $J^-(q) = J^-(f^t(q))$ dla wszystkich $q \in \mathbb{R}^2$ i $t \in \mathbb{R}$ (zob. Pelczar [96], Twierdzenie 57.2, str. 136). Natomiast, zbiór $J(\mathbb{R}^2)$ może nie być domknięty (zob. McCann [86], Example 3.10).

Dla dowolnych $p, q \in \mathbb{R}^2$ bezpośrednio z definicji otrzymujemy, że $p \in J(q)^+$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q \in J(p)^-$. Jeżeli $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ jest potokiem homeomorfizmów Brouwera, to dla każdego $p \in \mathbb{R}^2$ mamy $p \notin J(p)$ oraz $J^+(p) \cap J^-(p) = \emptyset$ (zob. McCann [86], Proposition 1.5 oraz Proposition 2.11).

2.2 Relacja współzbieżności do nieskończoności

W rozdziale tym omówimy wyniki opisujące własności relacji współzbieżności do nieskończoności. Definicja i podstawowe własności tej relacji zostały przedstawione w poprzednim podrozdziale. Wyniki zamieszczone w tym podrozdziale, za wyjątkiem ostatniego z prezentowanych tu twierdzeń, zostały uzyskane bez założenia, że homeomorfizm Brouwera jest zanurzalny w potok.

Twierdzenie zamykające ten rozdział dotyczy trajektorii zawartych w różnych klasach abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności. W jego dowodzie wykorzystano twierdzenie, które charakteryzuje zbiór punktów silnie osobliwych homeomorfizmu Brouwera zanurzalnego w potok za pomocą pojęcia pierwszego przedłużenia granicznego pochodzącego z teorii ciągłych układów dynamicznych. Pozostałe wyniki opisujące własności relacji współzbieżności do nieskończoności dla homeomorfizmów Brouwera zanurzalnych w potok znajdują się w drugim rozdziale tego opracowania zawierającym wyniki uzupełniające.

Przypomnijmy, że jeśli f jest homeomorfizmem Brouwera, to każda jego iteracja f^n dla $n \neq 0$, jest również homeomorfizmem Brouwera. Dlatego też relację współzbieżności do nieskończoności możemy zdefiniować zarówno dla f, jak i dla f^n.

Twierdzenie 2.7. ([A3], Proposition 3.3) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera, n liczbą całkowitą różną od 0. Wówczas homeomorfizmemy Brouwera f oraz f^n mają te same klasy abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności.*

W głównej części dowodu tego twierdzenia pokazujemy, że jeśli dla pewnych punktów $p, q \in \mathbb{R}^2$ istnieje łuk K o końcach p oraz q taki, że $f^{nm}(K) \to \infty$ przy $m \to \pm\infty$, to dla tego łuku zachodzi również warunek $f^k(K) \to \infty$ przy $k \to \pm\infty$.

Przejdziemy teraz do problemu niezmienniczości klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności. Rozpoczniemy od twierdzenia, które mówi, że homeomorfizmu Brouwera przekształca klasy abstrakcji na klasy abstrakcji.

Twierdzenie 2.8. ([A3], Proposition 3.4) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera, zaś $\{G_i\}_{i \in I}$ rodziną wszystkich klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności. Wówczas dla każdego $i \in I$ istnieje $j \in I$ takie, że $f(G_i) = G_j$.*

Dlatego też dla wykazania niezmienniczości klasy G_i wystarczy sprawdzić, że dla pewnego $p \in G_i$ zachodzi warunek $f(p) \in G_i$.

Następny z prezentowanych tu wyników mówi, że jeśli pewna klasa abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności jest niezmiennicza względem pewnej iteracji homeomorfizmu Brouwera f, to jest ona również niezmiennicza ze względu na f.

Twierdzenie 2.9. ([A3], Proposition 3.6) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera, n liczbą całkowitą różną od 0. Wówczas dla każdej klasy abstrakcji G_0 relacji współzbieżności do nieskończoności równość $f^n(G_0) = G_0$ implikuje warunek $f(G_0) = G_0$.*

W dowodzie tego twierdzenia dla danej klasy abstrakcji G_0 rozważamy rodzinę $\{G_m : m \in \mathbb{Z}\}$, gdzie $G_m := f^m(G_0)$ dla $m \in \mathbb{Z}$. Z założenia $f^n(G_0) = G_0$ wynika, że rodzina ta zawiera co najwyżej n różnych klas abstrakcji. Stosując wynik z pracy S. Andrei dotyczący skończonej rodziny zbiorów rozłącznych i łukowo spójnych (zob. [5], Proposition 1.3), otrzymujemy że kazdy z elementów tej rodziny jest równy G_0.

Zatem w przypadku, gdy rodzina wszystkich klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności zdefiniowanej dla danego homeomorfizmu Brouwera f jest skończona, każda z klas abstrakcji jest niezmiennicza ze względu na f. Wynika to z Twierdzeń 2.8 oraz 2.9, gdyż w tym przypadku f permutuje elementy tej rodziny.

Przedstawimy teraz wyniki dotyczące linii niezmienniczych, czyli homeomorficznych obrazów prostej, które są zbiorami domkniętymi niezmienniczymi względem ustalonego homeomorfizmu Brouwera. Następne twierdzenie mówi, że takie linie są krzywymi translacyjnymi.

Twierdzenie 2.10. ([A5], Proposition 2.1) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera, a C linią. Załóżmy, że $f(C) = C$. Wówczas dla każdego $p_0 \in C$*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(K_{p_0 f(p_0)}) = C, \tag{2.3}$$

gdzie $K_{p_0 f(p_0)}$ oznacza łuk o końcach p_0, $f(p_0)$ zawarty w C. Ponadto, $f^n(K_{pq}) \to \infty$ przy $n \to \pm\infty$ dla dowolnych $p, q \in C$, gdzie K_{pq} oznacza łuk o końcach p, q zawarty w C.

Bezpośrednio z Twierdzenia 2.10 otrzymujemy, że każda linia niezmiennicza homeomorfizmu Brouwera jest domkniętą krzywą translacyjną zawartą w pewnej klasie abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności. Stąd, na mocy Twierdzenia 2.8, klasa ta jest niezmiennicza.

Wniosek 2.11. ([A5], Corollary 2.2) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera, a C linią. Załóżmy, że $f(C) = C$. Wtedy istnieje klasa abstrakcji G relacji współzbieżności do nieskończoności taka, że $C \subset G$. Ponadto, $f(G) = G$.*

Podczas badania własności klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności z wykorzystaniem zbiorów Jordana może okazać się, że istotna jest informacja czy z założenia, że krzywa Jordana stanowiąca brzeg zbioru Jordana zawiera się w pewnej klasie abstrakcji, wynika że zbiór Jordana wyznaczony przez tę krzywą zawiera się w tej klasie. Stosując Wniosek 2.11 możemy wykazać nastepujący wynik dotyczący tego zagadnienia.

Twierdzenie 2.12. ([A5], Proposition 2.3) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera. Załóżmy, że dla każdego $p \in \mathbb{R}^2$ istnieje linia niezmiennicza C_p taka, że $p \in C_p$. Wówczas każda klasa abstrakcji G relacji współzbieżności do nieskończoności jest jednospójna.*

Warto zaznaczyć, że w powyższym wyniku nie zakładamy, że linie niezmiennicze rodziny $\{C_p : p \in \mathbb{R}^2\}$ są albo rozłączne, albo równe. W pracy S. Andrei [5] można znaleźć przykład homeomorfizmu Brouwera posiadającego klasę abstrakcji o tej własności, że wszystkie linie niezmiennicze zawarte w tej klasie mają przeliczalnie wiele punktów wspólnych.

Korzystając z Twierdzenia 2.10 można udowodnić następujący wynik dotyczący łuku łączącego dwie niezmiennicze linie zawarte w tej samej klasie abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności.

Twierdzenie 2.13. ([A5], Theorem 3.1) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera, a C_1, C_2 liniami takimi, że $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Załóżmy, że $f(C_1) = C_1$, $f(C_2) = C_2$ oraz C_1, C_2 są zawarte w tej samej klasie abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności. Niech K_{pq} będzie łukiem o końcach p, q takim, że $p \in C_1$, $q \in C_2$ oraz $(K_{pq} \setminus \{p, q\}) \cap (C_1 \cup C_2) = \emptyset$. Wówczas $f^n(K_{pq}) \to \infty$ przy $n \to \pm\infty$.*

W dowodzie tego twierdzenia wychodzimy od łuku K_0 o końcach należących do linii C_1, C_2, dla którego zachodzi warunek $f^n(K_0) \to \infty$ przy $n \to \pm\infty$. Istnienie takiego łuku, przy założeniu, że linie C_1, C_2 są zawarte w tej samej klasie abstrakcji, otrzymujemy bezpośrednio z definicji relacji współzbieżności do nieskończoności. W celu wykazania, że ciąg iteracji łuku K_{pq} występującego w założeniach dowodzonego twierdzenia również zmierza do nieskończoności wykorzystujemy fakt, że linie C_1, C_2 są domkniętymi krzywymi translacyjnymi. Dzięki temu przy pomocy łuku K_0 możemy skonstruować zbiór Jordana B_f zawierający łuk K_{pq} taki, że $f^n(B_f) \to \infty$ przy $n \to \pm\infty$, gdzie przez zbiór Jordana rozumiemy sumę krzywej Jordana i ograniczonej składowej jej dopełnienia.

Skonstruowana krzywa Jordana J_f będąca brzegiem zbioru Jordana B_f jest sumą czterech łuków, z których jeden jest zawarty w linii C_1, jeden w linii C_2, a pozostałe dwa mają tę własność, że każdy z tych łuków ma z liniami C_1, C_2 po jednym punkcie wspólnym będącym jednym z jego końców. Stąd otrzymujemy, że zbiór Jordana B_f jest zawarty w tej samej klasie abstrakcji co linie C_1, C_2, gdyż każdy punkt zbioru B_f można połączyć z liniami C_1, C_2 łukiem zawartym w tym zbiorze.

Zamieszczony poniżej wynik mówi, że dla dowolnych dwóch rozłącznych linii niezmienniczych zawartych w tej samej klasie abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności, pas pomiędzy tymi liniami zawiera się w zbiorze punktów regularnych.

Wniosek 2.14. ([A5], Corollary 3.2) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera, a C_1, C_2 liniami takimi, że $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Załóżmy, że $f(C_1) = C_1$, $f(C_2) = C_2$ oraz C_1, C_2 są zawarte w tej samej klasie abstrakcji G relacji współzbieżności do nieskończoności. Wówczas każdy punkt pasa pomiędzy C_1, C_2 jest regularny i należy do klasy G.*

Wynik ten jest wnioskiem z dowodu Twierdzenia 2.13. Jedyna różnica w stosunku do tamtego rozumowania polega na tym, że konstruowany zbiór Jordana B_f ma zawierać pewne otoczenie dowolnie ustalonego punktu p pasa pomiędzy liniami C_1, C_2. Ponieważ ciąg iteracji zbioru B_f zmierza do nieskończoności, więc punkt p jest regularny. Ponadto, p należy do klasy abstrakcji G zawierającej linie C_1, C_2, ponieważ punkt p możemy połączyć z dowolnym punktem zbioru $(C_1 \cup C_2) \cap B_f$ łukiem zawartym w B_f.

Przejdziemy teraz do omówienia wyników dotyczących zależności pomiędzy konfiguracjami trójek parami rozłącznych linii niezmienniczych a relacją współzbieżności do nieskończoności. Korzystając z Twierdzeń 2.10 i 2.13 możemy wykazać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.15. ([A5], Theorem 4.1) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera, zaś C_1, C_2, C_3 parami rozłącznymi liniami. Załóżmy, że $f(C_i) = C_i$ dla $i \in \{1, 2, 3\}$. Jeśli $|C_1, C_2, C_3|$, to każda z linii C_1, C_2, C_3 jest zawarta w innej klasie abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności.*

Zasadniczą część dowodu stanowi pokazanie, że żaden łuk K o końcach należących do dwu spośród linii C_1, C_2, C_3 rozłączny z trzecią z nich nie spełnia warunku $f^n(K) \to \infty$ przy $n \to \pm\infty$. Zatem na mocy Twierdzenia 2.13 żadne dwie spośród tych linii nie mogą być zawarte w tej samej klasie abstrakcji.

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy wynik dotyczący konfiguracji trójki linii niezmienniczych w przypadku, gdy dwie z nich zawierają się w tej samej klasie abstrakcji.

Wniosek 2.16. ([A5], Corollary 4.2) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera, zaś C_1, C_2, C_3 parami rozłącznymi liniami. Załóżmy, że $f(C_i) = C_i$ dla $i \in \{1, 2, 3\}$ oraz C_1, C_2 są zawarte w tej samej klasie abstrakcji G relacji współzbieżności do nieskończoności. Jeśli C_3 zawiera się w pasie pomiędzy C_1, C_2, to $C_1|C_3|C_2$ oraz $C_3 \subset G$.*

Pozostałe wyniki prezentowane w tym rozdziale dotyczą homeomorfizmów Brouwera f zanurzalnych w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Wówczas trajektorie potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ są parami rozłącznymi liniami niezmienniczymi homeomorfizmu Brouwera f, a zbiór punktów regularnych homeomorfizmu Brouwera możemy opisać przy użyciu relacji współzbieżności do nieskończoności. Dokładniej, zbiór punktów regularnych jest równy sumie wnętrz wszystkich klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności (por. [B16], Proposition 2.1). Wynik ten omówiony został dokładniej w następnym rozdziale zawierającym wyniki uzupełniające (zob. Twierdzenie 3.21). Przedstawimy tam również Twierdzenie 3.24, które mówi, że zbiór punktów silnie osobliwych homeomorfizmu Brouwera zanurzalnego w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ jest równy pierwszemu przedłużeniu granicznemu tego potoku (por. [B19], Corollary 3).

Twierdzenie 3.9 zamieszczone w następnym rozdziale mówi, że każda klasa abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności zawarta jest w pewnym obszarze prostowalnym. Dlatego też dla dowolnych punktów p, q należących do tej samej klasy abstrakcji tej relacji istnieje cięcie ciągłe przechodzące przez punkty p, q. Z Twierdzenia 2.13 otrzymujemy, że łuk K_{pq} o końcach p, q zawarty w tym cięciu spełnia warunek $f^n(K_{pq}) \to \infty$ przy $n \to \pm\infty$. Postępując analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 2.13 otrzymujemy, że $(f^t)^n(K_{pq}) \to \infty$ przy $n \to \pm\infty$ dla każdego $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zatem klasy abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności zdefiniowanej dla homeomorfizmu Brouwera f^t będącego elementem potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ nie zależą od $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zatem, korzystając ze wspomnianego wyżej Twierdzenia 3.21 otrzymujemy więc, że zbiory punktów regularnych elementów f^t potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$, gdzie $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, są równe. Co więcej, Wniosek 3.26 zamieszczony w następnym rozdziale mówi, że zbiory punktów silnie osobliwych są równe dla każdego różnego od identyczności elementu f^t potoku homeomorfizmów Brouwera $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$, tj. dla $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Stąd również zbiory punktów słabo osobliwych są równe dla każdego elementu f^t tego potoku dla $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dlatego też możemy mówić o zbiorach punktów silnie osobliwych, słabo osobliwych i regularnych potoku homeomorfizmów Brouwera.

Przejdziemy teraz do omówienia wyniku dotyczącego trajektorii potoku homeomorfizmów Brouwera zawartych w różnych klasach abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności. Zasadniczą rolę w jego dowodzie odgrywa wspomniane wyżej Twierdzenie 3.24. W dowodzie tym skorzystamy również z następującego wyniku, który otrzymujemy z definicji pierwszego przedłużenia granicznego i trójargumentowych relacji zdefiniowanych w zbiorze trajektorii potoku homeomorfizmów Brouwera.

Twierdzenie 2.17. ([A1], Proposition 3.1) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ będzie potokiem homeomorfizmów Brouwera. Jeśli $p \in J(q)$, to $|C_p, C_q, C_r|$ dla każdego $r \in D_{pq}$, gdzie D_{pq} oznacza pas pomiędzy trajektoriami C_p, C_q punktów p, q.*

Zapowiedziany wyżej wynik opisujący wzajemne położenie trajektorii potoku homeomorfizmów Brouwera możemy sformułować w następujący sposób.

Twierdzenie 2.18. ([A4], Theorem 3.6) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ będzie potokiem homeomorfizmów Brouwera. Niech $q_1 \in G_1$, $q_2 \in G_2$ oraz G_1, G_2 będą różnymi klasami abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności. Wówczas istnieje punkt r taki,* *że* $|C_{q_1}, C_r, C_{q_2}|$*, gdzie* C_{q_1}*,* C_{q_2}*,* C_r *oznaczają odpowiednio trajektorie punktów* q_1*,* q_2*,* r*.*

Zasadnicza część dowodu tego twierdzenia dotyczy sytuacji, w której $q_1 \in \operatorname{bd} G_1$ oraz składowa zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_{q_1}$ zawierająca C_{q_2} oznaczana przez H jest rozłączna z G_1. Wówczas, jeśli q_1 należy do brzegu pewnej klasy zawartej w H, to w celu wykazania istnienia punktu r takiego, że $|C_{q_1}, C_r, C_{q_2}|$, wykorzystujemy własności relacji współzbieżności do nieskończoności przedstawione w rozdziale zawierającym wyniki uzupełniające (por. Twierdzenia 3.13 i 3.14).

Trudniejszy natomiast okazuje się przypadek, gdy q_1 nie należy do brzegu żadnej klasy abstrakcji zawartej w H. Wówczas na podstawie twierdzenia Whitneya-Bebutova (por. Bhatia, Szegö [14], str. 52) otrzymujemy istnienie lokalnego cięcia K zawierającego q_1 rozłącznego z trajektorią C_{q_2}. Następnie ustalamy dowolne $q_0 \in K \cap H$. Jeśli $|C_{q_1}, C_{q_0}, C_{q_2}|$, to biorąc $r = q_0$ otrzymujemy tezę naszego twierdzenia.

Pozostaje przypadek $C_{q_1}|C_{q_0}|C_{q_2}$. Wówczas kluczowe znaczenie ma pokazanie, że pas $D_{q_1q_0}$ pomiędzy trajektoriami C_{q_1}, C_{q_0} zawiera punkt silnie osobliwy q_3 o tej własności, że $C_{q_1}|C_{q_3}|C_{q_0}$. Następnie korzystając z Twierdzenia 3.24 otrzymujemy, że $P(q_3) = J(q_3)$. Zatem istnieje p_3 taki, że $p_3 \in J(q_3)$. Wówczas $p_3 \in D_{q_1q_3}$ lub $p_3 \in D_{q_0q_3}$. Jeśli $p_3 \in D_{q_1q_3}$, to z Twierdzenia 2.17, otrzymujemy $|C_{q_1}, C_{p_3}, C_{q_3}|$. Jeśli natomiast $p_3 \in D_{q_0q_3}$, to z Twierdzenia 2.17 dostajemy $|C_{q_0}, C_{p_3}, C_{q_3}|$. Zatem w obu przypadkach $|C_{q_1}, C_{p_3}, C_{q_2}|$. Kładąc $r = p_3$ otrzymujemy tezę naszego twierdzenia.

Na Twierdzenie 2.18 możemy patrzeć jak na rozszerzenie wspomnianego wyżej Twierdzenia 3.14 na przypadek, gdy brzegi klas G_1, G_2 są rozłączne. Nie jest jednak na ogół prawdą, że każdy punkt $r \in D_{q_1q_2} \setminus (G_1 \cup G_2)$ spełnia warunek $|C_{q_1}, C_r, C_{q_2}|$. Twierdzenie 2.18 zostało wykorzystane w dowodzie zamieszczonej w dalszej części tego rozdziału jednej z własności homeomorfizmu realizującego równoważność topologiczną potoków homeomorfizmu Brouwera.

2.3 Obszary prostowalne potoku homeomorfizmów Brouwera

W rozdziale tym omówimy własności obszarów prostowalnych dla potoku homeomorfizmów Brouwera, tj. obszarów na których potok homeomorfizmów Brouwera jest topologicznie sprzężony z potokiem translacji.

Przedstawianie własności brzegu obszarów prostowalnych (niekoniecznie maksymalnych w sensie zawierania) rozpoczniemy od wyniku mówiącego o jego niezmienniczości.

Twierdzenie 2.19. ([A1], Proposition 2.1) *Brzeg obszaru prostowalnego* U *potoku homeomorfizmów Brouwera* $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ *jest niezmienniczy.*

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystujemy niezmienniczość obszaru prostowalnego U oraz fakt, że domknięcie obszaru prostowalnego nie ma punktów wspólnych z jedną ze składowych, na które rozcina płaszczyznę trajektoria dowolnego punktu należącego do brzegu tego obszaru (por. Twierdzenie 3.15).

Z Twierdzenia 2.19 wnioskujemy, że brzeg obszaru prostowalnego jest sumą trajektorii. Przedstawimy teraz twierdzenie opisujące wzajemne położenie trajektorii brzegowych obszaru prostowalnego.

Twierdzenie 2.20. ([A1], Proposition 2.2) *Niech U będzie obszarem prostowalnym potoku homeomorfizmów Brouwera $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Wówczas $|C_{p_1}, C_{p_2}, C_{p_3}|$ dla dowolnych różnych trajektorii C_{p_1}, C_{p_2}, C_{p_3} zawartych w $\operatorname{bd} U$.*

W dowodzie tego twierdzenia stosujemy wykorzystywany już w tym podrozdziale fakt, że każda z trzech rozpatrywanych trajektorii brzegowych musi rozcinać płaszczyznę w ten sposób, że pozostałe dwie trajektorie zawarte są w tej samej składowej jej dopełnienia (por. Twierdzenie 3.15).

Zastępując w powyższym rozumowaniu jedną z trajektorii brzegowych obszaru U odpowiednio położoną trajektorią zawartą w U otrzymujemy kolejny wynik.

Twierdzenie 2.21. ([A1], Proposition 2.3) *Niech U będzie obszarem prostowalnym potoku homeomorfizmów Brouwera $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Niech $r \in U$ oraz H będzie składową zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_r$. Wówczas dla dowolnych różnych trajektorii C_{p_1}, C_{p_2} zawartych w $\operatorname{bd} U \cap H$ zachodzi warunek $|C_{p_1}, C_{p_2}, C_r|$.*

Obszar U jest prostowalny wtedy i tylko wtedy, gdy $J(U) \cap U = \emptyset$ (zob. Bhatia, Szegö [14], Theorem 1.8, str. 46 oraz Theorem 2.4, str. 49). Stąd dla każdego obszaru prostowalnego U zachodzi warunek $J(U) \subset \operatorname{bd} U$, gdyż z definicji pierwszego przedłużenia granicznego otrzymujemy $J(U) \subset \operatorname{cl} U$.

Szczególne znaczenie w opisie potoków homeomorfizmów Brouwera mają maksymalne obszary prostowalne, tj. obszary prostowalne nie będące właściwymi podzbiorami żadnego obszaru prostowalnego. Jeśli U jest maksymalnym obszarem prostowalnym, to $J(U) = \operatorname{bd} U$ (zob. McCann [86], Proposition 2.6).

Do opisu maksymalnych obszarów prostowalnych możemy również wykorzystać relację współzbieżności do nieskończoności. Maksymalny obszar prostowalny U potoku homeomorfizmów Brouwera $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ jest bowiem sumą klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności (por. Twierdzenie 3.16). Trajektorie brzegowe tych klas abstrakcji mogą zawierać się albo w tym obszarze, albo w jego brzegu.

Trajektorie zawarte w obszarze prostowalnym U będące trajektoriami brzegowymi klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności są podzbiorami zbioru punktów osobliwych. Wynika to ze wspomnianego wcześniej Twierdzenia 3.21, które mówi, że zbiór punktów regularnych jest równy sumie wnętrz klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności (por. [B16], Proposition 2.1). Własności trajektorii brzegowych klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności zostały omówione dokładniej w następnym rozdziale tego opracowania w części poświęconej wynikom uzupełniającym.

Dla każdego obszaru prostowalnego U trajektorie będące podzbiorami zbioru $\mathrm{J}(\mathrm{bd}\, U) \cap U$ zawarte są w zbiorze punktów silnie osobliwych (zob. Twierdzenie 3.24). Nie oznacza to jednak, że wszystkie pozostałe trajektorie zawarte w obszarze prostowalnym U są podzbiorami zbioru punktów regularnych. Obszar prostowalny może bowiem zawierać trajektorie składające się z punktów słabo osobliwych (por. McCann [86], Example 3.10).

Kolejne wyniki prezentowane tutaj dotyczyć będą zbioru $\mathrm{J}(p) \cap U$ dla $p \in \mathrm{bd}\, U$, gdzie U jest obszarem prostowalnym. Omówimy m.in. rezultat mówiący o jednoznaczności trajektorii zawartej w pierwszym przedłużeniu granicznym trajektorii brzegowej maksymalnego obszaru prostowalnego, która leży w tym obszarze. Rozpoczniemy od wyniku, który odgrywa zasadniczą rolę w dowodzie tego faktu.

Twierdzenie 2.22. ([A1], Proposition 2.4) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ będzie potokiem homeomorfizmów Brouwera. Niech $q_1, q_2 \in J(p)$, $C_{q_1} \neq C_{q_2}$. Wówczas $|C_{q_1}, C_{q_2}, C_r|$ dla każdego $r \in D_{q_1,q_2} \setminus C_p$, gdzie D_{q_1,q_2} jest pasem pomiędzy C_{q_1}, C_{q_2}.*

W dowodzie tego twierdzenia wykazujemy najpierw, że $p \in D_{q_1,q_2}$, a następnie wykluczamy przypadek $C_{q_1} \mid C_r \mid C_{q_2}$. Gdyby bowiem ten przypadek miał miejsce, to punkty q_1, q_2 musiałyby należeć do różnych składowych zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_r$. Stąd punkt p należałby do jednej ze składowych zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_r$, gdyż $p \notin C_r$. Zatem p nie mógłby należeć do pierwszego przedłużenia granicznego tego z punktów q_1, q_2, który leży w składowej $\mathbb{R}^2 \setminus C_r$ nie zawierającej p, co jest sprzeczne z założeniem.

W powyższym rozumowaniu korzystamy z założenia, że $p \notin C_r$. W przypadku, gdy $p \in C_r$ konfiguracja $C_{q_1} \mid C_r \mid C_{q_2}$ może mieć miejsce.

Z Twierdzenia 2.22 otrzymujemy wniosek opisujący własności trajektorii zawartych w pierwszym przedłużeniu granicznym punktu należącego do brzegu obszaru prostowalnego.

Wniosek 2.23. ([A1], Corollary 2.5) *Niech U będzie obszarem prostowalnym potoku homeomorfizmów Brouwera $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Niech $p \in \mathrm{bd}\, U$ oraz $q_1, q_2 \in U$. Załóżmy, że $q_1, q_2 \in J(p)$. Wówczas $C_{q_1} = C_{q_2}$.*

Wniosek ten został udowodniony metodą nie wprost. Przypuśćmy, że $C_{q_1} \neq C_{q_2}$. Wtedy w pasie D_{q_1,q_2} musi istnieć punkt $r \in U$. Z prostowalności obszaru U otrzymujemy $C_{q_1} \mid C_r \mid C_{q_2}$. Z drugiej strony na mocy Twierdzenia 2.22 mamy $|C_{q_1}, C_{q_2}, C_r|$, a więc otrzymujemy sprzeczność.

Jeśli U jest maksymalnym obszarem prostowalnym potoku homeomorfizmów Brouwera oraz $p \in \mathrm{bd}\, U$, to zbiór $\mathrm{J}(p) \cap U$ jest niepusty. Zatem z Wniosku 2.23 otrzymujemy wspomniany wyżej wynik.

Wniosek 2.24. ([A6], Corollary 1.4) *Niech U będzie maksymalnym obszarem prostowalnym potoku homeomorfizmów Brouwera $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Niech $p \in \mathrm{bd}\, U$. Wówczas zbiór $\mathrm{J}(p) \cap U$ składa się z dokładnie jednej trajektorii.*

Z powyższego wniosku nie wynika wzajemna odpowiedniość między trajektoriami brzegowymi maksymalnego obszaru prostowalnego U a trajektoriami zawartymi w zbiorze $\mathrm{J}(\mathrm{bd}\, U) \cap U$. Może się bowiem zdarzyć, że dwóm różnym trajektoriom C_{p_1}, C_{p_2} zawartym w brzegu obszaru U odpowiada ta sama trajektoria zawarta w zbiorze $\mathrm{J}(\mathrm{bd}\, U) \cap U$, tj. $\mathrm{J}(p_1) \cap U = \mathrm{J}(p_2) \cap U$.

Następne wyniki pokazują zastosowanie relacji współzbieżności do nieskończoności przy badaniu obszarów prostowalnych potoku homeomorfizmów Brouwera. Wśród nich szczególne znaczenie mają maksymalne obszary prostowalne, gdyż takie obszary tworzą pokrycie płaszczyzny w przedstwionym w następnym podrozdziale twierdzeniu o postaci potoku homeomorfizmów Brouwera.

Podamy teraz warunek wystarczający na to, aby część wspólna obszaru prostowalnego z jedną ze składowych dopełnienia trajektorii zawartej w tym obszarze prostowalnym, zawierała punkty należące tylko do jednej z klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności.

Twierdzenie 2.25. ([A1], Proposition 4.1) *Niech U będzie obszarem prostowalnym potoku homeomorfizmów Brouwera $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ oraz $r \in U$. Niech H będzie składową zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_r$ taką, że $H \cap J(\mathrm{bd}\, U) \cap U = \emptyset$. Wówczas $H \cap U$ jest zawarte w pewnej klasie abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności.*

Przedstawimy teraz szkic dowodu tego twierdzenia. Korzystając z założenia, że $H \cap J(\mathrm{bd}\, U) \cap U = \emptyset$ wykazujemy najpierw, że dla dowolnych $p, q \in H \cap U$ pas D_{pq} zawiera się w U. Następnie wykorzystując tę własność dowodzimy, że dla dowolnych $p_1, q_1 \in D_{pq}$ istnieje łuk K o końcach p_1, q_1 taki, że $f^n(K) \to \infty$ przy $n \to \pm\infty$. Zatem pas D_{pq} zawiera się w pewnej klasie abstrakcji. Zatem, w celu wykazanie, że dowolnie ustalone punkty $p_1, q_1 \in H \cap U$ należą do tej samej klasy abstrakcji wystarczy dobrać $p, q \in H \cap U$ takie, że $p_1, q_1 \in D_{pq}$.

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.26. ([A1], Corollary 4.2) *Niech U będzie obszarem prostowalnym potoku homeomorfizmów Brouwera $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ oraz $r \in U$. Niech H będzie składową zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_r$ taką, że $H \cap \mathrm{bd}\, U = \emptyset$. Wówczas $H \subset U$ oraz H jest zawarte w pewnej klasie abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności.*

Przy założeniach Twierdzenia 2.25 może istnieć punkt $p \in H \cap U$ taki, że w pasie D_{pr} znajdują się punkty nie należące do U. Założenia Wniosku 2.26 wykluczają natomiast taką możliwość.

Wybrane wyniki dotyczące maksymalnych obszarów prostowalnych potoku homeomorfizmów Brouwera, które nie znalazły się w tym podrozdziale, zostały omówione w następnym rozdziale tego opracowania w części poświęconej wynikom uzupełniającym.

2.4 Postać potoku homeomorfizmów Brouwera

Rozdział ten poświęcony jest głównie twierdzeniu o postaci potoku homeomorfizmów Brouwera, które mówi o istnieniu co najwyżej przeliczalnej rodziny maksymalnych obszarów prostowalnych pokrywającej płaszczyznę. W każdym z tych obszarów rozważamy układ współrzędnych wyznaczony przez homeomorfizm prostujący. Przedstawimy również własności funkcji opisujących przejście między tymi układami współrzędnych na częściach wspólnych obszarów rozważanej rodziny pokrywającej płaszczyznę.

W konstrukcji rodziny maksymalnych obszarów prostowalnych korzystamy z idei Wilfreda Kaplana [58], [59]. Dla dowolnego potoku homeomorfizmów Brouwera jako zbioru indeksów konstruowanej rodziny użyjemy zdefiniowanej przez W. Kaplana klasy ciągów składającej się z ciągów skończonych liczb całkowitych o własnościach opisanych poniżej.

Dla dowolnego niepustego zbioru X przez $X^{<\omega}$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich ciągów skończonych, których wyrazy należą do zbioru X. *Drzewem* nad X nazywamy dowolny podzbiór T zbioru $X^{<\omega}$ zamknięty ze względu na segmenty początkowe (prefiksy), tj. dla dowolnych liczb naturalnych m, n takich, że $n > m$, jeśli $(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) \in T$, to $(x_1, \dots, x_m) \in T$.

Niech $\alpha = (x_1, \dots, x_n) \in X^{<\omega}$. Wówczas dla dowolnego $x \in X$ przez $\alpha\widehat{\ }x$ będziemy oznaczać konkatenację ciągu α i ciągu jednoelementowego x, tj. ciąg $(x_1, \dots, x_n, x)$.

Klasę A^+ ciągów skończonych liczb całkowitych dodatnich będziemy nazywać *dopuszczalną*, jeśli $A^+ \subset \mathbb{Z}_+^{<\omega}$ jest drzewem nad $\mathbb{Z}_+$ oraz spełnione są warunki:

(i) A^+ zawiera ciąg jednoelementowy 1 i nie zawiera żadnego innego ciągu jednoelementowego;

(ii) jeśli $\alpha\widehat{\ }k \in A^+$ dla pewnego $k > 1$, to również $\alpha\widehat{\ }(k-1) \in A^+$.

Klasę A^- ciągów skończonych liczb całkowitych ujemnych będziemy nazywać *dopuszczalną*, jeśli $A^- \subset \mathbb{Z}_-^{<\omega}$ jest drzewem nad $\mathbb{Z}_-$ oraz spełnione są warunki:

(iii) A^- zawiera ciąg jednoelementowy -1 i nie zawiera żadnego innego ciągu jednoelementowego;

(iv) jeśli $\alpha\widehat{\ }k \in A^-$ dla pewnego $k < -1$, to również $\alpha\widehat{\ }(k+1) \in A^-$.

Zbiór $A = A^+ \cup A^-$, gdzie A^+ i A^- są pewnymi dopuszczalnymi klasami ciągów skończonych liczb całkowitych dodatnich i ujemnych, odpowiednio, będziemy nazywać *dopuszczalną klasą ciągów skończonych*.

W celu otrzymania dla dowolnie ustalonego potoku homeomorfizmów Brouwera pokrycia płaszczyzny występującego w głównym wyniku tego podrozdziału wykorzystujemy następujący lemat.

Lemat 2.27. ([A2], Lemma 2.1) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ będzie potokiem homeomorfizmów Brouwera. Niech $p \in \mathbb{R}^2$. Wówczas istnieje co najwyżej przeliczalna rodzina maksymalnych obszarów prostowalnych $\{U_j : j \in J\}$, gdzie J jest zbiorem liczb całkowitych dodatnich lub $J = \{1, \ldots, N\}$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej N taka, że $p \in U_1$ i dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zbiór $\operatorname{cl} B(p, n)$, gdzie $B(p, n)$ jest kołem otwartym o środku w p i promieniu n, jest pokryta przez skończoną podrodzinę $\{U_1, \ldots, U_{j_n}\}$ rodziny $\{U_j : j \in J\}$. Ponadto $j_n \leq j_{n+1}$ dla każdego n.*

Przedstawimy teraz główny wynik opisujący postać potoków homeomorfizmów Brouwera. Wynik ten mówi, że dla każdego takiego potoku możemy dobrać pokrycie płaszczyzny złożone z maksymalnych obszarów prostowalnych indeksowane w użyteczny sposób przez odpowiednio dobraną co najwyżej przeliczalną dopuszczalną klasę ciągów skończonych.

Twierdzenie 2.28. ([A2], Theorem 2.2) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ będzie potokiem homeomorfizmów Brouwera. Wówczas istnieje co najwyżej przeliczalna dopuszczalna klasa ciągów skończonych $A = A^+ \cup A^-$ oraz rodzina trajektorii $\{C_\alpha : \alpha \in A\}$ i rodzina maksymalnych obszarów prostowalnych $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ takie, że $U_1 = U_{-1}$, $C_1 = C_{-1}$ oraz*

$$C_\alpha \subset U_\alpha, \quad \alpha \in A, \tag{2.4}$$

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \mathbb{R}^2, \tag{2.5}$$

$$U_\alpha \cap U_{\alpha\widehat{\ }i} \neq \emptyset, \quad \alpha\widehat{\ }i \in A, \tag{2.6}$$

$$C_{\alpha\widehat{\ }i} \subset \operatorname{bd} U_\alpha, \quad \alpha\widehat{\ }i \in A, \tag{2.7}$$

$$|C_\alpha, C_{\alpha\widehat{\ }i_1}, C_{\alpha\widehat{\ }i_2}|, \quad \alpha\widehat{\ }i_1, \alpha\widehat{\ }i_2 \in A, \quad i_1 \neq i_2, \tag{2.8}$$

$$C_\alpha | C_{\alpha\widehat{\ }i} | C_{\alpha\widehat{\ }i\widehat{\ }j}, \quad \alpha\widehat{\ }i\widehat{\ }j \in A. \tag{2.9}$$

Konstrukcja rodzin wystepujących w Twierdzeniu 2.28 rozpoczyna się od trajektorii C_1 dowolnie wybranego punktu $p \in \mathbb{R}^2$ i maksymalnego obszaru prostowalnego U_1 występującego w Lemacie 2.27. Bierzemy następnie $C_{-1} := C_1$ oraz $U_{-1} := U_1$. W przypadku, gdy potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ nie jest sprzężony z potokiem translacji, punkt p można wybrać tak, aby $p \in J(\mathbb{R}^2)$.

Mając skonstruowany ciąg $\alpha \in A$ oraz odpowiadające mu C_α, U_α, w przypadku, gdy $\operatorname{bd} U_\alpha \cap H_\alpha \neq \emptyset$ indeksujemy bijektywnie zbiór wszystkich trajektorii zawartych w

$$\operatorname{bd} U_\alpha \cap H_\alpha$$

ciągami postaci $\alpha\widehat{\ }k$ zaczynając od $k = 1$ i biorąc kolejne liczby całkowite dodatnie k, jeśli $\alpha \in A^+$, oraz zaczynając od $k = -1$ i biorąc kolejne liczby całkowite ujemne k, gdy $\alpha \in A^-$, gdzie H_1, H_{-1} są składowymi zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_1$, natomiast dla $\alpha = \beta\widehat{\ }l \in A$ zbiór H_α jest składową $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha$, która nie ma punktów wspólnych z U_β. W przypadku, gdy $\operatorname{bd} U_\alpha \cap H_\alpha = \emptyset$ ciąg $\alpha \in A$ będzie liściem drzewa A^+ lub A^-.

Następnie rozszerzamy A o wszystkie tak dobrane ciągi $\alpha\widehat{\ }k$ i dla każdego z tych ciągów $\alpha\widehat{\ }k$ oznaczamy przez $C_{\alpha\widehat{\ }k}$ trajektorię indeksowaną przez $\alpha\widehat{\ }k$ i bierzemy jako $U_{\alpha\widehat{\ }k}$ element podrodziny $\{U_j : j = 1, \dots, j_{m_{\alpha\widehat{\ }k}}\}$ rodziny występującej w Lemacie 2.27 zawierający $C_{\alpha\widehat{\ }k}$, gdzie $m_{\alpha\widehat{\ }k}$ jest najmniejszą liczbą całkowitą, która jest większa lub równa odległości trajektorii $C_{\alpha\widehat{\ }k}$ od punktu p. Lemat 2.27 gwarantuje, że skonstruowana rodzina maksymalnych obszarów prostowalnych spełnia warunek (2.5).

Dla rodziny $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ maksymalnych obszarów prostowalnych występującej w Twierdzeniu 2.28 rozważamy homeomorfizmy prostujące $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^2$ takie, że $\varphi_\alpha(C_\alpha) = \mathbb{R} \times \{0\}$ oraz

$$\varphi_\alpha(N_\alpha) = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \quad \text{dla } \alpha \in A^+,$$

$$\varphi_\alpha(N_\alpha) = \mathbb{R} \times (-\infty, 0) \quad \text{dla } \alpha \in A^-,$$

gdzie $N_\alpha := U_\alpha \cap H_\alpha$. Każdy z tych homeomorfizmów przekształca trajektorie zawarte w U_α na proste poziome. Homeomorfizmy prostujące będziemy nazywać też *mapami*.

Związki pomiędzy homeomorfizmami prostującymi określonymi na częściach wspólnych maksymalnych obszarów prostowalnych skonstruowanych metodą przedstawioną powyżej opisane są w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 2.29. ([A2], Proposition 3.1) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ będzie potokiem homeomorfizmów Brouwera, a $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ rodziną maksymalnych obszarów prostowalnych występującą w Twierdzeniu 2.28. Wówczas istnieje taka rodzina homeomorfizmów prostujących $\{\varphi_\alpha : \alpha \in A^+\}$, gdzie $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^2$, że dla każdego $\alpha\widehat{\ }i \in A^+$*

$$\varphi_{\alpha\widehat{\ }i}(U_\alpha \cap U_{\alpha\widehat{\ }i}) = \mathbb{R} \times (c_{\alpha\widehat{\ }i}, 0),$$

$$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_{\alpha\widehat{\ }i}) = \mathbb{R} \times (c^\alpha_{\alpha\widehat{\ }i}, d^\alpha_{\alpha\widehat{\ }i}),$$

gdzie $c^\alpha_{\alpha\widehat{\ }i} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $d^\alpha_{\alpha\widehat{\ }i} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $c_{\alpha\widehat{\ }i} \in [-\infty, 0)$ są stałymi takimi, że $c^\alpha_{\alpha\widehat{\ }i} < d^\alpha_{\alpha\widehat{\ }i}$ oraz co najmniej jedna ze stałych $c^\alpha_{\alpha\widehat{\ }i}$, $d^\alpha_{\alpha\widehat{\ }i}$ jest skończona. Ponadto, istnieje funkcja ciągła $\mu_{\alpha\widehat{\ }i} : (c^\alpha_{\alpha\widehat{\ }i}, d^\alpha_{\alpha\widehat{\ }i}) \to \mathbb{R}$ i homeomorfizm $\nu_{\alpha\widehat{\ }i} : (c^\alpha_{\alpha\widehat{\ }i}, d^\alpha_{\alpha\widehat{\ }i}) \to (c_{\alpha\widehat{\ }i}, 0)$ takie, że homeomorfizm

$$h_{\alpha\widehat{\ }i} : \mathbb{R} \times (c^\alpha_{\alpha\widehat{\ }i}, d^\alpha_{\alpha\widehat{\ }i}) \to \mathbb{R} \times (c_{\alpha\widehat{\ }i}, 0)$$

określony wzorem

$$h_{\alpha\widehat{\ }i} := \varphi_{\alpha\widehat{\ }i} \circ (\varphi_{\alpha|_{U_\alpha \cap U_{\alpha\widehat{\ }i}}})^{-1} \tag{2.10}$$

ma postać

$$h_{\alpha\widehat{\ }i}(t, s) = (\mu_{\alpha\widehat{\ }i}(s) + t, \nu_{\alpha\widehat{\ }i}(s)), \quad t \in \mathbb{R}, s \in (c^\alpha_{\alpha\widehat{\ }i}, d^\alpha_{\alpha\widehat{\ }i}). \tag{2.11}$$

Podobnie, istnieje taka rodzina homeomorfizmów prostujących $\{\varphi_\alpha : \alpha \in A^-\}$, gdzie $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^2$, oraz $\varphi_{-1} = \varphi_1$, że dla każdego $\alpha\widehat{\ }i \in A^-$

$$\varphi_{\alpha\widehat{\ }i}(U_\alpha \cap U_{\alpha\widehat{\ }i}) = \mathbb{R} \times (0, c_{\alpha\widehat{\ }i}),$$

$$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_{\alpha^\frown i}) = \mathbb{R} \times (c^\alpha_{\alpha^\frown i}, d^\alpha_{\alpha^\frown i}),$$

gdzie $c^\alpha_{\alpha^\frown i} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $d^\alpha_{\alpha^\frown i} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $c_{\alpha^\frown i} \in (0, +\infty)$ *są stałymi takimi, że* $c^\alpha_{\alpha^\frown i} < d^\alpha_{\alpha^\frown i}$ *oraz co najmniej jedna ze stałych* $c^\alpha_{\alpha^\frown i}$, $d^\alpha_{\alpha^\frown i}$ *jest skończona. Ponadto, istnieje funkcja ciągła* $\mu_{\alpha^\frown i} : (c^\alpha_{\alpha^\frown i}, d^\alpha_{\alpha^\frown i}) \to \mathbb{R}$ *i homeomorfizm* $\nu_{\alpha^\frown i} : (c^\alpha_{\alpha^\frown i}, d^\alpha_{\alpha^\frown i}) \to (0, c_{\alpha^\frown i})$ *takie, że homeomorfizm*

$$h_{\alpha^\frown i} : \mathbb{R} \times (c^\alpha_{\alpha^\frown i}, d^\alpha_{\alpha^\frown i}) \to \mathbb{R} \times (0, c_{\alpha^\frown i})$$

określony wzorem (2.10) ma postać (2.11).

Postać homeomorfizmu $h_{\alpha^\frown i}$ występującego w Twierdzeniu 2.29 otrzymujemy rozwiązując równanie funkcyjne

$$h_{\alpha^\frown i}(t_1 + t_2, s) = h_{\alpha^\frown i}(t_1, s) + (t_2, 0), \qquad t_1, t_2, s \in \mathbb{R}.$$

Przybliżymy teraz własności homeomorfizmu $\nu_{\alpha^\frown i}$ występującego w Twierdzeniu 2.29. Zgodnie z określeniem homeomorfizmu prostującego $\varphi_{\alpha^\frown i}$, dla każdego $\alpha^\frown i \in A$ trajektoria $C_{\alpha^\frown i}$ odpowiada wartości 0 parametru s w układzie współrzędnych wyznaczonym przez ten homeomorfizm, ponieważ w mapie $\varphi_{\alpha^\frown i}$ druga współrzędna każdego punktu należącego do $C_{\alpha^\frown i}$ jest równa 0, tj. $\varphi_{\alpha^\frown i}(C_{\alpha^\frown i}) = \mathbb{R} \times \{0\}$.

Pokażemy poniżej, że homeomorfizm $\nu_{\alpha^\frown i}$ można rozszerzyć poprzez przypisanie wartości 0 jednemu z końców przedziału $(c^\alpha_{\alpha^\frown i}, d^\alpha_{\alpha^\frown i})$ będącego dziedziną tego homeomorfizmu. W celu uproszczenia zapisu ograniczymy się do dopuszczalnej klasy ciągów skończonych A^+ (dla klasy A^- sytuacja jest analogiczna). Wybór odpowiedniego końca tego przedziału zależy od tego czy homeomorfizm $\nu_{\alpha^\frown i}$ jest rosnący, czy malejący. Wówczas przy założeniu, że takie rozszerzenie istnieje mamy $\nu_{\alpha^\frown i}(c^\alpha_{\alpha^\frown i}) = 0$, jeśli homeomorfizm $\nu_{\alpha^\frown i}$ jest malejący, oraz $\nu_{\alpha^\frown i}(d^\alpha_{\alpha^\frown i}) = 0$, jeśli $\nu_{\alpha^\frown i}$ jest rosnący.

W celu zdefiniowania poszukiwanego rozszerzenia musimy najpierw znaleźć trajektorię zawartą w obszarze U_α, która będzie odpowiadać poprzez mapę φ_α wartości $\nu^{-1}_{\alpha^\frown i}(0)$, tj. trajektorię $\varphi^{-1}_\alpha(\mathbb{R} \times \{\nu^{-1}_{\alpha^\frown i}(0)\})$. Na mocy Wniosku 2.24 zbiór $U_\alpha \cap \mathrm{J}(C_{\alpha^\frown i})$ składa się z jednej trajektorii, którą oznaczamy przez $C^\alpha_{\alpha^\frown i}$. Jeden z końców przedziału $(c^\alpha_{\alpha^\frown i}, d^\alpha_{\alpha^\frown i})$ jest wartością parametru s w układzie współrzędnych wyznaczonym przez homeomorfizm φ_α odpowiadającą trajektorii $C^\alpha_{\alpha^\frown i}$. Dokładniej, trajektoria $C^\alpha_{\alpha^\frown i}$ odpowiada wartości $c^\alpha_{\alpha^\frown i}$ w przypadku, gdy homeomorfizm $\nu_{\alpha^\frown i}$ jest malejący, a wartości $d^\alpha_{\alpha^\frown i}$ w przypadku, gdy $\nu_{\alpha^\frown i}$ jest rosnący.

Wynik zamieszczony poniżej pokazuje, że wybór końca przedziału $(c^\alpha_{\alpha^\frown i}, d^\alpha_{\alpha^\frown i})$, na który rozszerzymy homeomorfizm $\nu_{\alpha^\frown i}$ zależy od tego jak trajektoria $C^\alpha_{\alpha^\frown i}$ jest położona względem trajektorii C_α i $C_{\alpha^\frown i}$, gdyż wzajemne położenie tych trajektorii wyznacza czy homeomorfizm $\nu_{\alpha^\frown i}$ jest rosnący, czy malejący.

Lemat 2.30. ([A2], Remark 3.2) *Niech* $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ *będzie potokiem homeomorfizmów Brouwera, a* $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ *rodziną maksymalnych obszarów prostowalnych występującą w Twierdzeniu 2.28. Załóżmy, że* $\alpha^\frown i \in A^+$. *Jeśli* $C_\alpha | C^\alpha_{\alpha^\frown i} | C_{\alpha^\frown i}$

lub $C_\alpha = C^\alpha_{\widehat{\alpha i}}$, to homeomorfizm $\nu_{\widehat{\alpha i}} : (c^\alpha_{\widehat{\alpha i}}, d^\alpha_{\widehat{\alpha i}}) \to (c_{\widehat{\alpha i}}, 0)$ występujący w Twierdzeniu 2.29 jest malejący oraz odpowiednio $c^\alpha_{\widehat{\alpha i}} > 0$ lub $c^\alpha_{\widehat{\alpha i}} = 0$. Natomiast, jeśli $|C_\alpha, C^\alpha_{\widehat{\alpha i}}, C_{\widehat{\alpha i}}|$, to homeomorfizm $\nu_{\widehat{\alpha i}}$ jest rosnący oraz $d^\alpha_{\widehat{\alpha i}} > 0$.

W powyższym wyniku jedna z liczb $c^\alpha_{\widehat{\alpha i}}$, $d^\alpha_{\widehat{\alpha i}}$ jest wartością parametru s odpowiadająca trajektorii $C^\alpha_{\widehat{\alpha i}}$ w układzie współrzędnych wyznaczonym przez homeomorfizm φ_α. Zgodnie z konstrukcją rodziny trajektorii $\{C_\alpha : \alpha \in A^+\}$ opisaną w dowodzie Twierdzenia 2.28, wartość ta nie może być ona ujemna.

Poniżej zamieszczamy wypowiedź wspomnianego wyżej twierdzenia o rozszerzeniu homeomorfizmu $\nu_{\widehat{\alpha i}}$.

Twierdzenie 2.31. ([A6], Proposition 1.6) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ będzie potokiem homeomorfizmów Brouwera, a $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ rodziną maksymalnych obszarów prostowalnych występującą w Twierdzeniu 2.28. Załóżmy, że $\widehat{\alpha i} \in A^+$. Jeśli $C_\alpha | C^\alpha_{\widehat{\alpha i}} | C_{\widehat{\alpha i}}$ lub $C_\alpha = C^\alpha_{\widehat{\alpha i}}$, to $\varphi_\alpha(C^\alpha_{\widehat{\alpha i}}) = \mathbb{R} \times \{c^\alpha_{\widehat{\alpha i}}\}$ i homeomorfizm $\nu_{\widehat{\alpha i}} : (c^\alpha_{\widehat{\alpha i}}, d^\alpha_{\widehat{\alpha i}}) \to (c_{\widehat{\alpha i}}, 0)$ występujący w Twierdzeniu 2.29 można rozszerzyć do homeomorfizmu określonego na $[c^\alpha_{\widehat{\alpha i}}, d^\alpha_{\widehat{\alpha i}})$ kładąc $\nu_{\widehat{\alpha i}}(c^\alpha_{\widehat{\alpha i}}) = 0$. Natomiast, jeśli $|C_\alpha, C^\alpha_{\widehat{\alpha i}}, C_{\widehat{\alpha i}}|$, to $\varphi_\alpha(C^\alpha_{\widehat{\alpha i}}) = \mathbb{R} \times \{d^\alpha_{\widehat{\alpha i}}\}$ i homeomorfizm $\nu_{\widehat{\alpha i}}$ można rozszerzyć do homeomorfizmu określonego na $(c^\alpha_{\widehat{\alpha i}}, d^\alpha_{\widehat{\alpha i}}]$ kładąc $\nu_{\widehat{\alpha i}}(d^\alpha_{\widehat{\alpha i}}) = 0$.*

W celu przedstawienia idei dowodu Twierdzenia 2.31 rozważmy przypadek, gdy homeomorfizm $\nu_{\widehat{\alpha i}}$ jest malejący. Wówczas $\varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{R} \times \{c^\alpha_{\widehat{\alpha i}}\}) = C^\alpha_{\widehat{\alpha i}}$. Wynika to stąd, że $\varphi_{\widehat{\alpha i}}^{-1}(\mathbb{R} \times \{\nu_{\widehat{\alpha i}}(s)\}) = \varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{R} \times \{s\})$ dla $s \in (c^\alpha_{\widehat{\alpha i}}, d^\alpha_{\widehat{\alpha i}})$, tj. $\nu_{\widehat{\alpha i}}(s)$ oraz s odpowiadają tej samej trajektorii zawartej w $U_\alpha \cap U_{\widehat{\alpha i}}$. Stąd dla każdego ciągu $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że $s_n \in (c^\alpha_{\widehat{\alpha i}}, d^\alpha_{\widehat{\alpha i}})$ dla $n \in \mathbb{N}$, zachodzi warunek $\lim_{n\to\infty} s_n = c^\alpha_{\widehat{\alpha i}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} \nu_{\widehat{\alpha i}}(s_n) = 0$, ponieważ $C^\alpha_{\widehat{\alpha i}} \subset \mathrm{J}(C_{\widehat{\alpha i}})$.

Funkcje ciągłe $\mu_{\widehat{\alpha i}}$ występujące w Twierdzeniu 2.29 reprezentują natomiast czas potrzebny na to, aby z punktu o współrzędnych $(0, \nu_{\widehat{\alpha i}}(s))$ w mapie $\varphi_{\widehat{\alpha i}}$ dotrzeć do punktu o współrzędnych $(0, s)$ w mapie φ_α. Innymi słowy, funkcja $\mu_{\widehat{\alpha i}}$ reprezentuje czas potrzebny na to, aby z punktu należącego do ciągłego cięcia $K_{\varphi_{\widehat{\alpha i}}}$ obszaru prostowalnego $U_{\widehat{\alpha i}}$ dotrzeć do punktu należącego do ciągłego cięcia K_{φ_α} obszaru prostowalnego U_α, gdzie $K_{\varphi_{\widehat{\alpha i}}} := \varphi_{\widehat{\alpha i}}^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R})$ oraz $K_{\varphi_\alpha} := \varphi_\alpha^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R})$.

Poniższy wynik dotyczy granicy ciągu $(\mu_{\widehat{\alpha i}}(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dla ciągu $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rozważanego w dowodzie Twierdzenia 2.31.

Twierdzenie 2.32. ([B19], Proposition 8) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ będzie potokiem homeomorfizmów Brouwera, a $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ rodziną maksymalnych obszarów prostowalnych występującą w Twierdzeniu 2.28. Funkcje $\mu_{\widehat{\alpha i}}$ występujące w Twierdzeniu 2.29 spełniają warunek*

$$\lim_{s \to c^\alpha_{\widehat{\alpha i}}} \mu_{\widehat{\alpha i}}(s) = \begin{cases} -\infty & \text{gdy} \quad C_{\widehat{\alpha i}} \subset \mathrm{J}^+_{\{f^t\}}(C^\alpha_{\widehat{\alpha i}}), \\ +\infty & \text{gdy} \quad C_{\widehat{\alpha i}} \subset \mathrm{J}^-_{\{f^t\}}(C_{\widehat{\alpha i}}) \end{cases}$$

w przypadku, gdy $C_\alpha | C^\alpha_{\widehat{\alpha i}} | C_{\widehat{\alpha i}}$ *or* $C_\alpha = C^\alpha_{\widehat{\alpha i}}$ *or the condition*

$$\lim_{s \to d^\alpha_{\widehat{\alpha i}}} \mu_{\widehat{\alpha i}}(s) \;=\; \begin{cases} -\infty & \text{gdy} \quad C_{\widehat{\alpha i}} \subset \mathrm{J}^+_{\{f^t\}}(C^\alpha_{\widehat{\alpha i}}), \\ +\infty & \text{gdy} \quad C_{\widehat{\alpha i}} \subset \mathrm{J}^-_{\{f^t\}}(C_{\widehat{\alpha i}}) \end{cases}$$

w przypadku, gdy $|C_\alpha, C^\alpha_{\widehat{\alpha i}}, C_{\widehat{\alpha i}}|$.

Twierdzenie 2.32 implikuje, że trajektorie $C_{\widehat{\alpha i}}$ oraz $C^\alpha_{\widehat{\alpha i}}$ nie mogą być zawarte w tym samym obszarze prostowalnym, natomiast Twierdzenie 2.31 związane jest z własnością potoku mówiącą, że trajektorie $C_{\widehat{\alpha i}}$ oraz $C^\alpha_{\widehat{\alpha i}}$ nie mają rozłącznych otoczeń strumieniowych.

2.5 Pierwiastki iteracyjne homeomorfizmu Brouwera zanurzalnego w potok

W rozdziale tym rozważamy problem wyznaczenia postaci wszystkich zachowujących orientację pierwiastków iteracyjnych homeomorfizmu Brouwera zanurzalnego w potok, tj. zachowujących orientację rozwiązań homeomorficznych g równania funkcyjnego

$$g^n = f, \tag{2.12}$$

gdzie n jest liczbą naturalną, zaś f jest danym homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$.

Wyznaczanie pierwiastków iteracyjnych danej funkcji jest jednym z ważniejszych zagadnień w teorii iteracji. Główna idea ogólnej metody wyznaczania pierwiastków iteracyjnych pochodzi z prac S. Łojasiewicza [81] i M. Kuczmy [68]. Konstrukcja wszystkich pierwiastków iteracyjnych homeomorfizmu Brouwera sprzężonego z translacją została podana w [B7].

Jeżeli f jest homeomorfizmem płaszczyzny na siebie, g jest odwzorowaniem ciągłym spełniającym równanie (2.12) dla pewnej liczby naturalnej $n > 0$, to g jest również homeomorfizmem płaszczyzny na siebie (zob. [B7], Remark 1). Ponadto, jeśli f nie ma punktów stałych, to g nie ma punktów stałych.

Niech f będzie homeomorfizmem płaszczyzny na siebie zachowującym orientację, a g odwzorowaniem ciągłym spełniającym równanie (2.12) dla pewnej nieparzystej liczby naturalnej n. Wówczas g jest również homeomorfizmem płaszczyzny na siebie zachowującym orientację (zob. [B7], Remark 2). Dla parzystych n równanie (2.12) może mieć również homeomorficzne rozwiązania zmieniające orientację. Przedmiotem naszych rozważań są jednak tylko homeomorfizmy płaszczyzny na siebie zachowujące orientację nie posiadające punktów stałych, czyli rozpatrujemy tylko rozwiązania g równania (2.12) będące homeomorfizmami Brouwera.

Przy wyznaczaniu pierwiastków iteracyjnych homeomorfizmu Brouwera zanurzalnego w potok korzystamy z postaci tego potoku opisanej w Twierdzeniach 2.28 i 2.29. Poniższy lemat umożliwia wykazanie głównego wyniku tego rozdziału.

Lemat 2.33. ([A3], Lemma 4.6) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Niech $\{C_\alpha : \alpha \in A\}$ oraz $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ będą rodzinami trajektorii i maksymalnych obszarów prostowalnych występującymi w Twierdzeniu 2.28, a $\{\varphi_\alpha : \alpha \in A\}$ rodziną homeomorfizmów występującą w Twierdzeniu 2.29. Wówczas dla każdego $\alpha \in A$ i każdego $p \in C_\alpha$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że koło $B(p, \varepsilon)$ o środku p i promieniu ε ma punkty wspólne z dokładnie dwoma elementami rodziny $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$, gdzie $G_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ jeśli $\alpha \in A^+$ oraz $G_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{R} \times (-\infty, 0])$ jeśli $\alpha \in A^-$.*

W dowodzie tego lematu dla każdego $\alpha \in A$ definiujemy rodzinę trajektorii $S_\alpha := \{C_\alpha\} \cup \{C_{\alpha\frown i} : \alpha\frown i \in A\}$. Rodzina ta może być dla pewnych $\alpha \in A$ równa $\{C_\alpha\}$ (sytuacja taka ma miejsce w przypadku, gdy dla obszaru prostowalnego U_α spełnione są założenia Wniosku 2.26). Każda z trajektorii zbioru $\{C_\alpha : \alpha \in A\}$ jest elementem dokładnie dwu rodzin S_α, a mianowicie S_1 i S_{-1} dla $\alpha \in \{1, -1\}$ oraz z S_β i $S_{\beta\frown i}$ dla $\alpha = \beta\frown i$.

Korzystając z Twierdzeń 2.20 i 2.21 otrzymujemy, że dla każdego $\alpha \in A$ zachodzi $|C_{p_1}, C_{p_2}, C_{p_3}|$ dla dowolnych różnych między sobą trajektorii $C_{p_1}, C_{p_2}, C_{p_3}$ należących do S_α. Ustalmy $\alpha \in A$. Jesli rodzina S_α jest skończona, to dla każdego $\alpha\frown i \in A$ i każdego $p \in C_{\alpha\frown i}$ istnieje koło o środku p rozłączne z każdym elementem rodziny S_α różnym od $C_{\alpha\frown i}$, gdyż trajektorie potoku homeomorfizmów Brouwera są zbiorami domkniętymi.

W przypadku, gdy zbiór S_α nie jest skończony, to aby otrzymać tezę lematu możemy jeszcze skorzystać z odpowiedniego twierdzenia z książki A. Becka (zob. [9], Lemma 11.6). Twierdzenie to mówi, że jeśli S jest nieskończoną podrodziną rodziny F wszystkich trajektorii potoku płaszczyzny nie posiadającego punktów stałych taką, że dla rożnych $C_1, C_2, C_3 \in S$ zachodzi warunek $|C_1, C_2, C_3|$, to S jest przeliczalna oraz każdy podzbiór zwarty płaszczyzny ma punkty wspólne jedynie ze skończenie wieloma elementami rodziny S.

Analogiczne twierdzenie można znaleźć w pracy W. Kaplana (zob. [58], Theorem 32). W. Kaplan otrzymuje taką samą tezę jak A. Beck przy założeniu, że F jest rodziną homeomorficznych obrazów prostej domkniętych na płaszczyźnie taką, że dla każdego $p \in \mathbb{R}^2$ istnieje dokładnie jedno $C \in F$ takie, że $p \in C$ oraz istnieje zbiór otwarty U_p zawierający p, który może być przekształcony homeomorficznie na wnętrze kwadratu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$ w taki sposób, że obraz części wspólnej każdego elementu rodziny F ze zbiorem U_p jest równy zbiorowi postaci $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, y = c\}$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ takiego, że $|c| < 1$.

Konstrukcja pierwiastków iteracyjnych homeomorfizmu Brouwera jest przedstawiona w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 2.34. ([A3], Theorem 4.7) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok, n liczbą naturalną dodatnią. Niech $\{C_\alpha : \alpha \in A\}$ oraz $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ będą rodzinami trajektorii i maksymalnych obszarów prostowalnych występującymi w Twierdzeniu 2.28. Dla każdego $\alpha \in A$ niech $\{f_\alpha^t : t \in \mathbb{R}\}$ będzie potokiem na U_α*

takim, że $f^1_\alpha(x) = f(x)$ *dla* $x \in U_\alpha$, $\alpha \in A$. *Załóżmy, że* $f_1^{\frac{1}{n}}(x) = f_{-1}^{\frac{1}{n}}(x)$ *dla każdego* $x \in C_1 = C_{-1}$ *oraz*

$$\lim_{k\to\infty} f_\alpha^{\frac{1}{n}}(x_k) = f_{\widehat{\alpha i}}^{\frac{1}{n}}(x) \tag{2.13}$$

dla każdego $x \in C_{\widehat{\alpha i}}$ *i każdego ciągu* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *elementów obszaru* U_α *takiego, że* $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. *Wówczas funkcja* g *określona warunkiem*

$$g(x) = f_\alpha^{\frac{1}{n}}(x), \quad x \in G_\alpha, \quad \alpha \in A, \tag{2.14}$$

gdzie $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ *jest rodziną występującą w Lemacie 2.33, jest homeomorfizmem Brouwera spełniającym równanie (2.12). Ponadto, każdy homeomorfizm Brouwera* g *spełniający równanie (2.12) może być skonstruowany w ten sposób.*

Zanurzalność homeomorfizmu Brouwera f w potok gwarantuje istnienie rodzin $\{C_\alpha : \alpha \in A\}$ oraz $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ występujących w Twierdzeniu 2.28. Następnie oddzielnie na każdym z obszarów U_α rozważamy dowolny potok zawierający homeomorfizm $f|_{U_\alpha}$. Od potoków tych wymagamy jedynie, aby spełniały warunek (2.13).

Najistotniejszym fragmentem dowodu Twierdzenia 2.34 jest wykazanie, że funkcja g określona wzorem (2.14) jest ciągła. Przy wykazywaniu ciągłości funkcji g korzystamy z założenia, że $\lim_{k\to\infty} f_\alpha^{\frac{1}{n}}(x_k) = f_{\widehat{\alpha i}}^{\frac{1}{n}}(x)$ dla $x_0 \in C_{\widehat{\alpha i}}$ i każdego ciągu $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ elementów obszaru U_α takiego, że $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

Następnie wykorzystujemy wspomniany wyżej fakt, że dla dowolnego homeomorfizmu f płaszczyzny na siebie każde ciągłe rozwiązanie g równania (2.12) jest homeomorfizmem płaszczyzny na siebie. Zachowywanie orientacji przez homeomorfizm g otrzymujemy z faktu, że g zacieśnione do maksymalnego obszaru prostowalnego U_1 jest elementem potoku $\{f_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ określonego na tym obszarze.

2.6 Równoważność topologiczna potoków homeomorfizmów Brouwera

W rozdziale tym przedstawimy wyniki dotyczące topologicznie równoważnych potoków homeomorfizmów Brouwera. Opisywać one będą zależności między zbiorami punktów regularnych i silnie osobliwych, a także między maksymalnymi obszarami prostowalnymi takich potoków.

Rozpocznijmy od wyniku dotyczącego zbiorów punktów regularnych topologicznie równoważnych potoków homeomorfizmów Brouwera.

Twierdzenie 2.35. ([A4], Theorem 4.1) *Niech* $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ *i* $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ *będą równoważnymi topologicznie potokami Brouwera, a* $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *homeomorfizmem realizującym tę równoważność. Wówczas* Φ *odzorowuje zbiór punktów regularnych potoku* $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ *na zbiór punktów regularnych potoku* $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$.

W dowodzie tego twierdzenia wykazujemy, że dla każdej klasy abstrakcji F_0 relacji współzbieżności do nieskończoności potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ istnieje klasa abstrakcji G_0 relacji współzbieżności do nieskończoności potoku $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ taka, że $\Phi(\operatorname{int} F_0) = \operatorname{int} G_0$. Przypomnijmy, że mówiąc o klasie abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności potoku mamy na myśli klasę abstrakcji tej relacji zdefiniowanej dla dowolnego elementu tego potoku nie będącym identycznością. Wówczas na mocy wspomnianego wcześniej Twierdzenia 3.21 mówiącego, że zbiór punktów regularnych jest równy sumie wnętrz klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności oraz faktu, że Φ jest homeomorfizmem płaszczyzny na siebie otrzymujemy tezę powyższego twierdzenia.

W celu pokazania równości $\Phi(\operatorname{int} F_0) = \operatorname{int} G_0$, ustalamy dowolny punkt $p \in \operatorname{int} F_0$. Wówczas istnieją punkty $q_1, q_2 \in \operatorname{int} F_0$ należące do różnych składowych dopełnienia trajektorii C_p potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Korzystając z niezmienniczości klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności oraz z Twierdzeń 2.18 i 2.15 otrzymujemy, że trajektorie $C'_{\Phi(q_1)}$ i $C'_{\Phi(q_2)}$ potoku $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ zawierają się w tej samej klasie abstrakcji, którą oznaczamy przez G_0. Wówczas z Wniosku 2.14 otrzymujemy, że $\Phi(p) \in \operatorname{int} G_0$. W ten sposób wykazujemy, że $\Phi(\operatorname{int} F_0) \subset \operatorname{int} G_0$. Stosując to samo rozumowanie dla Φ^{-1}, dostajemy $\Phi^{-1}(\operatorname{int} G_0) \subset \operatorname{int} F_0$, a zatem mamy $\Phi(\operatorname{int} F_0) = \operatorname{int} G_0$.

Na mocy Twierdzenia 2.35 otrzymujemy, że homeomorfizm realizujący topologiczną równoważność potoków homeomorfizmów Brouwera przekształca zbiór punktów osobliwych na zbiór punktów osobliwych. Własność tę możemy wzmocnić zastepując zbiór punktów osobliwych zbiorem punktów silnie osobliwych. Wynik ten został sformułowany dla pierwszych przedłużeń granicznych, ale na mocy Twierdzenia 3.24 zbiór punktów silnie osobliwych homeomorfizmu Brouwera jest równy pierwszemu przedłużeniu granicznemu potoku zawierającego ten homeomorfizm.

Twierdzenie 2.36. ([A4], Theorem 5.3) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ i $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ będą równoważnymi topologicznie potokami Brouwera, a $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homeomorfizmem realizującym tę równoważność. Wówczas $\Phi(\mathrm{J}_f(\mathbb{R}^2)) = \mathrm{J}_g(\mathbb{R}^2)$, gdzie $\mathrm{J}_f(\mathbb{R}^2)$ oraz $\mathrm{J}_g(\mathbb{R}^2)$ oznaczają odpowiednio pierwsze przedłużenie graniczne potoków $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ and $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$.*

W dowodzie tego twierdzenia ustalamy dowolny punkt $p \in J_f(\mathbb{R}^2)$ i oznaczamy przez H_0 tę składową zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_p$, która nie jest rozłączna z $J_f(p)$ (może się zdarzyć, że każda ze składowych zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_p$ spełnia ten warunek). Następnie ustalamy $q \in J_f(p) \cap H_0$. W celu wykazania, że $\Phi(q) \in J_g(\Phi(p))$ rozważamy dwa przypadki: przypadek, gdy istnieje klasa abstrakcji G_0 relacji współzbieżności do nieskończoności taka, że $p \in \operatorname{bd} G_0$ oraz $G_0 \subset H_0$ oraz przypadek, gdy punkt p nie należy do brzegu żadnej z klas abstrakcji zawartych w H_0. W pierwszym z tych przypadków możemy zastosować bezpośrednio wyniki zamieszczone w [B13] (zob. Twierdzenia 3.19 i 3.20).

W drugim z nich korzystamy dodatkowo z ciągu trajektorii $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zawartych w zbiorze punktów osobliwych o tej własności, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi warunek $C_p|C_{n+1}|C_n$ oraz dla każdego $p_0 \in C_p$ istnieje ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $p_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ oraz $x_n \in C_n$. Następnie dla tego ciągu trajektorii stosujemy rozumowanie przedstawione w [B13]. W rozumowaniu tym główną rolę odgrywa fakt, iż jeśli $q \in \mathrm{J}_f(p)$, to trajektorie C_p i C_q nie posiadają rozłącznych otoczeń strumieniowych, tj. otoczeń będących sumami trajektorii.

Rozumowanie, którego szkic przedstawiliśmy powyżej prowadzi bezpośrednio do następującego wyniku, który można traktować jako uszczegółowienie Twierdzenia 2.36.

Twierdzenie 2.37. ([A6], Proposition 2.3) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ i $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ będą równoważnymi topologicznie potokami Brouwera, a $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homeomorfizmem realizującym tę równoważność. Wówczas, jeśli $q \in \mathrm{J}_f(p)$, to $\Phi(q) \in \mathrm{J}_g(\Phi(p))$ dla dowolnych $p, q \in \mathbb{R}^2$, gdzie $\mathrm{J}_f(\mathbb{R}^2)$ and $\mathrm{J}_g(\mathbb{R}^2)$ oznaczają odpowiednio pierwsze przedłużenie graniczne potoków $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ and $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$.*

Przejdziemy teraz do omówienia własności dotyczących maksymalnych obszarów prostowalnych topologicznie równoważnych potoków homeomorfizmów Brouwera.

Twierdzenie 2.38. ([A6], Proposition 2.1) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ i $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ będą równoważnymi topologicznie potokami Brouwera, a $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homeomorfizmem realizującym tę równoważność. Wówczas, jeśli U jest maksymalnym obszarem prostowalnym potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$, to $\Phi(U)$ jest maksymalnym obszarem prostowalnym potoku $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$.*

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystujemy fakt, że homeomorfizm realizujący topologiczną równoważność potoków homeomorfizmów Brouwera przekształca ciągłe cięcia obszaru prostowalnego U potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ na ciągłe cięcia obszaru $\Phi(U)$. Stąd wnioskujemy, że $\Phi(U)$ jest obszarem prostowalnym potoku $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$. Przypuszczenie, że $\Phi(U)$ nie jest maksymalnym obszarem prostowalnym potoku $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ prowadzi do sprzeczności z założeniem, że U jest maksymalnym obszarem prostowalnym potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$.

Kolejny wynik prezentowany w tym rozdziale mówi, że dla równoważnych topologicznie potoków homeomorfizmów Brouwera można wybrać tę samą dopuszczalną klasę ciągów skończonych dla rodzin maksymalnych obszarów prostowalnych opisanych w Twierdzeniu 2.28.

Twierdzenie 2.39. ([A6], Theorem 2.4) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ i $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ będą równoważnymi topologicznie potokami homeomorfizmów Brouwera, a $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homeomorfizmem realizującym tę równoważność. Niech $\{C_{f,\alpha} : \alpha \in A\}$ będzie rodziną trajektorii, a $\{U_{f,\alpha} : \alpha \in A\}$ rodziną maksymalnych obszarów prostowalnych potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$, dla których zachodzą warunki (2.4) - (2.9) oraz $U_{f,1} = U_{f,-1}$, $C_{f,1} = C_{f,-1}$, gdzie $A = A^+ \cup A^-$ jest dopuszczalną klasą ciągów skończonych. Niech $C_{g,\alpha} := \Phi(C_{f,\alpha})$ oraz $U_{g,\alpha} := \Phi(U_{f,\alpha})$ dla $\alpha \in A$. Wówczas $\{C_{g,\alpha} : \alpha \in A\}$ jest rodziną* *trajektorii oraz $\{U_{g,\alpha} : \alpha \in A\}$ rodziną maksymalnych obszarów prostowalnych potoku $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ dla których zachodzą warunki (2.4) - (2.9). Ponadto,*

$$\Phi(C^{\alpha}_{f,\alpha\widehat{\ }i}) = C^{\alpha}_{g,\alpha\widehat{\ }i}, \quad \alpha\widehat{\ }i \in A, \tag{2.15}$$

gdzie $C^{\alpha}_{f,\alpha\widehat{\ }i}$ oraz $C^{\alpha}_{g,\alpha\widehat{\ }i}$ są jednoznacznie wyznaczonymi trajektoriami zawartymi odpowiednio w $\mathrm{J}_f(C_{f,\alpha\widehat{\ }i}) \cap U_{f,\alpha}$ oraz $\mathrm{J}_g(C_{g,\alpha\widehat{\ }i}) \cap U_{g,\alpha}$.

W celu pokazania, że każdy ze zbiorów $\{U_{g,\alpha} : \alpha \in A\}$ jest maksymalnym obszarem prostowalnym potoku $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ korzystamy z Twierdzenia 2.38. Natomiast fakt, że każdy ze zbiorów $\{C_{g,\alpha} : \alpha \in A\}$ jest trajektorią potoku $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ zawartą w $\mathrm{J}_g(\mathbb{R}^2)$ otrzymujemy z Twierdzenia 2.36. Następnie wykazujemy warunek (2.15) korzystając z Twierdzenia 2.37 i Wniosku 2.24.

2.7 Sprzężenie topologiczne potoków homeomorfizmów Brouwera

W rozdziale tym przedstawimy wyniki opisujące warunki na to, aby potoki homeomorfizmów Brouwera były sprzężone topologicznie. Ogólna postać takiego potoku została zaprezentowana w Twierdzeniu 2.28.

S. Andrea ([5], Theorem 4.1) udowodnił twierdzenie mówiące, że homeomorfizm Brouwera jest sprzężony topologicznie z translacją wtedy i tylko wtedy, gdy posiada dokładnie jedną klasę abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności. Wówczas wszystkie potoki zawierające taki homeomorfizm są ze sobą sprzężone topologicznie (por. Twierdzenie 3.11). W szczególności są one sprzężone z potokiem translacji. Prezentowane tutaj twierdzenia dotyczą potoków homeomorfizmów Brouwera, które nie są sprzężone topologicznie z potokiem translacji.

Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ będzie potokiem homeomorfizmów Brouwera. Na mocy Twierdzenia 2.28, istnieje dopuszczalna rodzina ciągów skończonych A, rodzina trajektorii $\{C_{f,\alpha} : \alpha \in A\}$ oraz rodzina maksymalnych obszarów prostowalnych $\{U_{f,\alpha} : \alpha \in A\}$, dla których zachodzą warunki (2.4) - (2.9). Korzystając z Twierdzenia 2.29 otrzymujemy że dla każdego z obszarów $U_{f,\alpha}$ istnieje homeomorfizm prostujący przekształcający trajektorie potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ na proste poziome w układzie współrzędnych, w którym współrzędne punktu oznaczamy przez t oraz s.

Korzystając z tych rodzin podamy warunek, który gwarantuje istnienie homeomorfizmu realizującego sprzężenie topologiczne potoków homeomorfizmów Brouwera $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$, $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ oraz przedstawimy konstrukcję tego homeomorfizmu. Głównym krokiem tej konstrukcji będzie przedłużenie konstruowanego homeomorfizmu Ψ z obszaru prostowalnego $U_{f,\alpha}$ na trajektorie $C_{f,\alpha\widehat{\ }i}$ dla $\alpha\widehat{\ }i \in A$. Korzystamy tutaj z Lematu 2.33 mówiącego, że dowolny punkt $p \in C_{f,\alpha\widehat{\ }i}$ posiada otoczenie zawarte w $U_{f,\alpha} \cup U_{f,\alpha\widehat{\ }i}$.

Dla każdego $\alpha^\frown i \in A$ oznaczmy przez $C^\alpha_{f,\alpha^\frown i}$ jednoznacznie wyznaczoną trajektorię zawartą w $U_{f,\alpha} \cap \mathrm{J}(C_{f,\alpha^\frown i})$ (por. Twierdzenie 2.24). Zgodnie z określeniem homeomorfizmu prostującego $\varphi_{f,\alpha^\frown i}$, trajektoria $C_{f,\alpha^\frown i}$ odpowiada wartości parametru $s = 0$ w układzie współrzędnych wyznaczonym przez ten homeomorfizm.

Twierdzenie 2.31 mówi, że trajektoria $C^\alpha_{f,\alpha^\frown i}$ odpowiada jednej z wartości $c^\alpha_{f,\alpha^\frown i}$, $d^\alpha_{f,\alpha^\frown i}$ w układzie współrzędnych wyznaczonym przez homeomorfizm prostujący $\varphi_{f,\alpha}$ w zależności od położenia tej trajektorii względem trajektorii $C_{f,\alpha}$ i $C_{f,\alpha^\frown i}$, gdzie $c^\alpha_{f,\alpha^\frown i}$, $d^\alpha_{f,\alpha^\frown i}$ są stałymi występującymi w Twierdzeniu 2.29.

Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ oraz $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ będą równoważnymi topologicznie potokami homeomorfizmów Brouwera, a $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homeomorfizmem realizującym tę równoważność. Niech A będzie dopuszczalną rodziną ciągów skończonych, $\{C_{f,\alpha} : \alpha \in A\}$ rodziną trajektorii, a $\{U_{f,\alpha} : \alpha \in A\}$ rodziną maksymalnych obszarów prostowalnych potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$, które istnieją na mocy Twierdzenia 2.28. Niech $\{\varphi_{f,\alpha} : \alpha \in A\}$, gdzie $\varphi_{f,\alpha} : U_{f,\alpha} \to \mathbb{R}^2$ rodziną homeomorfizmów prostujących występującą w Twierdzeniu 2.29.

Przy pomocy homeomorfizmu Φ realizującego topologiczną równoważność potoków możemy wyznaczyć odpowiednie rodziny $\{C_{g,\alpha} : \alpha \in A\}$ i $\{U_{g,\alpha} : \alpha \in A\}$ dla potoku $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$. W tym celu połóżmy $C_{g,\alpha} := \Phi(C_{f,\alpha})$ oraz $U_{g,\alpha} := \Phi(U_{f,\alpha})$ dla $\alpha \in A$. Wówczas na mocy Twierdzenia 2.39, $\{C_{g,\alpha} : \alpha \in A\}$ jest rodziną trajektorii, a $\{U_{g,\alpha} : \alpha \in A\}$ rodziną maksymalnych obszarów prostowalnych potoku $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$, dla których zachodzą warunki (2.4) - (2.9). Niech $\{\varphi_{g,\alpha} : \alpha \in A\}$, gdzie $\varphi_{g,\alpha} : U_{g,\alpha} \to \mathbb{R}^2$ jest rodziną homeomorfizmów prostujących opisaną w Twierdzeniu 2.29.

Dla $\alpha^\frown i \in A^+$ niech

$$b^\alpha_{f,\alpha^\frown i} := \begin{cases} c^\alpha_{f,\alpha^\frown i}, & \text{gdy } C_{f,\alpha}|C^\alpha_{f,\alpha^\frown i}|C_{f,\alpha^\frown i} \text{ lub } C_{f,\alpha} = C^\alpha_{f,\alpha^\frown i}, \\ d^\alpha_{f,\alpha^\frown i}, & \text{gdy } |C_{f,\alpha}, C^\alpha_{f,\alpha^\frown i}, C_{f,\alpha^\frown i}|. \end{cases} \tag{2.16}$$

Wówczas

$$\varphi_{f,\alpha}(C^\alpha_{f,\alpha^\frown i}) = \mathbb{R} \times \{b^\alpha_{f,\alpha^\frown i}\}.$$

Podobnie niech

$$b^\alpha_{g,\alpha^\frown i} := \begin{cases} c^\alpha_{g,\alpha^\frown i}, & \text{gdy } C_{g,\alpha}|C^\alpha_{g,\alpha^\frown i}|C_{g,\alpha^\frown i} \text{ lub } C_{g,\alpha} = C^\alpha_{g,\alpha^\frown i}, \\ d^\alpha_{g,\alpha^\frown i}, & \text{gdy } |C_{g,\alpha}, C^\alpha_{g,\alpha^\frown i}, C_{g,\alpha^\frown i}|. \end{cases} \tag{2.17}$$

Wtedy

$$\varphi_{g,\alpha}(C^\alpha_{g,\alpha^\frown i}) = \mathbb{R} \times \{b^\alpha_{g,\alpha^\frown i}\}.$$

Stąd

$$(\varphi_{g,\alpha} \circ \Phi \circ \varphi^{-1}_{f,\alpha})(\mathbb{R} \times \{b^\alpha_{f,\alpha^\frown i}\}) = \mathbb{R} \times \{b^\alpha_{g,\alpha^\frown i}\},$$

gdyż z Twierdzenia 2.39 otrzymujemy, że $\Phi(C^\alpha_{f,\alpha^\frown i}) = C^\alpha_{g,\alpha^\frown i}$.

Dla klasy A^- sytuacja jest analogiczna. Jedyna różnica tkwi w definicji stałych $b^\alpha_{f,\alpha\frown i}$ oraz $b^\alpha_{g,\alpha\frown i}$. W tym przypadku kładziemy

$$b^\alpha_{f,\alpha\frown i} := \begin{cases} d^\alpha_{f,\alpha\frown i}, & \text{gdy } C_{f,\alpha}|C^\alpha_{f,\alpha\frown i}|C_{f,\alpha\frown i} \text{ lub } C_{f,\alpha} = C^\alpha_{f,\alpha\frown i}, \\ c^\alpha_{f,\alpha\frown i}, & \text{gdy } |C_{f,\alpha}, C^\alpha_{f,\alpha\frown i}, C_{f,\alpha\frown i}|. \end{cases} \tag{2.18}$$

oraz

$$b^\alpha_{g,\alpha\frown i} := \begin{cases} d^\alpha_{g,\alpha\frown i}, & \text{gdy } C_{g,\alpha}|C^\alpha_{g,\alpha\frown i}|C_{g,\alpha\frown i} \text{ lub } C_{g,\alpha} = C^\alpha_{g,\alpha\frown i}, \\ c^\alpha_{g,\alpha\frown i}, & \text{gdy } |C_{g,\alpha}, C^\alpha_{g,\alpha\frown i}, C_{g,\alpha\frown i}|. \end{cases} \tag{2.19}$$

Zatem dla topologicznie równoważnych potoków Brouwera $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ oraz $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ mamy

$$b^\alpha_{f,\alpha\frown i} = c^\alpha_{f,\alpha\frown i} \quad \Leftrightarrow \quad b^\alpha_{g,\alpha\frown i} = c^\alpha_{g,\alpha\frown i}, \tag{2.20}$$

ponieważ każdy homeomorfizm zachowuje zdefiniowane wyżej relacje trójargumentowe między liniami. Ponadto,

$$b^\alpha_{f,\alpha\frown i} < b^\alpha_{f,\alpha\frown j} \quad \Leftrightarrow \quad b^\alpha_{g,\alpha\frown i} < b^\alpha_{g,\alpha\frown j} \tag{2.21}$$

dla $\alpha\frown i, \alpha\frown j \in A$, $i \neq j$, gdyż dla każdego $\alpha \in A$ homeomorfizm $\varphi_{g,\alpha} \circ \Phi \circ \varphi^{-1}_{f,\alpha}$ jest silnie rosnący ze względu na drugą zmienną.

Przedstawimy teraz główny wynik dotyczący zagadnienia sprzężenia topologicznego potoków homeomorfizmów Brouwera.

Twierdzenie 2.40. ([A6], Theorem 3.2) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ oraz $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ będą równoważnymi topologicznie potokami homeomorfizmów Brouwera. Załóżmy, że dla każdego $\alpha\frown i \in A$ istnieje funkcja ciągła $\gamma_{\alpha\frown i} : I^\alpha_{f,\alpha\frown i} \to \mathbb{R}$ i homeomorfizm rosnący $\beta_{\alpha\frown i} : I^\alpha_{f,\alpha\frown i} \to I^\alpha_{g,\alpha\frown i}$ takie, że*

$$\mu_{f,\alpha\frown i}(s) = (\mu_{g,\alpha\frown i} \circ \beta_{\alpha\frown i})(s) + \gamma_{\alpha\frown i}(s), \qquad s \in I^\alpha_{f,\alpha\frown i}, \tag{2.22}$$

oraz $\lim_{s \to b^\alpha_{f,\alpha\frown i}} \beta_{\alpha\frown i}(s) = b^\alpha_{g,\alpha\frown i}$, $\lim_{s \to b^\alpha_{f,\alpha\frown i}} \gamma_{\alpha\frown i}(s) = a^\alpha_{g,\alpha\frown i}$ dla pewnych $a^\alpha_{g,\alpha\frown i} \in \mathbb{R}$, gdzie $\mu_{f,\alpha\frown i}$, $\mu_{g,\alpha\frown i}$ są funkcjami ciągłymi, zaś $c^\alpha_{f,\alpha\frown i}$, $d^\alpha_{f,\alpha\frown i}$, $c^\alpha_{g,\alpha\frown i}$, $d^\alpha_{g,\alpha\frown i}$ stałymi określonymi w Twierdzeniu 2.29, natomiast $I^\alpha_{f,\alpha\frown i} := (c^\alpha_{f,\alpha\frown i}, c^\alpha_{f,\alpha\frown i} + \varepsilon^\alpha_{f,\alpha\frown i})$, $I^\alpha_{g,\alpha\frown i} := (c^\alpha_{g,\alpha\frown i}, c^\alpha_{g,\alpha\frown i} + \varepsilon^\alpha_{f,\alpha\frown i})$ w przypadku, gdy $b^\alpha_{g,\alpha\frown i} = c^\alpha_{g,\alpha\frown i}$ lub $I^\alpha_{f,\alpha\frown i} := (d^\alpha_{f,\alpha\frown i} - \varepsilon^\alpha_{f,\alpha\frown i}, d^\alpha_{f,\alpha\frown i})$, $I^\alpha_{g,\alpha\frown i} := (d^\alpha_{g,\alpha\frown i} - \varepsilon^\alpha_{g,\alpha\frown i}, d^\alpha_{g,\alpha\frown i})$ w przypadku, gdy $b^\alpha_{g,\alpha\frown i} = d^\alpha_{g,\alpha\frown i}$ dla pewnych $\varepsilon^\alpha_{f,\alpha\frown i} > 0$ oraz $\varepsilon^\alpha_{g,\alpha\frown i} > 0$, gdzie $b^\alpha_{f,\alpha\frown i}$ oraz $b^\alpha_{g,\alpha\frown i}$ są zdefiniowane warunkami (2.16) oraz (2.17) lub (2.18) oraz (2.19), odpowiednio. Ponadto załóżmy, że dla dowolnych $\alpha\frown i, \alpha\frown j \in A$, $i \neq j$, jeśli $C^\alpha_{f,\alpha\frown i} = C^\alpha_{f,\alpha\frown j}$ oraz $C_{f,\alpha\frown i}$, $C_{f,\alpha\frown j}$ są zawarte w tej samej składowej zbioru $\mathbb{R} \setminus C^\alpha_{f,\alpha\frown i}$, to zachodzi warunek $\beta_{\alpha\frown i} = \beta_{\alpha\frown j}$. Wówczas potoki $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ oraz $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ są sprzężone topologicznie.

Konstrukcję homeomorfizmu realizującego sprzężenie topologiczne potoków $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$, $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ przeprowadzamy indukcyjnie. Na mocy Twierdzenia 2.39 dla obu potoków możemy wziąć tę samą dopuszczalną rodzinę ciągów skończonych, gdyż potoki te są równoważne topologicznie. Dla każdej liczby naturalnej n definiujemy $A_n^+ := \{\alpha \in A^+ : |\alpha| = n\}$ oraz $A_n^- := \{\alpha \in A^- : |\alpha| = n\}$, gdzie $|\alpha|$ oznacza długość ciągu α. Z definicji dopuszczalnej rodziny ciągów skończonych otrzymujemy, że jeśli $A_n^+ = \emptyset$ dla pewnego n, to $A_m^+ = \emptyset$ dla wszystkich $m > n$. Podobnie, jeśli $A_n^- = \emptyset$ dla pewnego n, to $A_m^- = \emptyset$ dla wszystkich $m > n$.

Z określenia homeomorfizmów prostujących wynika, że $C_{f,\alpha} = \varphi_{f,\alpha}^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\})$ oraz $C_{g,\alpha} = \varphi_{g,\alpha}^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\})$. Dla każdego $\alpha \in A$ położmy $G_{f,\alpha} := \varphi_{f,\alpha}^{-1}(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ jeśli $\alpha \in A^+$ oraz $G_{f,\alpha} := \varphi_{f,\alpha}^{-1}(\mathbb{R} \times (-\infty, 0])$ jeśli $\alpha \in A^-$. Oznaczmy przez $H_{f,\alpha}$ składową zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_{f,\alpha}$ zawierającą $G_{f,\alpha} \setminus C_{f,\alpha}$. Stąd $C_{f,\alpha\frown i} \subset H_{f,\alpha}$ dla każdego $\alpha\frown i \in A$. Podobnie, niech $G_{g,\alpha} := \varphi_{g,\alpha}^{-1}(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ jeśli $\alpha \in A^+$ oraz $G_{g,\alpha} := \varphi_{g,\alpha}^{-1}(\mathbb{R} \times (-\infty, 0])$ jeśli $\alpha \in A^-$. Oznaczmy przez $H_{g,\alpha}$ składową zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_{g,\alpha}$ zawierającą $G_{g,\alpha} \setminus C_{g,\alpha}$. Wtedy $C_{g,\alpha\frown i} \subset H_{g,\alpha}$ dla każdego $\alpha\frown i \in A$.

Dla każdej liczby naturalnej n takiej, że $A_n^+ \neq \emptyset$ definiujemy $U_{f,n}^+$ kładąc $U_{f,n}^+ := G_{f,1}$ w przypadku, gdy $n = 1$ oraz $U_{f,n}^+ := U_{f,n-1}^+ \cup \bigcup_{\alpha \in A_n^+} G_{f,\alpha}$ w przypadku, gdy $n > 1$. Podobnie, definiujemy $U_{g,n}^+$ kładąc $U_{g,n}^+ := G_{g,1}$ dla $n = 1$ oraz $U_{g,n}^+ := U_{g,n-1}^+ \cup \bigcup_{\alpha \in A_n^+} G_{g,\alpha}$ dla $n > 1$. Analogicznie definiujemy $U_{f,n}^-$ i $U_{g,n}^-$ w przypadku, gdy $A_n^- \neq \emptyset$.

Przechodzimy teraz już do przedstawienia zapowiedzianego wcześniej opisu konstrukcji homemorfizmu realizującego sprzężenie topologiczne potoków $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ oraz $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$. Konstrukcję tę rozpoczynamy od zdefiniowania tego homeomorfizmu na obszarze prostowalnym $U_{f,1}$. Ponieważ $U_{f,1} = U_{f,1}^+ \cup C_{f,1} \cup U_{f,1}^-$ i $U_{g,1} = U_{g,1}^+ \cup C_{g,1} \cup U_{g,1}^-$, więc homeomorfizm zdefiniowany w pierwszym kroku konstrukcji będzie wykorzystany w konstrukcji homeomorfizmu realizującego sprzężenie topologiczne dla obu składowych $H_{f,1}$ i $H_{f,-1}$ zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_{f,1}$.

Następnie pokażemy jak rozszerzyć ten homeomorfizm do homeomorfizmu realizującego sprzężenie topologiczne rozważanych potoków określonego na $U_{f,1} \cup H_{f,1}$. Wykorzystujemy tutaj fakt, że zbiór $C_{f,1} \cup H_{f,1}$ jest sumą wstępującego ciągu, którego wyrazami są zbiory $U_{f,n}^+$. Zbiór wartości tego rozszerzenia będzie równy $U_{g,1} \cup H_{g,1}$. Dla składowej $H_{f,-1}$ homeomorfizm realizujący sprzężenie topologiczne rozważanych potoków definiujemy analogicznie.

Ponieważ $U_{f,1}$ i $U_{g,1}$ są obszarami prostowalnymi, więc istnieje homeomorfizm $\Psi_1 : U_{f,1} \to U_{g,1}$ realizujący sprzężenie topologiczne potoków $\{f^t|_{U_{f,1}} : t \in \mathbb{R}\}$ oraz $\{g^t|_{U_{g,1}} : t \in \mathbb{R}\}$. Homeomorfizm możemy dobrać tak, aby $\Psi_1(C_{f,1}) = C_{g,1}$ oraz $\Psi_1(C_{f,1\frown i}^1) = C_{g,1\frown i}^1$ dla $1\frown i \in A^+$ oraz $\Psi_1(C_{f,-1\frown i}^{-1}) = C_{g,-1\frown i}^{-1}$ dla $-1\frown i \in A^-$.

Ustalmy dowolną liczbę naturalną n o tej własności, że $A_{n+1}^+ \neq \emptyset$. Załóżmy, że mamy zdefiniowany homeomorfizm $\Psi_n : U_{f,n}^+ \to U_{g,n}^+$ realizujący sprzężenie topologiczne potoków $\{f^t|_{U_{f,n}^+} : t \in \mathbb{R}\}$ oraz $\{g^t|_{U_{g,n}^+} : t \in \mathbb{R}\}$ o tej własności, że dla każdego $\alpha\frown i \in A^+$ takiego, że $|\alpha| \leq n$ mamy $\Psi_n(C_{f,\alpha}) = C_{g,\alpha}$ oraz $\Psi_n(C_{f,\alpha\frown i}^\alpha) = C_{g,\alpha\frown i}^\alpha$. Ponadto dla każdego $\alpha \in A^+$ takiego, że $|\alpha| \leq n$ zacieśnienie $\Psi_\alpha : G_{f,\alpha} \to G_{g,\alpha}$

homeomorfizmu Ψ_n do zbioru $G_{f,\alpha}$ jest postaci $\Psi_\alpha := \varphi_{g,\alpha}^{-1} \circ \psi_\alpha \circ (\varphi_{f,\alpha}|_{G_{f,\alpha}})$, gdzie

$$\psi_\alpha(t,s) = (\eta_\alpha + t, \theta_\alpha(s)), \qquad (t,s) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty),$$

przy czym $\theta_\alpha : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ jest homeomorfizmem rosnącym o tej własności, że $\theta_\alpha(b^\alpha_{f,\alpha\frown i}) = b^\alpha_{g,\alpha\frown i}$ dla $\alpha\frown i \in A$ oraz θ_α zacieśnione do przedziału $I^\alpha_{f,\alpha\frown i}$ jest równe $\beta_{\alpha\frown i}$. Istnienie takiego homeomorfizmu θ_α wynika z warunku (2.21). Z określenia homeomorfizmu Ψ_1 mamy $\eta_1 = 0$, zaś pozostałe wartości η_α dla $\alpha \in A^+$ takich, że $|\alpha| \leq n$, zostały wyznaczone w kolejnych krokach konstrukcji.

Ustalmy dowolne $\alpha\frown i \in A^+_{n+1}$. Oznaczmy przez (t,s) współrzędne punktów należących do $U_{f,\alpha}$ względem mapy $\varphi_{f,\alpha}$ oraz przez (t',s') współrzędne punktów należących do $U_{f,\alpha\frown i}$ względem mapy $\varphi_{f,\alpha\frown i}$. Wtedy na mocy (2.11) dostajemy, że $t' = \mu_{f,\alpha\frown i}(s) + t$ oraz $s' = \nu_{f,\alpha\frown i}(s)$ dla $t \in \mathbb{R}$ oraz $s \in (c^\alpha_{f,\alpha\frown i}, d^\alpha_{f,\alpha\frown i})$. Podobnie, oznaczmy przez (u,v) współrzędne punktów należących do $U_{g,\alpha}$ względem mapy $\varphi_{g,\alpha}$ oraz przez (u',v') współrzędne punktów należących do $U_{g,\alpha\frown i}$ względem mapy $\varphi_{g,\alpha\frown i}$. Wówczas $u' = \mu_{g,\alpha\frown i}(v) + u$ oraz $v' = \nu_{g,\alpha\frown i}(v)$ dla $u \in \mathbb{R}$, $v \in (c^\alpha_{g,\alpha\frown i}, d^\alpha_{g,\alpha\frown i})$.

Zależność między współrzędnymi punktów należących do $U_{f,\alpha}$ oraz $U_{g,\alpha}$ możemy wyrazić przy pomocy homeomorfizmu ψ_α. Warunek $(u,v) = \psi_\alpha(t,s)$ oznacza, że $u = \eta_\alpha + t$ oraz $v = \theta_\alpha(s)$ dla $t \in \mathbb{R}$ oraz $s \in [0,+\infty)$. Na zbiorach $U_{f,\alpha} \cap U_{f,\alpha\frown i}$ oraz $U_{g,\alpha} \cap U_{g,\alpha\frown i}$ zmieniamy układy współrzędnych. Wówczas otrzymujemy

$$u' = \mu_{g,\alpha\frown i}(\beta_{\alpha\frown i}(\nu^{-1}_{f,\alpha\frown i}(s'))) + \eta_\alpha + t' - \mu_{f,\alpha\frown i}(\nu^{-1}_{f,\alpha\frown i}(s'))$$

oraz

$$v' = \nu_{g,\alpha\frown i}(\beta_{\alpha\frown i}(\nu^{-1}_{f,\alpha\frown i}(s'))).$$

Korzystając z założenia naszego twierdzenia dostajemy $u' = -\gamma_{\alpha\frown i}(\nu^{-1}_{f,\alpha\frown i}(s')) + \eta_\alpha + t'$.

Niech

$$\eta_{\alpha\frown i}(s') := -\gamma_{\alpha\frown i}(\nu^{-1}_{f,\alpha\frown i}(s')) + \eta_\alpha$$

oraz

$$\xi_{\alpha\frown i}(s') := \nu_{g,\alpha\frown i}(\beta_{\alpha\frown i}(\nu^{-1}_{f,\alpha\frown i}(s')))$$

dla $s' \in (d_{f,\alpha\frown i}, 0)$, gdzie $d_{f,\alpha\frown i} = \nu_{f,\alpha\frown i}(c^\alpha_{f,\alpha\frown i} + \varepsilon^\alpha_{f,\alpha\frown i})$ lub $d_{f,\alpha\frown i} = \nu_{f,\alpha\frown i}(d^\alpha_{f,\alpha\frown i} - \varepsilon^\alpha_{f,\alpha\frown i})$. Wówczas korzystając z założenia twierdzenia otrzymujemy $\lim_{s'\to 0} \eta_{\alpha\frown i}(s') = -a^\alpha_{g,\alpha\frown i} + \eta_\alpha$ oraz $\lim_{s'\to 0} \xi_{\alpha\frown i}(s') = 0$, gdyż po zmianie układu współrzędnych warunek $s \to b^\alpha_{f,\alpha\frown i}$ oznacza, że $s' \to 0$. Zatem funkcję $\phi^\alpha_{\alpha\frown i} : \mathbb{R} \times (d_{f,\alpha\frown i}, 0) \to \mathbb{R} \times (d_{g,\alpha\frown i}, 0)$ określoną wzorem

$$\phi^\alpha_{\alpha\frown i}(t', s') := (\eta_{\alpha\frown i}(s') + t', \xi_{\alpha\frown i}(s'))$$

możemy przedłużyć do homeomorfizmu określonego na $\mathbb{R} \times (d_{f,\alpha\frown i}, 0]$ kładąc $\eta_{\alpha\frown i}(0) := -a^\alpha_{g,\alpha\frown i} + \eta_\alpha$ oraz $\xi_{\alpha\frown i}(0) := 0$.

Po zmianie układów współrzędnych zacieśnienie homeomorfizm Ψ_α do obszaru $G_{f,\alpha} \cap U_{f,\alpha\frown i}$ ma postać

$$\Psi_\alpha|_{G_{f,\alpha} \cap U_{f,\alpha\frown i}} = \varphi^{-1}_{g,\alpha} \circ \phi^\alpha_{\alpha\frown i} \circ (\varphi_{f,\alpha}|_{G_{f,\alpha} \cap U_{f,\alpha\frown i}}).$$

Zatem przedłużając homeomorfizm $\phi^{\alpha}_{\widehat{\alpha i}}$ otrzymujemy przedłużenie homeomorfizmu Ψ_α na $G_{f,\alpha} \cup C_{f,\widehat{\alpha i}}$, które przekształca $C_{f,\widehat{\alpha i}}$ na $C_{g,\widehat{\alpha i}}$, gdyż $\xi_{\widehat{\alpha i}}(0) = 0$.

Definiujemy $\Psi_{\widehat{\alpha i}} : G_{f,\widehat{\alpha i}} \to G_{g,\widehat{\alpha i}}$ wzorem $\Psi_{\widehat{\alpha i}} := \varphi^{-1}_{g,\widehat{\alpha i}} \circ \psi_{\widehat{\alpha i}} \circ (\varphi_{f,\widehat{\alpha i}}|_{G_{f,\widehat{\alpha i}}})$, gdzie

$$\psi_{\widehat{\alpha i}}(t, s) = (\eta_{\widehat{\alpha i}} + t, \theta_{\widehat{\alpha i}}(s)), \qquad (t, s) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty),$$

przy czym $\eta_{\widehat{\alpha i}} := \eta_{\widehat{\alpha i}}(0)$, natomiast $\theta_{\widehat{\alpha i}} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ jest homeomorfizmem rosnącym o tej własności, że $\theta_{\widehat{\alpha i}}(b^{\widehat{\alpha i}}_{f,\widehat{\widehat{\alpha i} j}}) = b^{\widehat{\alpha i}}_{g,\widehat{\widehat{\alpha i} j}}$ dla $\widehat{\widehat{\alpha i} j} \in A$ oraz $\theta_{\widehat{\alpha i}}$ zacieśnione do przedziału $I^{\widehat{\alpha i}}_{f,\widehat{\widehat{\alpha i} j}}$ jest równe $\beta_{\widehat{\widehat{\alpha i} j}}$.

Rozszerzenie homeomorfizmu Ψ_n na zbiór $U^+_{f,n+1}$ definiujemy w następujący sposób

$$\Psi_{n+1}(p) := \begin{cases} \Psi_n(p), & p \in U^+_{f,n}, \\ \Psi_{\widehat{\alpha i}}(p), & p \in G_{f,\widehat{\alpha i}},\ \widehat{\alpha i} \in A^+_{n+1}. \end{cases}$$

Wówczas Ψ_{n+1} jest homeomorfizmem realizującym sprzężenie topologiczne potoków $\{f^t|_{U^+_{f,n+1}} : t \in \mathbb{R}\}$ oraz $\{g^t|_{U^+_{g,n+1}} : t \in \mathbb{R}\}$.

Omówienie wyników dotyczących topologicznego sprzężenia potoków homeomorfizmów Brouwera kończymy twierdzeniem, które mówi, że założenia wykorzystywane przy konstruowaniu homeomorfizmu realizującego sprzężenie topologiczne są warunkami koniecznymi istnienia takiego homeomorfizmu.

Twierdzenie 2.41. ([A6], Proposition 3.3) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ oraz $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ będą sprzężonymi topologicznie potokami Brouwera. Wówczas dla każdego $\widehat{\alpha i} \in A$ istnieje funkcja ciągła $\gamma_{\widehat{\alpha i}} : I^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}} \to \mathbb{R}$ i homeomorfizm rosnący $\beta_{\widehat{\alpha i}} : I^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}} \to I^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}}$ takie, że zachodzi warunek (2.22), tj.*

$$\mu_{f,\widehat{\alpha i}}(s) = (\mu_{g,\widehat{\alpha i}} \circ \beta_{\widehat{\alpha i}})(s) + \gamma_{\widehat{\alpha i}}(s), \qquad s \in I^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}},$$

gdzie $\mu_{f,\widehat{\alpha i}}$, $\mu_{g,\widehat{\alpha i}}$, $c^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}}$, $d^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}}$, $c^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}}$, $d^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}}$ są określone w Twierdzeniu 2.29, oraz $I^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}} := (c^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}}, c^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}} + \varepsilon^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}})$, $I^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}} := (c^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}}, c^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}} + \varepsilon^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}})$ w przypadku, gdy $b^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}} = c^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}}$ lub $I^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}} := (d^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}} - \varepsilon^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}}, d^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}})$, $I^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}} := (d^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}} - \varepsilon^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}}, d^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}})$ w przypadku, gdy $b^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}} = d^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}}$ dla pewnych $\varepsilon^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}} > 0$ oraz $\varepsilon^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}} > 0$, gdzie $b^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}}$, $b^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}}$ są zdefiniowane warunkami (2.16) oraz (2.17) lub (2.18) oraz (2.19), odpowiednio. Ponadto $\lim_{s \to b^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}}} \beta_{\widehat{\alpha i}}(s) = b^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}}$, $\lim_{s \to b^{\alpha}_{f,\widehat{\alpha i}}} \gamma_{\widehat{\alpha i}}(s) = a^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}}$ dla pewnego $a^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}} \in \mathbb{R}$.

W zaprezentowanym poniżej szkicu dowodu powyższego twierdzenia pokażemy jak przy założeniu, że rozważane potoki są sprzężone topologicznie zdefiniować funkcje $\gamma_{\widehat{\alpha i}}$ oraz $\beta_{\widehat{\alpha i}}$. Niech $\{C_{f,\alpha} : \alpha \in A\}$, $\{U_{f,\alpha} : \alpha \in A\}$, $\{\varphi_{f,\alpha} : \alpha \in A\}$ oraz $\{C_{g,\alpha} : \alpha \in A\}$, $\{U_{g,\alpha} : \alpha \in A\}$, $\{\varphi_{g,\alpha} : \alpha \in A\}$ będą wyżej opisanymi rodzinami. Oznaczmy przez (t, s) współrzędne punktów należących do $U_{f,\alpha}$ względem homeomorfizmu $\varphi_{f,\alpha}$ oraz przez (u, v) współrzędne punktów należących do $U_{g,\alpha}$ względem homeomorfizmu $\varphi_{g,\alpha}$. Niech $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie homeomorfizmem realizującym sprzężenie topologiczne potoków. Ustalmy dowolny ciąg skończony $\widehat{\alpha i} \in A$. Rozważać będziemy przypadek, gdy $b^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}} = c^{\alpha}_{g,\widehat{\alpha i}}$ (drugi z przypadków jest podobny).

Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 2.40 znajdujemy $\varepsilon^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i} > 0$ takie, że przedział $(c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i}, c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i} + \varepsilon^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i})$ nie zawiera żadnej z liczb $b^{\alpha}_{f,\alpha^\frown j}$ dla $\alpha^\frown j \in A$. Oznaczmy przez $\phi^{\alpha}_{\alpha^\frown i}$ zacieśnienie funkcji $\varphi_{g,\alpha} \circ \Phi \circ \varphi^{-1}_{f,\alpha}$ do zbioru $\mathbb{R} \times (c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i}, c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i} + \varepsilon^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i})$. Wówczas $\phi^{\alpha}_{\alpha^\frown i} : \mathbb{R} \times (c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i}, c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i} + \varepsilon^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i}) \to \mathbb{R} \times (c^{\alpha}_{g,\alpha^\frown i}, c^{\alpha}_{g,\alpha^\frown i} + \varepsilon^{\alpha}_{g,\alpha^\frown i})$ oraz $(u, v) = \phi^{\alpha}_{\alpha^\frown i}(t, s)$. Definiujemy funkcję $\beta_{\alpha^\frown i} : (c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i}, c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i} + \varepsilon^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i}) \to (c^{\alpha}_{g,\alpha^\frown i}, c^{\alpha}_{g,\alpha^\frown i} + \varepsilon^{\alpha}_{g,\alpha^\frown i})$ wzorem

$$\beta_{\alpha^\frown i}(s) = v.$$

Wówczas $\beta_{\alpha^\frown i}$ jest homeomorfizmem rosnącym, gdyż Φ jest homeomorfizmem przekształcającym trajektorie potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ na trajektorie potoku $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ oraz $\Phi(C^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i}) = C^{\alpha}_{g,\alpha^\frown i}$.

Niech $K_{f,\alpha} := \varphi^{-1}_{f,\alpha}(\{0\} \times \mathbb{R})$ oraz $K_{f,\alpha^\frown i} := \varphi^{-1}_{f,\alpha^\frown i}(\{0\} \times \mathbb{R})$. Wtedy dla każdego $s \in (c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i}, c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i} + \varepsilon^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i})$ wartość $\mu_{f,\alpha^\frown i}(s)$ wyraża czas potrzebny na to, aby wzdłuż trajektorii $\varphi^{-1}_{f,\alpha}(\mathbb{R} \times \{s\})$ potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ dotrzeć od cięcia $K_{f,\alpha^\frown i}$ do cięcia $K_{f,\alpha}$. Połóżmy $L_{g,\alpha} := \Phi(K_{f,\alpha})$ oraz $L_{g,\alpha^\frown i} := \Phi(K_{f,\alpha^\frown i})$. Wówczas $L_{g,\alpha}$ jest cięciem w $U_{g,\alpha}$ oraz $L_{g,\alpha^\frown i}$ jest cięciem w $U_{g,\alpha^\frown i}$, gdyż Φ jest homeomorfizmem przekształcającym trajektorie potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ na trajektorie potoku $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$. Korzystając z założenia, że $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ realizuje sprzężenie topologiczne potoków otrzymujemy, że dla każdego $s \in (c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i}, c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i} + \varepsilon^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i})$ wartość $\mu_{f,\alpha^\frown i}(s)$ wyraża czas potrzebny na to, aby wzdłuż trajektorii $\varphi^{-1}_{g,\alpha}(\mathbb{R} \times \{\beta_{\alpha^\frown i}(s)\})$ potoku $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ dotrzeć od cięcia $L_{g,\alpha^\frown i}$ do cięcia $L_{g,\alpha}$, gdyż $v = \beta_{\alpha^\frown i}(s)$.

Niech $K_{g,\alpha} := \varphi^{-1}_{g,\alpha}(\{0\} \times \mathbb{R})$ oraz $K_{g,\alpha^\frown i} := \varphi^{-1}_{g,\alpha^\frown i}(\{0\} \times \mathbb{R})$. Dla każdego $s \in (c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i}, c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i} + \varepsilon^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i})$ oznaczmy przez $\tau_{g,\alpha}(s)$ czas potrzebny na to, aby wzdłuż trajektorii $\varphi^{-1}_{g,\alpha}(\mathbb{R} \times \{\beta_{\alpha^\frown i}(s)\})$ potoku $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ dotrzeć od cięcia $K_{g,\alpha}$ do cięcia $L_{g,\alpha}$ oraz przez $\tau_{g,\alpha^\frown i}(s)$ czas potrzebny na to, aby wzdłuż tej samej trajektorii dotrzeć od cięcia $K_{g,\alpha^\frown i}$ do cięcia $L_{g,\alpha^\frown i}$. Wówczas dla każdego $s \in (c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i}, c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i} + \varepsilon^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i})$ mamy

$$\mu_{g,\alpha^\frown i}(\beta_{\alpha^\frown i}(s)) = \mu_{f,\alpha^\frown i}(s) + \tau_{g,\alpha^\frown i}(s) - \tau_{g,\alpha}(s).$$

Definiujemy funkcję $\gamma_{\alpha^\frown i} : (c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i}, c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i} + \varepsilon^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i}) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\gamma_{\alpha^\frown i}(s) := \tau_{g,\alpha}(s) - \tau_{g,\alpha^\frown i}(s), \quad s \in (c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i}, c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i} + \varepsilon^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i}).$$

Wtedy

$$\mu_{f,\alpha^\frown i}(s) = (\mu_{g,\alpha^\frown i} \circ \beta_{\alpha^\frown i})(s) + \gamma_{\alpha^\frown i}(s)$$

dla każdego $s \in (c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i}, c^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i} + \varepsilon^{\alpha}_{f,\alpha^\frown i})$.

Rozdział 3

Omówienie pozostałych osiągnięć naukowych

Celem tego rozdziału jest przedstawienie zarysu moich zainteresowań naukowych i prowadzonych badań na podstawie krótkiego opisu wyników pochodzących z prac powstałych po doktoracie, które nie wchodzą w skład wskazanego osiągnięcia naukowego. Uzyskane wyniki zostały pogrupowane ze względu na rozważane zagadnienia. W pierwszej części tego rozdziału znajdują się wyniki uzupełniające dotyczące homeomorfizmów Brouwera, które nie weszły do zasadniczego rozdziału tego opracowania poświęconego omówieniu wskazanego osiągnięcia naukowego. W drugiej zaś części tego rozdziału przedstawione zostały wyniki z innych obszarów moich badań. Rozdział ten nie zawiera omówienia prac przeglądowych [B18], [B20] i [B23].

3.1 Homeomorfizmy Brouwera - wyniki uzupełniające

Wyniki zamieszczone w tej części tego rozdziału opisują wybrane własności homeomorfizmów Brouwera zanurzalnych w potok. W szczególności, przedstawione zostały wyniki dotyczące homeomorfizmów Spernera i homeomorfizmów Reeba, które to klasy homeomorfizmów dostarczają najprostszych przykładów homeomorfizmów Brouwera.

3.1.1 Pierwiastki iteracyjne homeomorfizmów Spernera

W pracy [B7] wyznaczono wszystkie ciągłe rozwiązania g równania

$$g^n(x) = f(x) \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{3.1}$$

gdzie $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$, a f jest homeomorfizmem płaszczyzny na siebie spełniającym warunek

(S) dla każdego zbioru Jordana B zbiór $f^m(B)$ jest rozłączny z B dla prawie wszystkich $m \in \mathbb{Z}$,

gdzie przez zbiór Jordana rozumiemy sumę krzywej Jordana i ograniczonej składowej jej dopełnienia.

Homeomorfizm płaszczyzny na siebie f spełniający warunek (S) nazywamy *homeomorfizmem Spernera*. Warunek (S) możemy również rozpatrywać na dowolnym niezmienniczym zbiorze jednospójnym H, w tym przypadku w warunku (S) bierzemy $B \subset H$. Mówimy wtedy o homeomorfizmie Spernera na H.

Z warunku (S) wynika bezpośrednio, że f nie ma punktów stałych. Homeomorfizm spełniający warunek (S) może zachowywać lub zmieniać orientację. Homeomorfizm Spernera zachowujący orientację jest więc homeomorfizmem Brouwera.

Emanuel Sperner [105] wykazał twierdzenie, które mówi, że jeśli homeomorfizm Brouwera f ma własność (S), to jest on sprzężony topologicznie z translacją o wektor $(1, 0)$ (zob. [105], Satz 27). Ponieważ warunek (S) zachodzi w przypadku, gdy f jest translacją, twierdzenie odwrotne jest również prawdziwe.

D. Betten [13] udowodnił, że zmieniający orientację homeomorfizm płaszczyzny na siebie spełnia warunek (S) wtedy i tylko wtedy, gdy jest sprzężony topologicznie z symetrią z poślizgiem S_1 daną wzorem

$$S_1(x_1, x_2) = (x_1 + 1, -x_2) \qquad \text{dla} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.2}$$

Symetria z poślizgiem S_1 odgrywa tutaj podobną rolę jak translacja o wektor $(1, 0)$ dla zachowujących orientację homeomorfizmów Spernera, gdyż jeśli homeomorfizm płaszczyzny f jest sprzężony topologicznie z pewną symetrią z poślizgiem, to jest on sprzężony topologicznie z S_1 (por. [B7], Lemma 1).

Prezentację wyników dotyczących równania (3.1) rozpoczniemy od twierdzenia, które mówi, że klasa homeomorfizmów Spernera jest zamknięta ze względu na operację wyznaczania pierwiastków iteracyjnych w klasie funkcji ciągłych.

Twierdzenie 3.1. ([B7], Proposition 3) *Niech f będzie homeomorfizmem płaszczyzny na siebie, g jest funkcją ciągłą oraz $g^n = f$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$. Wówczas, jeśli f spełnia warunek (S), to g jest homeomorfizmem płaszczyzny na siebie spełniającym warunek (S).*

Postać wszystkich ciągłych pierwiastków iteracyjnych homeomorfizmu Spernera opisują następujące dwa twierdzenia.

Twierdzenie 3.2. ([B7], Theorem 3) *Niech f będzie zachowującym orientację homeomorfizmem Spernera. Wtedy*

(a) dla dowolnego parzystego $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ funkcja g jest ciągłym rozwiązaniem równania (3.1) wtedy i tylko wtedy, gdy wyraża się jednym z następujących wzorów

$$g = \varphi^{-1} \circ T_{\frac{1}{n}} \circ \varphi \tag{3.3}$$

lub

$$g = \varphi^{-1} \circ S_{\frac{1}{n}} \circ \varphi, \tag{3.4}$$

gdzie φ jest homeomorficznym rozwiązaniem równania Abela

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + (1, 0) \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{3.5}$$

zaś $T_{\frac{1}{n}}$, $S_{\frac{1}{n}}$ mają odpowiednio postać

$$T_{\frac{1}{n}}(x_1, x_2) := (x_1 + \frac{1}{n}, x_2) \qquad \text{dla} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.6}$$

$$S_{\frac{1}{n}}(x_1, x_2) := (x_1 + \frac{1}{n}, -x_2) \qquad \text{dla} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.7}$$

(b) dla dowolnego nieparzystego $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$, funkcja g jest ciągłym rozwiązaniem równania (3.1) wtedy i tylko wtedy, gdy wyraża się wzorem (3.3), gdzie φ jest homeomorficznym rozwiązaniem równania (3.5), a $T_{\frac{1}{n}}$ jest dane wzorem (3.6).

Twierdzenie 3.3. ([B7], Theorem 4) *Niech f będzie zmieniającym orientację homeomorfizmem Spernera, n nieparzystą liczbą naturalną większą od 1. Wtedy funkcja g jest ciągłym rozwiązaniem równania (3.1) wtedy i tylko wtedy, gdy wyraża się wzorem (3.4), gdzie φ jest homeomorficznym rozwiązaniem równania*

$$\varphi(f(x)) = S_0(\varphi(x)) + (1, 0) \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{3.8}$$

a $S_{\frac{1}{n}}$ jest dane wzorem (3.7).

W przypadku, gdy n jest parzyste nie istnieją rozwiązania równania (3.1) przy założeniu, że f zmienia orientację (zob. [B7], Remark 3).

Bezpośrednia konstrukcja ciągłych rozwiązań równania (3.1) przedstawiona została w pracy [B5] (zob. [B5], Theorem 1 i Theorem 2). Konstrukcja ta oparta jest na warunku

(B) istnieje linia K (tj. homeomorficzny obraz prostej domknięty na płaszczyźnie) taka, że

$$K \cap f(K) = \emptyset, \tag{3.9}$$

$$U^0 \cap f(U^0) = \emptyset, \tag{3.10}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U^0) = \mathbb{R}^2, \tag{3.11}$$

gdzie $U^0 = M^0 \cup f(K)$, a M^0 jest pasem pomiędzy K i $f(K)$.

Warunek ten jest bowiem równoważny warunkowi (S) dla dowolnego homeomorfizmu płaszczyzny na siebie (zob. [B1], Theorem 1 oraz [B7], Theorem 2).

W pracy [B5] omówiono również zagadnienie doboru linii K występującej w warunku (B) przy konstruowania rozwiązań równania (3.1). Problem pojawia się ze względu na to że, dla homeomorfizmów Spernera f, g, dla których zachodzi $f = g^n$ dla pewnej liczby naturalnej $n > 1$ oraz linii K występującej w warunku (B), warunek $K \cap g(K) = \emptyset$ może nie być spełniony.

3.1.2 Relacja współzbieżności do nieskończoności dla homeomorfizmu Brouwera zanurzalnego w potok

W podrozdziale tym omówimy wyniki pochodzące z prac [B8], [B9], [B12]. Dotyczą one relacji współzbieżności do nieskończoności określonej dla ustalonego homeomorfizmu Brouwera. Definicja i wybrane własności tej relacji zostały omówione w zasadniczej części tego opracowania. Przedstawione tutaj wyniki zostały wykazane przy założeniu, że homeomorfizm Brouwera jest zanurzalny w potok.

W pracy [B8] przedstawione zostały podstawowe własności relacji współzbieżności do nieskończoności. Najważniejsza z tych własności dotyczy trajektorii zawartych w tej samej klasie abstrakcji.

Twierdzenie 3.4. ([B8], Proposition 2.2) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Niech C_1, C_2 będą różnymi trajektoriami tego potoku. Jeśli C_1, C_2 są zawarte w tej samej klasie abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności, to każdy punkt pasa pomiędzy C_1 i C_2 należy do tej klasy.*

W następnym podrozdziale przedstawimy natomiast wynik z pracy [B10] dotyczący pasa pomiędzy trajektoriami leżącymi w różnych klasach abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności (zob. Twierdzenie 3.13).

Praca [B8] zawiera również wynik mówiący, że zacieśnienie każdego elementu potoku homeomorfizmów Brouwera różnego od identyczności do dowolnej klasy abstrakcji G_0 o niepustym wnętrzu jest homeomorfizmem Spernera na G_0.

Twierdzenie 3.5. ([B8], Theorem 3.1) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Niech G_0 będzie klasą abstrakcji, która nie składa się tylko z jednej trajektorii tego potoku. Wówczas zacieśnienie $f|_{G_0}$ homeomorfizmu f do G_0 jest homeomorfizmem Spernera na G_0.*

W pracy [B9] można znaleźć kolejne własności relacji współzbieżności do nieskończoności. W wypowiedzi pierwszego z prezentowanych tu wyników występuje trójargumentowa relacja określona w zbiorze trajektorii potoku (definicja tej relacji znajduje się w zasadniczej części tego opracowania). Jest on rozszerzeniem jednego z wyników pracy [B8] (por. [B8], Lemma 2.1).

Twierdzenie 3.6. ([B9], Proposition 2.1) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Dla dowolnych różnych między sobą trajektorii C_1, C_2, C_3 potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$, jeśli $\mid C_1, C_2, C_3|$, to każda z tych trajektorii jest zawarta w innej klasie abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności.*

Następny z omawianych wyników tej pracy dotyczy trajektorii punktów należących do brzegu klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności.

Twierdzenie 3.7. ([B9], Proposition 2.3) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Niech G_0 będzie klasą abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności oraz niech $p \in G_0 \cap \operatorname{bd} G_0$. Wówczas trajektoria C_p punktu p zawiera się w $G_0 \cap \operatorname{fr} G_0$.*

Korzystając z Twierdzeń 3.6 i 3.7 wykazujemy wynik opisujący brzeg dowolnej klasy abstrakcji tej relacji.

Twierdzenie 3.8. ([B9], Proposition 2.4, Corollary 2.7) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Dla dowolnej klasy abstrakcji G relacji współzbieżności do nieskończoności jej brzeg jest sumą trajektorii potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Ponadto, klasa abstrakcji G może zawierać co najwyżej dwie trajektorie zawarte w jej brzegu.*

Praca [B9] zawiera również wynik, który rozszerza Twierdzenie 3.5.

Twierdzenie 3.9. ([B9], Theorem 4.2) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Dla każdej klasy abstrakcji G_0 relacji współzbieżności do nieskończoności istnieje obszar jednospójny H niezmienniczy względem $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ taki, że $G_0 \subset H$ i $f|_H$ jest homeomorfizmem Spernera na H.*

Praca [B12] zawiera dalsze wyniki opisujące własności trajektorii zawartych w brzegu klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności dla homeomorfizmów Brouwera zanurzalnych w potok.

W pracy tej wykazane zostało, że jeśli p należy do brzegu pewnej klasy abstrakcji G_0, to dla każdej klasy abstrakcji G takiej, że $G \setminus C_p \neq \emptyset$, gdzie C_p oznacza trajektorię punktu p, zbiór $\operatorname{cl} G \setminus C_p$ jest zawarty w jednej ze składowych zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_p$ (zob. [B12], Corollary 4).

Głównym wynikiem tej pracy jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.10. ([B12], Theorem 6) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Niech G_0 będzie klasą abstrakcji, która nie jest pojedynczą trajektorią oraz niech $p \in \operatorname{bd} G_0$. Wówczas dla każdej klasy abstrakcji $G \neq G_0$ zawartej w składowej zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_p$ zawierającej $\operatorname{cl} G_0 \setminus C_p$ zachodzi warunek $p \notin \operatorname{bd} G$.*

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy dwa wnioski opisujące własności trajektorii brzegowych klas abstrakcji badanej relacji. Pierwszy z nich mówi, że dla każdego punktu p, jeśli klasa zawierająca punkt p nie jest pojedynczą trajektorią, to p może należeć do brzegu co najwyżej dwu klas, gdyż w każdej ze składowych dopełnienia trajektorii punktu p może być zawarta co najwyżej jedna klasa abstrakcji zawierająca w swym brzegu punkt p (zob. [B12], Corollary 7). Natomiast drugi z nich dotyczy punktu, którego trajektoria sama tworzy klasę abstrakcji. Wówczas punkt ten może należeć do brzegu co najwyżej trzech klas - klasy równej trajektorii tego punktu i co najwyżej po jednej z klas zawartych w każdej ze składowych dopełnienia tej trajektorii (zob. [B12], Corollary 7).

3.1.3 Maksymalne obszary prostowalne potoku homeomorfizmów Brouwera

W podrozdziale tym omówimy wyniki pochodzące z prac [B6], [B10], [B11]. Zawierają one wyniki opisujące własności maksymalnych obszarów prostowalnych. Definicja maksymalnego obszaru prostowalnego i najważniejsze twierdzenia dotyczące dotyczące obszarów prostowalnych znajdują się w głównej części tego opracowania.

W pracy [B6] badane były pewne potoki homeomorfizmów Brouwera, które nie są sprzężone topologicznie z potokiem translacji. Celem tych badań było wyznaczenie związku pomiędzy homeomorfizmami, które realizują sprzężenie topologiczne z potokiem translacji na obszarach prostowalnych mających niepuste przecięcie. Otrzymana postać odwzorowania przejścia pomiędzy homeomorfizmami realizującymi sprzężenie została później przeniesiona na przypadek dowolnego potoku homeomorfizmów Brouwera, który został omówiony w głównej części tego opracowania.

Najprostszą strukturę trajektorii spośród potoków, które nie są sprzężone topologicznie z potokiem translacji mają potoki Reeba. Definiujemy je korzystając z pojęcia topologicznej równoważności potoków. Niech

$$\begin{aligned} P_0 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}, \\ P_1 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0\}, \\ P_2 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0\}, \\ L_x &:= \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}, \\ L_y &:= \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \end{aligned}$$

oraz $H := P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup L_x \cup L_y$. Mówimy, że potok homeomorfizmów Brouwera $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ jest *potokiem Reeba* jeśli jest on topologicznie równoważny potokowi $\{h^t : t \in \mathbb{R}\}$, gdzie dla każdego $t \in \mathbb{R}$ homeomorfizm $h^t : H \to H$ jest określony wzorem

$$h^t(x,y) := \begin{cases} (2^t x, 2^{-t} y) & \text{dla} \quad (x,y) \in P_0 \cup L_x \cup L_y, \\ (x, 2^{-t} y) & \text{dla} \quad (x,y) \in P_1, \\ (2^t x, y) & \text{dla} \quad (x,y) \in P_2. \end{cases}$$

Z powyższej definicji otrzymujemy istnienie wzajemnej odpowiedniości między trajektoriami potoków $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ oraz $\{h^t : t \in \mathbb{R}\}$, ponieważ homeomorfizm realizujący równoważność topologiczną przekształca trajektorie jednego z potoków na trajektorie drugiego z nich. Dowolny homeomorfizm Brouwera będący elementem potoku Reeba posiada trzy klasy abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończości odpowiadające odpowiednio zbiorom P_0, $P_1 \cup L_y$, $P_2 \cup L_x$, z których pierwsza jest zbiorem otwartym, a pozostałe dwa są zbiorami domkniętymi. Ogólnie, homeomorfizm Brouwera posiadający dokładnie trzy klasy abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończości nazywamy *homeomorfizmem Reeba*. W rozdziale tym rozważamy jedynie homeomorfizmy Reeba zanurzalne w potok.

Trajektorie potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ odpowiadające zbiorom L_x oraz L_y poprzez homeomorfizm realizujący topologiczną równoważność są trajektoriami brzegowymi klas abstrakcji i zawierają się w pierwszym przedłużeniu granicznym tego potoku. Potok Reeba posiada dwa maksymalne obszary prostowalne odpowiadające zbiorom $P_1 \cup L_y \cup P_0$, $P_2 \cup L_x \cup P_0$, z których każdy jest sumą dwóch klas abstrakcji. Ponadto każda z trajektorii odpowiadających zbiorom L_x oraz L_y stanowi brzeg jednego z tych obszarów prostowalnych i zawiera się w drugim z nich.

Przedstawienie wyniku dotyczącego potoków Reeba poprzedzimy twierdzeniem opisującym postać potoków zawierających homeomorfizm Spernera.

Twierdzenie 3.11. ([B3], Theorem 1) *Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem jednospójnym. Wówczas potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ określony na D jest sprzężony topologicznie z potokiem translacji wtedy i tylko wtedy, gdy f^1 jest homeomorfizmem Spernera na D.*

Innymi słowy, każdy potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ taki, że f^1 jest homeomorfizmem Spernera można opisać wzorem

$$f^t(x) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + (t, 0)) \qquad \text{dla} \quad x \in D,\, t \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

gdzie $\varphi : D \to \mathbb{R}^2$ jest homeomorficznym rozwiązaniem równania Abela, czyli równania (3.5). Homeomorficzne rozwiązania tego równania zależą od funkcji określonej na odpowiednio dobranym pasie, a ich konstrukcja została opisana w pracy [B1]. Ponadto, z warunku (3.12) otrzymujemy, że każdy element tego potoku różny od identyczności jest homeomorfizmem Spernera, ponieważ istnienie homeomorficznego rozwiązania równania (3.5) jest równoważne warunkowi (S). Stąd, jeśli $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ jest potokiem homeomorfizmów Brouwera, to dla każdego $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ element $f^t|_H$ potoku $\{f^t|_H : t \in \mathbb{R}\}$, gdzie H jest obszarem prostowalnym występującym w Twierdzeniu 3.9, jest homeomorfizmem Spernera.

W sformułowaniach wyników zawartych w pracy [B6] wykorzystywane są diagramy Kaplana (zob. Beck [19], Rozdział 11). Dla każdego potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ homeomorfizmów Brouwera można bowiem wyznaczyć diagram Kaplana zawierający uogólnione wielokąty (dopuszczamy nieskończoną liczbę boków) wpisane w okrąg i cięciwy równoległe do boków tych wielokątów odpowiadające trajektoriom potoku. Cięciwy te (wliczając boki uogólnionych wielokątów) odpowiadają trajektoriom tego potoku z jednym wyjątkiem. Mianowicie, każdy z tych uogólnionych wielokątów ma dokładnie jeden bok, który nie odpowiada żadnej z trajektorii potoku. Dla potoku Reeba diagram Kaplana ma tylko jeden uogólniony wielokąt, którym jest trójkąt. Każdy z odcinków koła wyciętych przez boki tego trójkąta odpowiada jednej klasie abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności, przy czym jedna z nich jest zbiorem otwartym, a pozostałe dwie są zbiorami domkniętymi.

Przedstawimy teraz twierdzenie o postaci potoków Reeba (w pracy [B6] badane były też dwa typy potoków o 5 klasach abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności).

Twierdzenie 3.12. ([B6], Theorem 1) *Niech* $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ *będzie potokiem Reeba. Oznaczmy przez* G_0 *tę klasę abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności, która jest zbiorem otwartym, a przez* G_1*,* G_2 *pozostałe dwie klasy abstrakcji. Wówczas istnieją homeomorfizmy* φ_1*,* φ_2 *odwzorowujące odpowiednio* $G_0 \cup G_1$*,* $G_0 \cup G_2$ *na* $\mathbb{R}^2$ *takie, że*

$$f^t(x) = \begin{cases} \varphi_1^{-1}(\varphi_1(x) + (t,0)), & x \in G_0 \cup G_1, \\ \varphi_2^{-1}(\varphi_2(x) + (t,0)), & x \in G_0 \cup G_2, \end{cases} \tag{3.13}$$

a funkcja $\psi = \varphi_2 \circ (\varphi_1|_{G_0})^{-1} : \varphi_1(G_0) \longrightarrow \varphi_2(G_0)$ *ma postać*

$$\psi(x,y) = (x + \alpha(y), \beta(y)), \qquad (x,y) \in \varphi_1(G_0), \tag{3.14}$$

gdzie $\alpha : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *jest odwzorowaniem ciągłym, zaś* β *jest homeomorfizmem przedziału* $(0,+\infty)$ *na siebie.*

Postać (3.13) otrzymujemy z Twierdzenia 3.11 zastosowanego do obszarów jednospójnych $G_0 \cup G_1$ i $G_0 \cup G_2$. Rozwiązując odpowiednie równanie funkcyjne otrzymujemy następnie (3.14).

W pracy [B10] badano obszary prostowalne potoku homeomorfizmów Brouwera korzystając z własności klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności zawartych w tych obszarach.

Omówienie wyników tej pracy rozpoczniemy od zaanonsowanego w poprzednim podrozdziale twierdzenia, które mówi, że w pasie pomiędzy trajektoriami punktów należących do różnych klas abstrakcji można znaleźć punkt nie należący do żadnej z tych klas.

Twierdzenie 3.13. ([B10], Theorem 2.2) *Niech* f *będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok* $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$*. Niech punkty* p*,* q *należą odpowiednio do różnych klas abstrakcji* G_1*,* G_2 *relacji współzbieżności do nieskończoności. Wówczas istnieje punkt* r *leżący w pasie* D_{pq} *pomiędzy trajektoriami* C_p *i* C_q *punktów* p *i* q *taki, że* $r \notin G_1 \cup G_2$*.*

Korzystając z tego twierdzenia wykazujemy zamieszczony poniżej główny wynik pracy [B10] związany z istnieniem wspólnych trajektorii brzegowych klas abstrakcji zawartych w tym samym obszarze prostowalnym.

Twierdzenie 3.14. ([B10], Theorem 3.3) *Niech* M_0 *będzie obszarem prostowalnym potoku homeomorfizmów Brouwera, a* G_1*,* G_2 *klasami abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności. Załóżmy, że* $G_1 \cup G_2 \subset M_0$ *oraz* $\mathrm{bd}\, G_1 \cap \mathrm{bd}\, G_2 \neq \emptyset$*. Niech* $p \in G_1$*,* $q \in G_2$*. Wówczas istnieje punkt* $z \in D_{pq}$ *taki, że* $z \in \mathrm{bd}\, M_0$*, gdzie* D_{pq} *oznacza pas między trajektoriami* C_p*,* C_q *punktów* p*,* q*. Ponadto,* $z \notin G_1 \cup G_2$*.*

Praca [B11] zawiera wyniki dotyczące maksymalnych obszarów prostowalnych potoku homeomorfizmów Brouwera. Do opisu brzegu tych obszarów wykorzystuje się pojęcie pierwszego przedłużenia granicznego potoku. Jeśli bowiem M jest maksymalnym obszarem prostowalnym, to $J(M) = \operatorname{bd} M$ (zob. McCann [86], Proposition 2.6).

Omówienie wyników tej pracy rozpoczniemy od następującego wyniku wykorzystywanego w zasadniczej części tego opracowania.

Twierdzenie 3.15. ([B11], Corollary 2) *Niech M będzie obszarem prostowalnym oraz $p \in \operatorname{bd} M$. Wówczas zbiór $\operatorname{cl} M \setminus C_p$ jest zawarty w jednej ze składowych zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_p$.*

Następny z zamieszczonych tu wyników pokazuje, że zależność pomiędzy pojęciem maksymalnego obszaru prostowalnego a relacją współzbieżności do nieskończoności pokazana na przykładzie potoku Reeba zachodzi dla każdego potoku homeomorfizmów Brouwera.

Twierdzenie 3.16. ([B11], Theorem 4) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ będzie potokiem homeomorfizmów Brouwera. Wówczas każdy maksymalny obszar prostowalny M potoku $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ jest sumą klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności.*

Kolejny z prezentowanych tu wyników tej pracy implikuje, że punkty wewnętrzne klas abstrakcji nie mogą należeć do brzegu maksymalnych obszarów prostowalnych.

Twierdzenie 3.17. ([B11], Proposition 5) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ będzie potokiem homeomorfizmów Brouwera. Jeśli q należy do wnętrza pewnej klasy abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności, to $q \notin J(\mathbb{R}^2)$.*

Warto zaznaczyć tutaj, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Przykład homeomorfizmu Brouwera zanurzalnego w potok, dla którego istnieją punkty należące do brzegu pewnej klasy abstrakcji i nie będące elementami zbioru $J(\mathbb{R}^2)$ można znaleźć w pracy R. McCanna (zob. [86], Example 3.10).

Na mocy Twierdzenia 3.17 otrzymujemy, że każdy punkt zbioru $M \cap J(\operatorname{bd} M)$ należy do brzegu pewnej klasy abstrakcji zawartej w M. Zbiór $J(\operatorname{bd} M)$ może również zawierać punkty nie należące do M, czyli punkty brzegu maksymalnego obszaru prostowalnego M mogą również należeć do pierwszego przedłużenia granicznego punktów nie należących do M. Przedstawiony poniżej wynik mówi, że może się to zdarzyć jedynie wtedy, gdy orbita brzegowa sama stanowi klasę abstrakcji.

Twierdzenie 3.18. ([B11], Proposition 8) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ będzie potokiem homeomorfizmów Brouwera. Niech M będzie maksymalnym obszarem prostowalnym, $p \in \operatorname{bd} M$. Niech G_0 będzie klasą abstrakcji zawierającą p, która nie jest pojedynczą trajektorią. Wówczas $p \notin J(q)$ dla dowolnego q należącego do składowej zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_p$ nie zawierającej M.*

3.1.4 Pierwsze przedłużenie graniczne potoku homeomorfizmów Brouwera

W podrozdziale tym omówimy wyniki pochodzące z prac [B13], [B16] i [B19]. Dotyczą one głównie związku pomiędzy pierwszym przedłużeniem granicznym potoku homeomorfizmów Brouwera $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$, a klasami abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności określonej dla homeomorfizmu Brouwera f będącego elementem tego potoku. Pokażemy również, że pierwsze przedłużenie graniczne potoku homeomorfizmów Brouwera jest równe zbiorowi punktów silnie osobliwych dowolnego homeomorfizmu Brouwera należącego do tego potoku.

Przypomnijmy, że na mocy Twierdzenia 3.17, punkty wewnętrzne klas abstrakcji nie mogą należeć do pierwszego przedłużenia granicznego. W podrozdziale tym przedstawimy wynik mówiący, że suma wnętrz klas abstrakcji rozważanej relacji jest równa zbiorowi punktów regularnych homeomorfizmu Brouwera będącego elementem rozważanego potoku, więc w sposób naturalny pojawia się pytanie o związek pierwszego przedłużenia granicznego ze zbiorem punktów osobliwych.

W pracy [B13] opisujemy własności punktów należących do pierwszego przedłużenia granicznego przy pomocy relacji współzbieżności do nieskończoności. Rozpoczynamy od wyniku, w którym z założenia $q \in J(p)$ otrzymujemy, że p oraz q należą do brzegu tej samej klasy abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności.

Twierdzenie 3.19. ([B13], Theorem 2.1) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ będzie potokiem homeomorfizmów Brouwera. Niech G_0 będzie klasą abstrakcji, która nie jest pojedynczą trajektorią. Niech $p \in \operatorname{bd} G_0$, zaś H_0 będzie składową zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_p$ zawierającą $\operatorname{cl} G_0 \setminus C_p$. Wówczas dla każdego $q \in H_0$, jeśli $q \in J(p)$, to $q \in \operatorname{cl} G_0$.*

Przy dodatkowym założeniu o położeniu punktów należących do brzegu rozważanej klasy abstrakcji, Twierdzenie 3.19 można odwrócić.

Twierdzenie 3.20. ([B13], Theorem 3.2) *Niech $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$ będzie potokiem homeomorfizmów Brouwera. Niech G_0 będzie klasą abstrakcji, która nie jest pojedynczą trajektorią. Niech $p \in \operatorname{bd} G_0$, $q \in \operatorname{bd} G_0$ oraz $C_p \neq C_q$. Załóżmy, że punkty p i q należą do tej samej składowej zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus C_r$ dla pewnego $r \in G_0$. Wówczas $p \in J(q)$.*

Jeżeli opuścimy założenie o położeniu punktów $p, q \in \operatorname{bd} G_0$ w tej samej składowej dopełnienia pewnej trajektorii zawartej w G_0, teza powyższego twierdzenia na ogół nie zachodzi.

Praca [B16] pokazuje związek między relacją współzbieżności do nieskończoności określoną dla homeomorfizmu Brouwera zanurzalnego w potok a zbiorami punktów regularnych i osobliwych tego homeomorfizmu.

Omówienie wyników tej pracy rozpoczniemy od twierdzenia, które opisuje zbiór punktów regularnych homeomorfizmu Brouwera zanurzalnego w potok.

Twierdzenie 3.21. ([B16], Proposition 2.1) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Wówczas zbiór punktów regularnych homeomorfizmu f jest równy sumie wnętrz wszystkich klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności.*

Korzystając z Twierdzenia 3.21 wykazujemy następujący wynik o niezmienniczości zbioru punktów regularnych.

Twierdzenie 3.22. ([B16], Proposition 3.1) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Niech p będzie punktem regularnym. Wówczas kazdy punkt trajectorii $C_p = \{f^t(p) : t \in \mathbb{R}\}$ jest punktem regularnym.*

Przejdziemy teraz do wyników opisujących zbiór punktów osobliwych homeomorfizmu Brouwera zanurzalnego w potok. Z Twierdzenia 3.17 zamieszczonego w poprzednim podrozdziale otrzymujemy, że elementami pierwszego przedłużenia granicznego potoku homeomorfizmów Brouwera mogą być tylko punkty brzegowe klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności. Zatem z Twierdzenia 3.21 otrzymujemy, że do pierwszego przedłużenia granicznego mogą należeć tylko punkty osobliwe.

Przedstawiony poniżej wynik dotyczy związku zbioru punktów silnie osobliwych homeomorfizmu Brouwera i pierwszego przedłużenia granicznego potoku, w który ten homeomorfizm jest zanurzony.

Twierdzenie 3.23. ([B16], Proposition 3.1) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Niech p będzie punktem silnie osobliwym. Wówczas $J(p) \neq \emptyset$.*

Powyższe twierdzenie mówi, że zbiór punktów silnie osobliwych jest zawarty w pierwszym przedłużeniem granicznym, gdyż

$$\mathrm{J}(p) \neq \emptyset \Leftrightarrow p \in \mathrm{J}(\mathbb{R}^2).$$

Co więcej, okazuje się, że zbiory te są równe (zob. Twierdzenie 3.24). Zatem zbiór punktów brzegowych klas abstrakcji relacji współzbieżności do nieskończoności nie należących do pierwszego przedłużenia granicznego jest równy zbiorowi punktów słabo osobliwych.

Przedstawimy teraz twierdzenie, na mocy którego otrzymujemy wspomniany wyżej fakt, że zbiór punktów silnie osobliwych homeomorfizmu Brouwera jest równy pierwszemu przedłużeniu granicznemu potoku, do którego należy ten homeomorfizm.

Twierdzenie 3.24. ([B19], Corollary 3) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Wówczas $P^+(p) = \mathrm{J}^+(p)$ oraz $P^-(p) = \mathrm{J}^-(p)$ dla każdego $p \in \mathbb{R}^2$.*

Zasadniczą część dowodu powyższego twierdzenia stanowi rozumowanie prowadzące do wykazania inkluzji $\mathrm{J}^+(p) \subset P^+(p)$ (zob. [B19], Theorem 2). W dowodzie tej inkluzji ustalamy dowolny punkt $q \in \mathrm{J}^+(p)$. W celu wykazania, że $q \in P^+(p)$ ustalamy dowolny zbiór Jordana B zawierający w swym wnętrzu punkt p i pokazujemy, że $q \in \omega_f(B)$. Główną rolę w dowodzie odgrywają łuki K i L takie, że $K \subset B$, $p \in K$ i $q \in L$ mające co najwyżej jeden punkt wspólny z każdą z trajektorii potoku, tj. będące cięciami lokalnymi potoku. Korzystając z założenia $q \in \mathrm{J}^+(p)$ pokazujemy istnienie ciągu liczb naturalnych k_n dążącego do nieskończoności oraz ciągu punktów $w_n \in f^{k_n}(K) \cap L$ dążącego do q. Kładąc $z_n := f^{-k_n}(w_n)$ otrzymujemy ciąg punktów zbioru Jordana B o tej własności, że $f^{k_n}(z_n) \to q$, co oznacza, że $q \in \omega_f(B)$.

Z twierdzenia 3.24 otrzymujemy wnioski dotyczące zbioru punktów silnie osobliwych dla homeomorfizmu Brouwera zanurzalnego w potok oraz pierwszego przedłużenia granicznego potoków homeomorfizmów Brouwera.

Wniosek 3.25. ([B19], Corollary 4) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok. Wówczas pierwsze przedłużenia graniczne wszystkich potoków zawierających homeomorfizm f są równe.*

Wniosek 3.26. ([B19], Corollary 5) *Niech f będzie homeomorfizmem Brouwera zanurzalnym w potok $\{f^t : t \in \mathbb{R}\}$. Wówczas zbiory punktów silnie osobliwych wszystkich homeomorfizmów f^t, gdzie $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, są równe.*

Ostatni wniosek pozostanie prawdziwy, gdy zbiór punktów silnie osobliwych zastąpimy zbiorem punktów osobliwych. Wynika to z faktu, że zbiór punktów osobliwych jest domknięciem zbioru punktów silnie osobliwych (zob. Twierdzenie 2.5).

Na koniec tego podrozdziału pokażemy jeszcze rolę Twierdzeń 3.22 oraz 3.24 w wykazaniu, że dla dowolnego potoku homeomorfizmów Brouwera zbiory punktów silnie osobliwych, słabo osobliwych i regularnych są niezmiennicze względem tego potoku, tj. jeśli punkt należy do dowolnego z tych zbiorów, to cała trajektoria tego punktu zawarta jest w tym samym zbiorze.

Niezmienniczość zbiorów punktów regularnych wynika bezpośrednio z Twierdzenia 3.22. Z Twierdzenia 3.24 otrzymujemy natomiast równość pomiędzy zbiorem punktów silnie osobliwych homeomorfizmu Brouwera zanurzalnego w potok a pierwszym przedłużeniem granicznym tego potoku. Niezmienniczość zbioru punktów silnie osobliwych otrzymujemy więc z niezmienniczości pierwszego przedłużenia granicznego. Zatem również zbiór punktów słabo osobliwych jest niezmienniczy, gdyż pozostałe dwa z trzech rozpatrywanych tu zbiorów są niezmiennicze oraz suma tych trzech rozłącznych zbiorów jest całą płaszczyzną.

3.2 Inne wyniki

W tej części tego rozdziału przedstawione zostały wyniki, które nie są bezpośrednio powiązane z zasadniczym rozdziałem tego opracowania. Dotyczą one głównie rozwiązań i stabilności równań funkcyjnych, w tym problemu wyznaczania pierwiastków iteracyjnych i warunków gwarantujących sprzężenie topologiczne dla kawałkami monotonicznych odwzorowań ciągłych odcinka. Ponadto, można tutaj znaleźć wyniki dotyczące równań całkowych, różniczkowych i różnicowych oraz ich stabilności w sensie Ulama.

3.2.1 Równanie różniczkowe d'Alemberta

W pracy [B14] badane jest równanie różniczkowe cząstkowe d'Alemberta

$$uu_{xy} - u_x u_y = 0. \tag{3.15}$$

Równanie (3.15) traktujemy jako podrozmaitość Σ w przestrzeni dżetów $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. W przestrzeni tej rozważamy kanoniczny zewnętrzny układ różniczkowy (ang. *exterior differential system*) $(\mathcal{I}, \omega)$, gdzie $\mathcal{I}$ jest ideałem różniczkowym generowanym przez 1-formy

$$\begin{aligned} \theta_1 = &\ du - u_x dx - u_y dy, \\ \theta_2 = &\ du_x - u_{xx} dx - u_{xy} dy, \\ \theta_3 = &\ du_y - u_{xy} dx - u_{yy} dy, \end{aligned}$$

zaś $\omega = dx \wedge dy$ jest 2-formą wyznaczającą warunek niezależności. Oznacza to, że zmiennymi niezależnymi są x i y, a rozmaitościami całkowymi są podniesienia wykresów funkcji $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ do $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Kanoniczny zewnętrzny układ różniczkowy nazywany jest strukturą kontaktową.

Niech I będzie podmodułem modułu 1-form $\Omega^1(\Sigma)$ generowanym przez θ_1, θ_2, θ_3, tj.

$$I = \operatorname{span}\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}.$$

Niech

$$J = \operatorname{span}\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, dx, dy\}.$$

Dla struktury kontaktowej piszemy (I, J) zamiast $(\mathcal{I}, \omega)$. Para (I, J) jest liniowym układem Pfaffa, tj. $d\theta_i \equiv 0 \mod J$ dla $1 \le i \le 3$, ponieważ każdy układ równań różniczkowych wyrażony jako przestrzeń kontaktowa na wyznaczonej przez niego podrozmaitości $\Sigma \subset J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jest liniowym układem Pfaffa.

Istnienie analitycznych rozwiązań tego równania wykazujemy w oparciu o twierdzenie Cartana-Kählera dla liniowych układów Pfaffa zaczerpnięte z książki T. A. Iveya i J. M. Landsberga (zob. [55], str. 176). W celu wykazania inwolutywności występującej w założeniach tego twierdzenia dokonujemy zmiany zmiennych niezależnych i z równania (3.15) otrzymujemy równanie

$$uu_{yy} + uu_{xy} - u_x u_y - u_y^2 = 0. \tag{3.16}$$

Po skorzystaniu z twierdzenia Cartana-Kählera powracamy do zmiennych x oraz y wyjściowego równania. Przy użyciu tych zmiennych główny wynik pracy [B14] możemy sformułować w następujący sposób.

Twierdzenie 3.27. ([B14], Corollary 5.2) *Dla każdego punktu* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *istnieje jedyne analityczne rozwiązanie* u *równania (3.15) określone w otoczeniu punktu* (x_0, y_0) *spełniające warunki*

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) = &\ u_0, \\ u_x(x + x_0, -x + y_0) = &\ f(x), \qquad |x| < \varepsilon \\ u_y(x + x_0, -x + y_0) = &\ g(x), \end{aligned}$$

dla pewnego $\varepsilon > 0$, *gdzie* $u_0 \neq 0$ *jest dowolną stałą, a* f, g *dowolnymi funkcjami analitycznymi.*

3.2.2 Inwolucje płaszczyzny

W pracy [B15] wyznaczone zostały wszystkie rozwiązania równania funkcyjnego Babbage'a

$$\varphi^2 = \mathrm{id} \tag{3.17}$$

należące do klasy funkcji wymiernych $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \setminus (L_1 \cup L_2) \to \mathbb{R}^2 \setminus (L_1 \cup L_2)$ postaci

$$\varphi_\lambda(x, y) := \left(\frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{a_4 x + a_5 y + a_6}, \ \frac{b_1 y + b_2 x + b_3}{b_4 y + b_5 x + b_6} \right), \tag{3.18}$$

gdzie $\lambda = (a_1, ..., a_6, b_1, ..., b_6) \in \mathbb{R}^{12}$, zaś L_1 i L_2 oznaczają proste złożone z punktów płaszczyzny dla których odpowiednie mianowniki występujące w definicji funkcji $\varphi_\lambda(x, y)$ zerują się.

Zastosowana metoda polegała na przekształconiu równania (3.17) na układ równań wielomianowych wielu zmiennych, a następnie przedstawieniu zbioru algebraicznego będącego zbiorem rozwiązań tego układu równań algebraicznych jako sumy rozmaitości algebraicznych otrzymanych za pomocą rozkładu prymarnego. Umożliwiło to podanie warunków koniecznych i wystarczających dla 12 parametrów $a_i, b_i, i = 1, 2, ..., 6$ na to, aby funkcja φ_λ była inwolucją, tj. aby φ_λ spełniała równanie (3.17).

Wstawiając (3.18) do równania (3.17) i porównując współczynniki występujące po obu stronach otrzymanego równania dostajemy układ równań wielomianowych postaci

$$f_1 = f_2 = ... = f_{18} = 0, \tag{3.19}$$

przy czym każdy z wielomianów f_j, dla $j = 1, 2, ..., 18$, jest wielomianem jednorodnym stopnia 3 zmiennych $a_i, b_i, i = 1, 2, ..., 6$. Wyznaczenie rozwiązań równania $\varphi_\lambda^2 = \mathrm{id}$ jest więc równoważne wyznaczeniu rozwiązania układu równań wielomianowych (3.19).

Proces wyznaczania rozwiązań rozważanego układu równań wielomianowych rozdzielamy na 4 etapy poprzez rozważenie następujących przypadków:

$(H1)$ $a_4 = a_5 = a_6 - 1 = b_4 = b_5 = b_6 - 1 = 0$;

$(H2)$ $a_4 = a_5 = a_6 - 1 = 0$ oraz $b_4^2 + b_5^2 \neq 0$;

$(H3)$ $b_4 = b_5 = b_6 - 1 = 0$ oraz $a_4^2 + a_5^2 \neq 0$;

$(H4)$ $(a_4^2 + a_5^2)(b_4^2 + b_5^2) \neq 0$.

W pierwszych trzech przypadkach przy wyznaczaniu rozwiązań wykorzystano bazy Gröbnera, zaś w ostatnim z nich skorzystano z algorytmu dzielenia opisanego w książce D.E. Knutha ([23], str. 368–369). W tym miejscu omówimy tylko przypadki (H1) - (H3).

Omówienie rozpoczynamy od przypadku (H1).

Twierdzenie 3.28. ([B15], Theorem 1) *Niech $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem*

$$\varphi_\lambda(x, y) := (a_1 x + a_2 y + a_3, \quad b_1 y + b_2 x + b_3) .$$

Wówczas funkja φ_λ jest inwolucją wtedy i tylko wtedy, gdy z dokładnością do funkcji sprzęgającej danej wzorem $H(x, y) = (y, x)$ ma jedną z następujących postaci:

(1) $(x, y) \mapsto (x, \quad y)$.

(2) $(x, y) \mapsto (-x + a_3, \quad -y + b_3)$.

(3) $(x, y) \mapsto (x, \quad -y + b_2 x + b_3)$.

(4) $(x, y) \mapsto (-x + a_3, \quad y + b_2 x - \frac{a_3 b_2}{2})$.

(5) $(x, y) \mapsto \Big(a_1 x + a_2 y + a_3, \quad -a_1 y + \frac{1-a_1^2}{a_2} x - \frac{a_3(a_1+1)}{a_2}\Big)$.

W dowodzie tego twierdzenia rozważamy ideał $I_1 := \langle f_1, ..., f_{24}\rangle$, przy czym

$$\begin{aligned} f_{19} &:= a_4, \quad f_{20} := a_5, \quad f_{21} := a_6 - 1, \\ f_{22} &:= b_4, \quad f_{23} := b_5, \quad f_{24} := b_6 - 1 \end{aligned}$$

są wielomianami pochodzącymi z warunku (H1). Minimalny rozkład prymarny ideału I_1 otrzymujemy za pomocą funkcji *minAssGTZ* pochodzącej z biblioteki *primdec.lib* programu Singular opartej na algorytmie, którego twórcami są Gianni, Trager i Zacharias. Stosując tę funkcję względem porządku dopuszczalnego

$$b_6 > b_5 > b_4 > a_6 > a_5 > a_4 > b_3 > b_2 > b_1 > a_3 > a_2 > a_1$$

w pierścieniu $\mathbb{Q}[b_6, b_5, b_4, a_6, a_5, a_4, b_3, b_2, b_1, a_3, a_2, a_1]$ otrzymujemy minimalny rozkład prymarny ideału I_1 składający się z trzech ideałów I_{11}, I_{12}, I_{13}, gdzie

$$\begin{aligned} I_{11} &= \langle a_1 - 1, a_2, a_3, b_1 - 1, b_2, b_3, a_4, a_5, a_6 - 1, b_4, b_5, b_6 - 1\rangle, \\ I_{12} &= \langle a_1 + 1, a_2, b_1 + 1, b_2, a_4, a_5, a_6 - 1, b_4, b_5, b_6 - 1\rangle, \\ I_{13} &= \langle b_1 + a_1, b_2 a_2 + a_1^2 - 1, b_3 a_1 - b_3 - b_2 a_3, \\ &\quad\ b_3 a_2 + a_3 a_1 + a_3, a_4, a_5, a_6 - 1, b_4, b_5, b_6 - 1\rangle. \end{aligned}$$

Ponieważ I_{11}, I_{12}, I_{13} są minimalnymi ideałami pierwszymi stowarzyszonymi z I_1, więc $\mathbf{V}(I_1) = \mathbf{V}(I_{11}) \cup \mathbf{V}(I_{12}) \cup \mathbf{V}(I_{13})$, przy czym dla dowolnego ideału I przez $\mathbf{V}(I)$ oznaczamy zbiór zer tego ideału. Ponadto, obliczone w ten sposób zbiory generatorów ideałów I_{11}, I_{12}, I_{13} są ich zredukowanymi bazami Gröbnera.

Zauważmy, że ideały I_{11} oraz I_{12} odpowiadają odpowiednio postaciom (1) oraz (2) funkcji φ_λ z dowodzonego twierdzenia. O ideale I_{13} wykazujemy natomiast, że odpowiada on postaciom (3), (4) w przypadku, gdy $a_2 = 0$, oraz postaci (5) w przypadku, gdy $a_2 \neq 0$.

Dla przypadku (H2) otrzymujemy minimalny rozkład prymarny składający się w dwóch ideałów.

Twierdzenie 3.29. ([B15], Theorem 2) *Niech funkcja* $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \setminus L_2 \to \mathbb{R}^2 \setminus L_2$ *będzie dana wzorem*

$$\varphi_\lambda(x, y) := \left(a_1x + a_2y + a_3, \ \ \frac{b_1y + b_2x + b_3}{b_4y + b_5x + b_6} \right), \ \ b_4^2 + b_5^2 \neq 0.$$

Wówczas funkja φ_λ *jest inwolucją wtedy i tylko wtedy, gdy z dokładnością do funkcji sprzęgającej danej wzorem* $H(x, y) = (y, x)$ *ma jedną z następujących postaci::*

(1) $(x, y) \mapsto \left(x, \ \ \frac{b_1y+b_2x+b_3}{b_4y-b_1} \right)$.

(2) $(x, y) \mapsto \left(-x + a_3, \ \ \frac{b_1y+b_3}{b_4y-b_1} \right)$.

W dowodzie tego twierdzenia stosujemy funkcję *minAssGTZ* programu Singular do ideału $I_2 := \langle f_1, ..., f_{21}, g_3 \rangle$, gdzie g_3 jest wielomianem danym wzorem $g_3 := 1 - c_3(b_4^2 + b_5^2)^2$, przy czym c_3 jest dodatkową zmienną. Zauważmy, że wynik dla przypadku (H3) możemy otrzymać bezpośrednio z Twierdzenia 3.29.

3.2.3 Funkcje kawałkami monotoniczne

W pracach [B17] i [B22] rozważamy problem sprzężenia topologicznego ciągłych kawałkami silnie monotonicznych funkcji przedziału.

Mówimy, że funkcje ciągłe $f : I \to I$ oraz $g : J \to J$, gdzie I oraz J są niezdegenerowanymi przedziałami domkniętymi, są *sprzężone topologicznie* jeśli istnieje homeomorfizm $\varphi : I \to J$ taki, że

$$\varphi \circ f \ = \ g \circ \varphi. \tag{3.20}$$

Niech $I := [a, b]$, gdzie $a < b$. Niech $r \in \mathbb{N}$. Mówimy, że funkcja $f : I \to I$ jest *kawałkami silnie monotoniczna* lub *r-modalna* jeśli jest ona ciągłą oraz istnieje dla niej podział odcinka $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r < ... < t_{r+1} = b$ taki, że f jest silnie monotoniczna na każdym z przedziałów $[t_i, t_{i+1}]$ dla $i = 0, 1, \ldots, r$, oraz f nie jest monotoniczna w żadnym otoczeniu punktu t_i dla $i = 1, \dots, r$. Punkty $t_1, \dots, t_r$, będziemy nazywać *punktami niemonotoniczności* funkcji f.

Niech $\mathcal{S}_r(I)$ będzie rodziną wszystkich r-modalnych funkcji przedziału I na siebie, gdzie r jest liczbą całkowitą nieujemną. Dla funkcji $f \in \mathcal{S}_r(I)$ oznaczmy przez $N(f)$ liczbę punktów niemonotoniczności tej funkcji. Zauważmy, że

$$0 = N(f^0) \leq N(f) \leq N(f^2) \leq \cdots \leq N(f^n) \leq N(f^{n+1}) \leq \cdots,$$

gdzie f^n oznacza n-tą iterację funkcji f. Niech $H(f)$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nieujemną n taką, że $N(f^n) = N(f^{n+1})$, o ile taka liczba istnieje. Jeśli nie istnieje liczba całkowita nieujemna n taka, że $N(f^n) = N(f^{n+1})$, to kładziemy $H(f) := \infty$. Liczbę $H(f)$ nazywamy *stopniem niemonotoniczności* funkcji f.

W pracy [B17] rozważamy rodzinę

$$\mathcal{S}_r^1(I) := \big\{ f \in \mathcal{S}_r(I) : f(x) < x \text{ dla } x \in (t_0, t_1], f(t_1) \geq f(t_{r+1}), f(t_{2i}) = \\ f(t_0) \,\text{dla}\, i = 0, \dots, \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor, f(t_{2j-1}) = f(t_1) \,\text{dla}\, j = 2, \dots, \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor \big\}.$$

Z określenia tej rodziny otrzymujemy, że $H(f) = 1$ dla każdej funkcji $f \in \mathcal{S}_r^1(I)$.

Główny wynik pracy [B17] zawiera warunek konieczny i wystarczający na to, aby funkcje $f \in \mathcal{S}_r^1(I)$ i $g \in \mathcal{S}_r^1(J)$ były sprzężone topologicznie.

Twierdzenie 3.30. ([B17], Theorem 1) *Niech r będzie liczbą całkowitą nieujemną, $I = [a, b]$ oraz $J = [c, d]$ dla pewnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takich, że $a < b$ oraz $c < d$. Załóżmy, że dla funkcji $f \in \mathcal{S}_r^1(I)$ oraz $g \in \mathcal{S}_r^1(J)$ odpowiednio $(t_i)_{i=1}^r$ oraz $(s_i)_{i=1}^r$ są punktami niemonotoniczności, zaś $t_0 = a$, $t_{r+1} = b$, $s_0 = c$, $s_{r+1} = d$. Wówczas f, g są sprzężone topologicznie wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z następujących warunków*

(i) istnieje liczba całkowita dodatnia m taka, że $f(t_{r+1}) = f^m(t_1)$, $g(s_{r+1}) = g^m(s_1)$;

(ii) $f(t_{r+1}) = t_0$, $g(s_{r+1}) = s_0$;

(iii) istnieje liczba całkowita dodatnia m taka, że $f(t_{r+1}) \in (f^{m+1}(t_1), f^m(t_1))$, $g(s_{r+1}) \in (g^{m+1}(s_1), g^m(s_1))$.

Ponadto, w każdym z przypadków (i) oraz (ii) dowolny homeomorfizm $\phi_0 : [f(t_1), t_1] \to [g(s_1), s_1]$ taki, że

$$\phi_0(t_1) = s_1, \quad \phi_0(f(t_1)) = g(s_1)$$

można przedłużyć na I do homeomorficznego rozwiązania równania (3.20), zaś w przypadku (iii) takie przedłużenie istnieje jeśli ϕ_0 spełnia dodatkowo warunek

$$\phi_0(f_0^{-m}(f(t_{r+1}))) = g_0^{-m}(g(s_{r+1})),$$

gdzie $f_0 := f|_{[t_0,t_1]}$, $g_0 := g|_{[s_0,s_1]}$.

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy wniosek dotyczący sprzężenia topologicznego funkcji $f \in \mathcal{S}_r^1(I)$ z jej iteracjami.

Wniosek 3.31. ([B17], Corollary 1) *Niech r będzie liczbą całkowitą nieujemną, $I = [a,b]$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$ takich, że $a < b$. Załóżmy, że funkcja $f \in \mathcal{S}_r^1(I)$ spełnia jeden z warunków $f(t_{r+1}) = t_0$, $f(t_{r+1}) = f(t_1)$. Wówczas f oraz f^n are są sprzężone topologicznie dla każdej liczby całkowitej dodatniej n.*

Korzystając z tego wniosku wykazujemy, że każdy pierwiastek iteracyjny $g \in \mathcal{S}_r^1(I)$ funkcji $f \in \mathcal{S}_r^1(I)$, tj. rozwiązanie równania $g^n = f$ wyraża się wzorem

$$g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi,$$

gdzie ϕ jest homeomorfizmem realizującym sprzężenie topologiczne funkcji f oraz f^n (por. [B17], Corollary 2). Dlatego też, konstrukcję opisaną w Twierdzeniu 3.30 można zastosować do wyznaczenia pierwiastków iteracyjnych funkcji $f \in \mathcal{S}_r^1(I)$ spełniającej założenia Wniosku 3.31.

W pracy [B22] badamy natomiast następującą klasę funkcji r-modalnych

$$\mathcal{M}_r(I) := \big\{ f \in \mathcal{S}_r(I) : f([t_0, t_1]) \subseteq [t_0, t_1],\ f(x) < x \text{ dla } x \in (t_1, t_{r+1}) \big\}.$$

oraz jest podklasy postaci

$$\mathcal{M}_r^H(I) := \{ f \in \mathcal{M}_r(I) : H = H(f) \}$$

dla $H \in \mathbb{Z}$, $H > 0$. Zauważmy, że $\mathcal{S}_r^1(I) \subset \mathcal{M}_r^1(I)$.

Z definicji stopnia niemonotoniczności wynika, że dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}_r(I)$, jeśli $H(f)$ ma wartość skończoną, to $H(f)$ jest równe najmniejszej liczbie całkowitej nieujemnej n o tej własności, że dla każdego $x \in I$ zachodzi warunek $f^n(x) \in I_0$, gdzie $I_0 := [t_0, t_1]$.

Konstruując homeomorficzne rozwiązania równania (3.20) dla funkcji $f \in \mathcal{M}_r^H(I)$ oraz $g \in \mathcal{M}_r^H(J)$ potrzebujemy porównać dla różnych $x_1, x_2 \in I$ wartości najmniejszych liczb całkowitych nieujemnych n_1 oraz n_2 takich, że $f^{n_1}(x_1) \in I_0$ oraz $f^{n_2}(x_2) \in I_0$. Dlatego też w pracy [B22], dla $f \in \mathcal{M}_r(I)$ oraz $x \in I$ wprowadzamy pojęcie *stopnia niemonotoniczności* punktu x względem f warunkiem

$$H_f(x) := \inf\{ n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in I_0 \},$$

where $I_0 = [t_0, t_1]$.

Związek pomiędzy wartościami stopnia niemonotoniczności funkcji f a stopnia niemonotoniczności punktu x względem f opisuje następujący wynik.

Twierdzenie 3.32. ([B22], Proposition 2.2) *Dla każdego $f \in \mathcal{M}_r(I)$*

$$H(f) = \sup\{ H(f, x) : x \in I \}.$$

Ponadto, jeśli $H := H(f) < \infty$, *to*

$$H(f) = \max\{H(f,p_i) : i = 1,\dots,N(f^H)+1\},$$

gdzie p_i *są punktami niemonotoniczności funkcji* f^H *dla* $i = 1,\dots,N(f^H)$ *oraz* $p_{N(f^H)+1} = t_{r+1}$.

Warto w tym miejscu podkreślić, że wartość $H(f)$ nie musi być równa $\max\{H(f,t_i) : i = 0,1,...,r+1\}$ (zob. [B22], Remark 2.1).

Dla dowolnych $f \in \mathcal{M}_r(I)$ oraz $x \in I$ rozważamy ciąg liczb naturalnych $I_f(x) := (i_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ określony w następujący sposób

$$i_k(x) := \begin{cases} l & \text{gdy} \quad f^k(x) \in I_l \setminus \{t_1,\dots,t_r\},\ l \in \{0,\dots r\}, \\ m & \text{gdy} \quad f^k(x) \in I_m \cap I_{m+1} = \{t_m\},\ m \in \{0,\dots r-1\}. \end{cases}$$

Zauważmy, że dla każdego $x \in I$ ciąg $(i_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ jest słabo malejący.

Ciągi iteracji punktów niemonotoniczności funkcji $f \in \mathcal{M}_r^H(I)$ oraz $g \in \mathcal{M}_r^H(J)$ odgrywają zasadniczą rolę w zamieszczonym poniżej głównym wyniku pracy [B22].

Twierdzenie 3.33. ([B22], Theorem 4.1) *Niech* $f \in \mathcal{M}_r^H(I)$ *oraz* $g \in \mathcal{M}_r^H(J)$. *Wówczas* f, g *są sprzężone topologicznie wtedy i tylko wtedy, gdy* $I_f(t_i) = I_g(s_i)$ *dla* $i = 0,1,...,r+1$ *oraz istnieje silnie rosnąca funkcja* $\varphi_0 : I_0 \to J_0$, *która realizuje sprzężenie topologiczne funkcji* f_0, g_0 *oraz*

$$\text{(i)} \qquad \varphi_0 \circ f^{m_i}(t_i) = g^{m_i}(s_i), \quad i = 0,1,...,r+1, \quad \textit{gdy } H < \infty, \tag{3.21}$$

$$\text{(ii)} \qquad \varphi_0 \circ f^{m_i}(t_i) = g^{m_i}(s_i), \quad i = 0,1,...,r, \qquad \textit{gdy } H = \infty, \tag{3.22}$$

gdzie $m_i := H(t_i) = H(s_i)$, $f_0 := f|_{I_0}$, $g_0 := g|_{I_0}$. *Ponadto, istnieje jedyne rozszerzenie* φ *funkcji* φ_0, *które realizuje sprzężenie topologiczne funkcji* f, g.

3.2.4 Rozwiązania przybliżone równania całkowego Volterry

Praca [B21] zawiera wyniki dotyczące przybliżonych rozwiązań następującego uogólnienia równania całkowego Volterry

$$\psi(x) = \int_a^x N(x,t,\psi(\alpha(x,t))\,dt + G(x), \qquad x \in I, \tag{3.23}$$

gdzie I jest przedziałem rzeczywistym postaci $[a,\infty)$ lub $[a,b]$ lub $[a,b)$ dla pewnych $a < b$, $\int$ oznacza całkę Bochnera, $G : I \to B$, $N : I \times I \times B \to B$ oraz $\alpha : I \times I \to I$ są danymi funkcjami ciągłymi, zaś $\psi : I \to B$ szukaną funkcją ciągłą. Dodatkowo w całej pracy zakładamy, że istnieje funkcja ciągła $L : I \times I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ taka, że

$$\|N(x,t,u_1) - N(x,t,u_2)\| \le L(x,t,\|u_1 - u_2\|), \qquad x,t \in I,\ u_1,u_2 \in B \tag{3.24}$$

oraz

$$L(x,t,s_1) \leq L(x,t,s_2), \qquad x,t \in I,\ 0 \leq s_1 \leq s_2. \tag{3.25}$$

Niech $\mathcal{C}_B(I)$ oznacza przestrzeń wszystkich funkcji ciągłych odwzorowujących I w B, zaś $\mathcal{C}_{\mathbb{R}_+}(I)$ przestrzeń wszystkich funkcji ciągłych odwzorowujących I w $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$. Niech $\mathcal{T} : \mathcal{C}_B(I) \to B^I$ oraz $\Lambda : \mathcal{C}_{\mathbb{R}_+}(I) \to {\mathbb{R}_+}^I$ będą operatorami określonymi w następujący sposób

$$\mathcal{T}f(x) := \int_a^x N\big(x,t,f(\alpha(x,t))\big)\,dt + G(x), \qquad f \in \mathcal{C}_B(I), x \in I, \tag{3.26}$$

$$\Lambda f(x) := \int_a^x L\big(x,t,\eta(\alpha(x,t))\big)\,dt, \qquad \eta \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}_+}(I), x \in I, \tag{3.27}$$

gdzie C^D oznacza rodzinę wszystkich funkcji określonych na niepustym zbiorze D o wartościach w zbiorze C.

Dla dowolnych $\varepsilon \in {\mathbb{R}_+}^I$ oraz $\gamma \in {\mathbb{R}_+}^I$ definiujemy

$$L_\varepsilon(\gamma) := \inf\{s \in \mathbb{R}_+ : \gamma(x) \leq s\varepsilon(x) \text{ dla } x \in I\},$$

przy czym zakładamy, że $\inf \emptyset = \infty$. Ponadto, dla każdego $\phi \in B^I$ definiujemy funkcję $\|\phi\| \in {\mathbb{R}_+}^I$, kładąc

$$\|\phi\|(x) := \phi(x), \qquad x \in I.$$

Przypomnijmy, że funkcję $h \in {\mathbb{R}_+}^{\mathbb{R}_+}$ nazywamy podaddytywną jeśli

$$h(s+t) \leq h(s) + h(t), \qquad s,t \in \mathbb{R}_+.$$

Zamieszczony poniżej główny wynik pracy [B21] mówi o istnieniu dla danego rozwiązania przybliżonego równania (3.23) rozwiązania dokładnego tego równania (w klasie funkcji ciągłych) wraz z oszacowaniem odległości między nimi.

Twierdzenie 3.34. ([B21], Theorem 1) *Niech $\varphi \in \mathcal{C}_B(I)$, gdzie $I = [a,b)$ lub $I = [a,b]$ dla pewnych $a < b$. Niech $\varepsilon \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}_+}(I)$ będzie dane wzorem*

$$\varepsilon(x) := \left\|\varphi(x) - \int_a^x N\big(x,t,\varphi(\alpha(x,t))\big)\,dt - G(x)\right\|, \quad x \in I. \tag{3.28}$$

Załóżmy, że

$$\sigma_0(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n \varepsilon(x) < \infty, \qquad x \in I. \tag{3.29}$$

Wówczas $\mathcal{T}(\mathcal{C}_B(I)) \subset \mathcal{C}_B(I)$, dla każdego $x \in I$ istnieje granica

$$\psi(x) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}^n \varphi(x) \tag{3.30}$$

oraz funkcja $\psi \in B^I$ *określona w ten sposób jest ciągłym rozwiązaniem równania* (3.23) *spełniającym warunek*

$$\|\psi(x) - \varphi(x)\| \le \sigma_0(x), \quad x \in I. \tag{3.31}$$

Ponadto, jeśli funkcja $L(x,t,\cdot)$ *jest podaddytywna dla dowolnych* $x,t \in I$, *to dla każdej funkcji* $\eta : I \to \mathbb{R}_+$ *takiej, że*

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^n \eta(x) = 0, \qquad x \in I, \tag{3.32}$$

funkcja ψ *dana wzorem* (3.30) *jest jedynym rozwiązaniem równania* (3.23) *takim, że*

$$L_{\sigma_0+\eta}(\|\psi - \varphi\|) < \infty. \tag{3.33}$$

W powyższym twierdzeniu zakładamy, że przedział I jest skończony. W celu wykazania analogicznego wyniku dla przedziału nieskończonego potrzebujemy dodatkowego założenia o podaddytywności funkcji $L(x,t,\cdot)$ (por. [B21], Corollary 2). Założenie to występuje w Twierdzeniu 3.34, ale tylko w kontekście jednoznaczności rozwiązań równania (3.23).

Z Twierdzenia 3.34 otrzymujemy wniosek, którego zastosowanie pokażemy kończąc omówienie pracy [B21].

Wniosek 3.35. ([B21], Corollary 3) *Niech* $\varphi \in \mathcal{C}_B(I)$, *gdzie* $I = [a,b)$ *lub* $I = [a,b]$ *dla pewnych* $a < b$. *Niech* $\varepsilon : I \to \mathbb{R}_+$ *będzie dane wzorem* (3.28). *Załóżmy, że istnieją funkcje ciągłe* $\varepsilon_0 : I \to \mathbb{R}_+$, $L : I \times I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *oraz* $K : I \to [0,1)$ *takie, że* $\varepsilon \le \varepsilon_0$, *zachodzą warunki* (3.24), (3.25) *oraz*

$$\int_a^x L(x,t,K(\alpha(x,t))^n \varepsilon_0(\alpha(x,t)))\,dt \le K(x)^{n+1}\varepsilon_0(x), \quad x \in I, n \in \mathbb{N}. \tag{3.34}$$

Wówczas $\psi : I \to B$ *dane wzorem* (3.30) *jest ciągłym rozwiązaniem równania* (3.23) *takim, że*

$$\|\psi(x) - \varphi(x)\| \le \frac{\varepsilon_0(x)}{1 - K(x)}, \quad x \in I. \tag{3.35}$$

Rozważmy równanie

$$\psi(x) = \int_a^x (x-t)\,\psi(t)\,dt + G(x), \quad x \in [0,1], \tag{3.36}$$

gdzie $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Równanie to ma postać (3.23), gdzie $I = [0,1]$, $B = \mathbb{R}$, $N(x,t,u) = (x-t)\,u$ dla $x,t \in [0,1]$, $u \in \mathbb{R}$ oraz $\alpha(x,t) = t$ dla $x,t \in [0,1]$. Równanie (3.36) ma jedyne rozwiązanie ψ jako liniowe równanie Volterry typu splotowego. W przypadku, gdy $G(x) = x$ rozwiązanie to można podać jawnie w postaci wzoru, mianowicie $\psi(x) = \sinh x$.

Niech $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, zaś c stałą rzeczywistą dodatnią taką, że

$$|\varphi(x) - \int_a^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt - G(x)| \le c, \quad x \in [0,1],$$

tj. bierzemy $\varepsilon_0(x) = c$ dla $x \in [0,1]$. Zauważmy, że warunek (3.34) zachodzi dla K danego wzorem $K(x) = \frac{1}{2}$ dla $x \in [0,1]$. Z Wniosku 3.35 otrzymujemy, że

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le 2\,c, \quad x \in [0,1],$$

gdzie ψ jest jedynym rozwiązaniem równania (3.36). Ponadto, jeśli $|G(x) - x| < c$ dla $x \in [0,1]$, to

$$|\varphi(x) - \sinh x| \le 4\,c, \quad x \in [0,1].$$

3.2.5 Model kolejkowy dla sieci LAN

W pracy [B24] rozważamy równanie funkcyjne

$$\begin{aligned}(M(x,y) - xy)\,P(x,y) = {} & (1-y)(M(x,0) + \widehat{r}_1\xi_2 xy)P(x,0) \\ & + (1-x)(M(0,y) + \widehat{r}_2\xi_1 xy)P(0,y) \\ & - (1-x)(1-y)M(0,0)P(0,0),\end{aligned} \tag{3.37}$$

dla ustalonych $r_j, s_j \in (0,1)$, $j = 1,2$, gdzie

$$M(x,y) = (\widehat{r}_1 + r_1\widehat{s}_1 y + \xi_1 xy)(\widehat{r}_2 + r_2\widehat{s}_2 x + \xi_2 xy), \tag{3.38}$$

$\xi_j = r_j s_j$ dla $j = 1,2$ oraz $\widehat{q} = 1 - q$ dla dowolnego $q \in \mathbb{R}$. Funkcja szukana P określona jest dla $x, y \in \overline{D}$, gdzie $\overline{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$.

Równanie (3.37) pojawia się w badaniach dwuwymiarowych modeli kolejkowych dla sieci LAN i należy do klasy równań wykorzystywanych podczas modelowania komunikacji sieciowej. Ogólna postać równań tej klasy jest następująca

$$\begin{aligned}C_1(x,y)P(x,y) = {} & C_2(x,y)P(x,0) + C_3(x,y)P(0,y) \\ & + C_4(x,y)P(0,0) + C_5(x,y),\end{aligned} \tag{3.39}$$

gdzie C_j, dla $j = 1, ..., 5$, są danymi funkcjami dwóch zmiennych zespolonych x, y. Wstawiając do równania (3.39)

$$\begin{aligned}C_1(x,y) &= (\widehat{r}_1 + r_1\widehat{s}_1 y + \xi_1 xy)(\widehat{r}_2 + r_2\widehat{s}_2 x + \xi_2 xy) - xy, \\ C_2(x,y) &= (1-y)\widehat{r}_1(\widehat{r}_2 + r_2\widehat{s}_2 x + \xi_2 xy), \\ C_3(x,y) &= (1-x)\widehat{r}_2(\widehat{r}_1 + r_1\widehat{s}_1 y + \xi_1 xy), \\ C_4(x,y) &= -(1-x)(1-y)\widehat{r}_1\,\widehat{r}_2, \\ C_5(x,y) &= 0,\end{aligned} \tag{3.40}$$

otrzymujemy równanie (3.37).

Omówienie wyników pracy [B24] rozpoczniemy od ogólnego wyniku dotyczącego równania (3.37). Rozpatrywać je będziemy na zbiorze T^2 dla dowolnego $T \subset \mathbb{C}$ takiego, że $0 \in T$. Niech

$$\mathcal{K} := \{(x, y) \in T^{\,2} : C_1(x, y) = 0\},$$
$$\mathcal{K}_0 := \{x \in T : (x, 0) \in \mathcal{K}\}, \qquad \mathcal{K}^0 := \{x \in T : (0, x) \in \mathcal{K}\}.$$

Poniższe twierdzenie dostarcza opisu wszystkich rozwiązań $P : T^2 \to \mathbb{C}$ równania (3.37) (w szczególności, również analitycznych rozwiązań dla $T = \overline{D}$).

Twierdzenie 3.36. ([B24], Theorem 2.1) *Jeśli funkcja $P : T^2 \to \mathbb{C}$ spełnia równanie* (3.37)*, to istnieją funkcje $f, g : T \to \mathbb{C}$ takie, że $f(0) = g(0)$,*

$$C_2(x, y)f(x) + C_3(x, y)g(y) + C_4(x, y)g(0) = 0, \qquad (x, y) \in \mathcal{K}, \tag{3.41}$$

oraz

$$P(x, y) = \frac{C_2(x, y)f(x) + C_3(x, y)g(y) + C_4(x, y)g(0)}{C_1(x, y)}, \qquad (x, y) \in T^{\,2} \setminus \mathcal{K}, \tag{3.42}$$

gdzie C_1, C_2, C_3, C_4 są postaci (3.40)*. W szczególności,*

$$P(x, 0) = f(x), \qquad P(0, y) = g(y), \qquad x \in T \setminus \mathcal{K}_0, y \in T \setminus \mathcal{K}^0. \tag{3.43}$$

Ponadto, jeśli $T = \overline{D}$, to każda funkcja $P : T^{\,2} \to \mathbb{C}$ określona wzorem (3.42) *dla pewnych funkcji ciągłych $f, g : T \to \mathbb{C}$, dla których zachodzą warunki $f(0) = g(0)$ oraz* (3.41)*, spełnia równanie* (3.37)*.*

Twierdzenie 3.36 pokazuje, że przy poszukiwaniu rozwiązania $P : \overline{D}^2 \to \mathbb{C}$ równania (3.37) zarówno w klasie funkcji analitycznych, jak również w klasie funkcji ciągłych, kluczowe znaczenie ma znalezienie odpowiednio, par funkcji analitycznych lub ciągłych $f, g : \overline{D} \to \mathbb{C}$ spełniających warunek (3.41) (dla każdego P funkcje te są wyznaczone jednoznacznie na mocy (3.43)). Dlatego też skoncentrujemy się teraz na warunku (3.41).

W rozpatrywanym przypadku $T = \overline{D}$ mamy

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \overline{D}^{\,2} : M(x, y) = xy\}.$$

Warunek $M(x, y) = xy$ można zapisać w postaci

$$(\widehat{r}_1 + r_1\widehat{s}_1 y + \xi_1 xy)(\widehat{r}_2 + r_2\widehat{s}_2 x + \xi_2 xy) = xy, \tag{3.44}$$

co oznacza, że dla każdego ustalonego x mamy równanie kwadratowe (ze względu na zmienną y)

$$a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} a(x) &\equiv \xi_1\xi_2 x^2 + r_1\widehat{s}_1\xi_2 x, \\ b(x) &\equiv r_2\widehat{s}_2\xi_1 x^2 + (\widehat{r}_1\xi_2 + r_1r_2\widehat{s}_1\widehat{s}_2 + \widehat{r}_2\xi_1 - 1)x + r_1\widehat{s}_1\widehat{r}_2, \\ c(x) &\equiv \widehat{r}_1 r_2\widehat{s}_2 x + \widehat{r}_1\widehat{r}_2. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Ponieważ $a(x) \neq 0$ dla $x \notin \{0, -\widehat{s}_1/s_1\}$, więc istnieją funkcje $y_1, y_2 : \mathbb{C} \setminus \{0, -\widehat{s}_1/s_1\} \to \mathbb{C}$ dla których zachodzi

$$a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = a(x)(y - y_1(x))(y - y_2(x)).$$

Niech

$$\mathcal{K}_j := \{(x, y_j(x)) : x \in \widehat{D}\} \cap \overline{D}^2 = \{(x, y_j(x)) : x \in \widehat{D}, |y_j(x)| \leq 1\},$$

$$\overline{D}_j := \{x \in \widehat{D} : (x, y_j(x)) \in \mathcal{K}_j\} = \{x \in \widehat{D} : |y_j(x)| \leq 1\}$$

dla $j = 1, 2$, gdzie $\widehat{D} := \overline{D} \setminus \{0\}$. Wówczas $\mathcal{K}_j = \{(x, y_j(x)) : x \in \overline{D}_j\}$ dla $j = 1, 2$ oraz

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \{(-\widehat{s}_1/s_1, \widetilde{y}_0), (0, \widetilde{y})\}.$$

Rozważmy przypadek szczególny

$$s_1 < 1/2, \quad r_2 < \frac{1 - r_1}{2 - s_2}. \tag{3.46}$$

Wówczas korzystając ze wzoru Viety dostajemy

$$|y_1(x)y_2(x)| = \left|\frac{c(x)}{a(x)}\right| > 1, \qquad x \in \widehat{D} = \overline{D} \setminus \{0\}.$$

Bez straty ogólności możemy wybrać funkcje y_1, y_2 tak, aby $|y_1(x)| \leq |y_2(x)|$ dla $x \in \widehat{D}$. Stąd $|y_2(x)| > 1$ dla $x \in \widehat{D}$, a więc $\overline{D}_2 = \emptyset$.

Następnie pokazujemy, że w rozpatrywanym przypadku warunek (3.41) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje $f, g : \overline{D} \to \mathbb{C}$ spełniają warunek

$$\begin{aligned} f(x) = &\frac{\widehat{r}_2(1 - x)g(0)}{\widehat{r}_2 + r_2\widehat{s}_2 x + \xi_2 x y_1(x)} \\ &- \frac{\widehat{r}_2(\widehat{r}_1 + r_1\widehat{s}_1 y_1(x) + \xi_1 x y_1(x))(1 - x)g(y_1(x))}{\widehat{r}_1(1 - y_1(x))(\widehat{r}_2 + r_2\widehat{s}_2 x + \xi_2 x y_1(x))} \end{aligned} \tag{3.47}$$

dla $x \in \overline{D}_1$, $x \neq 1$. Zatem Twierdzenie 3.36 daje w tym przypadku możliwość otrzymania opisu wszystkich ciągłych oraz wszystkich analitycznych rozwiązań $P : \overline{D}^2 \to \mathbb{C}$ równania (3.37).

Dla rozwiązań ciągłych równania (3.37) opis ten formułujemy w poniższym twierdzeniu, które stanowi główny wynik pracy [B24].

Twierdzenie 3.37. ([B24],Theorem 4.1) *Załóżmy, że warunek* (3.46) *jest spełniony. Funkcja ciągła* $P : \overline{D}^2 \to \mathbb{C}$ *spełnia równanie* (3.37) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja ciągła* $g : \overline{D} \to \mathbb{C}$ *taka, że*

$$P(x, y) = \frac{C_2(x, y)f(x) + C_3(x, y)g(y) + C_4(x, y)g(0)}{C_1(x, y)}, \qquad (x, y) \in \overline{D}^2, y \neq y_1(x), \tag{3.48}$$

gdzie f *jest dane wzorem* (3.47). *W szczególności,* $f(x) = P(x, 0)$ *oraz* $g(x) = P(0, x)$ *dla* $x \in \overline{D}$.

3.2.6 Rozwiązania i stabilność uogólnienia równania Frécheta

Praca [B25] zawiera wyniki dotyczące następującego równania funkcyjnego o stałych współczynnikach

$$A_1F(x + y + z) + A_2F(x) + A_3F(y) + A_4F(z) = A_5F(x + y) + A_6F(x + z) + A_7F(y + z), \tag{3.49}$$

gdzie $A_1, \ldots, A_7 \in \mathbb{K}$ oraz $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, rozważanego dla funkcji $F : X \to Y$, gdzie $(X, +)$ jest monoidem przemiennym (tj. półgrupą z elementem neutralnym oznaczanym przez 0), zaś Y jest przestrzenią Banacha nad ciałem $\mathbb{K}$. Równanie to jest uogólnieniem równania Frécheta

$$F(x + y + z) + F(x) + F(y) + F(z) = F(x + y) + F(x + z) + F(y + z). \tag{3.50}$$

Jeśli X jest grupą i Y jest grupą abelową podzielną przez 2, to rozwiązanie ogólne równania (3.50) ma postać sumy funkcji kwadratowej i addytywnej.

Badanie zbioru rozwiązań równania (3.49) rozpoczynamy od przypadku $F(0) = 0$ odgrywającego główną rolę w wyznaczeniu tego zbioru.

Twierdzenie 3.38. ([B25], Proposition 3) *Jeśli niezerowa funkcja* $F : X \to Y$ *taka, że* $F(0) = 0$, *spełnia równanie* (3.49), *to*

$$\begin{cases} A_2 = -A_1 + A_5 + A_6, \\ A_3 = -A_1 + A_5 + A_7, \\ A_4 = -A_1 + A_6 + A_7. \end{cases} \tag{3.51}$$

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy wynik dotyczący addytywnych rozwiązań równania (3.49).

Wniosek 3.39. ([B25], Corollary 5) *Niezerowa funkcja addytywna* $a : X \to Y$ *spełnia równanie* (3.49) *wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek* (3.51).

Główny wynik pracy [B25] opisujący zbiór rozwiązań równania (3.49) w rozważanym przypadku dotyczy sytuacji, w której równanie to nie daje się sprowadzić do równania (3.50) przez podzielenie stronami przez niezerowy element ciała $\mathbb{K}$.

Twierdzenie 3.40. ([B25], Theorem 7) *Jeśli* $A_i \neq A_j$ *dla pewnych* $i, j \in \{1, ..., 7\}$, *to każde rozwiązanie* $F : X \to Y$ *równania* (3.49) *takie, że* $F(0) = 0$ *jest funkcją addytywną.*

Z Twierdzenia 3.40 otrzymujemy następujący opis zbioru rozwiązań równania (3.49) w przypadku, gdy $F(0) = 0$.

Wniosek 3.41. ([B25], Corollary 9) *Jeśli* $A_i \neq A_j$ *dla pewnych* $i, j \in \{1, ..., 7\}$ *oraz zachodzi warunek*

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \neq A_5 + A_6 + A_7,$$

to każde rozwiązanie równania (3.49) *jest funkcją addytywną.*

Przechodząc do przypadku ogólnego (tj. pomijając założenie, że $F(0) = 0$) otrzymujemy stąd następujący wynik podający ogólne rozwiązanie równania (3.49).

Wniosek 3.42. ([B25], Corollary 10) *Załóżmy, że* $A_i \neq A_j$ *dla pewnych* $i, j \in \{1, ..., 7\}$. *Jeśli* $F : X \to Y$ *jest rozwiązaniem równania* (3.49), *to*

$$F(x) = a(x) + c, \quad x \in X, \tag{3.52}$$

gdzie $a : X \to Y$ *jest funkcją addytywną oraz* $c = F(0)$.

Praca [B25] zawiera również wynik o stabilności w sensie Ulama równania (3.49).

Twierdzenie 3.43. ([B25], Theorem 13) *Załóżmy, że* $A_2 + A_3 + A_4 \neq 0$ *oraz*

$$\beta_0 := \left| \frac{A_5 + A_6 + A_7 - A_1}{A_2 + A_3 + A_4} \right| < 1.$$

Niech $L\colon X^3 \to [0, \infty)$ *spełnia warunek*

$$L(kx, ky, kz) \leq c_k L(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in X^3 \setminus \{(0, 0, 0)\},\ k \in \{2, 3\} \tag{3.53}$$

dla pewnych $c_2, c_3 \in [0, \infty)$ *takich, że* $\beta := b_2 c_2 + b_3 c_3 < 1$, *gdzie*

$$b_2 := \left| \frac{A_5 + A_6 + A_7}{A_2 + A_3 + A_4} \right|, \qquad b_3 := \left| \frac{A_1}{A_2 + A_3 + A_4} \right|. \tag{3.54}$$

Jeśli funkcja $f\colon X \to Y$ *spełnia warunek*

$$\begin{aligned} \|A_1 f(x + y + z) + A_2 f(x) + A_3 f(y) + A_4 f(z) - A_5 f(x + y) \\ - A_6 f(x + z) - A_7 f(y + z)\| \leq L(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in X^3, \end{aligned} \tag{3.55}$$

to istnieje jedyna funkcja $F : X \to Y$ *będąca rozwiązaniem równania* (3.49) *taka, że* $F(0) = 0$ *oraz*

$$\|f(x) - F(x)\| \leq \rho_L(x), \qquad x \in X, \tag{3.56}$$

gdzie

$$\rho_L(x) := \frac{L(x,x,x)}{|A_2 + A_3 + A_4|(1 - \gamma(x))}, \qquad x \in X, \tag{3.57}$$

przy czym

$$\gamma(x) := \begin{cases} \beta & \text{gdy} \quad x \neq 0, \\ \beta_0 & \text{gdy} \quad x = 0. \end{cases}$$

W dowodzie powyższego twierdzenia dla rozwiązania przybliżonego $f : X \to Y$ równania (3.49) istnienie rozwiązania dokładnego $F : X \to Y$ tego równania spełniającego warunek (3.56) uzyskuje się korzystając z twierdzenia o punkcie stałym, które pochodzi z pracy, której autorami są J. Brzdęk, J. Chudziak i Z. Páles (zob. [24]).

3.2.7 Punkty stałe operatorów i stabilność w sensie Ulama

W pracach [B26] i [B27] udowodnione zostały twierdzenia o punkcie stałym i pokazano ich zastosowanie do wykazania stabilności w sensie Ulama rozważanych typów równań. Stabilność danego równania wykazujemy za pomocą odpowiednio zdefiniowanego operatora. Punkty stałe tych operatorów okazują się być poszukiwanymi rozwiązaniami spełniającymi określone warunki.

W literaturze można spotkać się z różnymi definicjami stabilności w sensie Ulama. Dlatego też w pracach [B26] i [B27] sprecyzowane zostało co rozumiemy pod tym pojęciem. Dla przestrzeni (X, d), gdzie d jest metryką lub pewnym jej uogólnieniem określonym w X, zbioru $S \neq \emptyset$, niepustych klas $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D} \subset X^S$, $\mathcal{E} \subset (\mathbb{R}_0^+)^S$, oraz operatorów $\mathcal{T} : \mathcal{D} \to X^S$, $\mathcal{S} : \mathcal{E} \to (\mathbb{R}_0^+)^S$ mówimy, że równanie

$$\mathcal{T}(\psi) = \psi$$

jest $\mathcal{S}$–stabilne w $\mathcal{D}_0$, jeśli dla dowolnych $\psi \in \mathcal{D}_0$ oraz $\delta \in \mathcal{E}$ takich, że

$$d\big(\mathcal{T}(\psi)(t), \psi(t)\big) \leq \delta(t), \qquad t \in S,$$

istnieje rozwiązanie $\phi \in \mathcal{D}$ tego równania takie, że

$$d\big(\phi(t), \psi(t)\big) \leq (\mathcal{S}\delta)(t), \qquad t \in S,$$

gdzie A^B rodzinę wszystkich funkcji określonych na B o wartościach w A.

W pracy [B26] wykazane zostało twierdzenie o punkcie stałym dla operatora liniowego typu wielomianowego stopnia 3 związane z zagadnieniem stabilności w sensie Ulama równania

$$p_3\mathcal{L}^3\psi + p_2\mathcal{L}^2\psi + p_1\mathcal{L}\psi = \psi, \tag{3.58}$$

gdzie $\mathcal{L} : X \to X$ jest danym operatorem liniowym zespolonej przestrzeni wektorowej X oraz $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}$, $p_3 \neq 0$. Dla operatora liniowego $\mathcal{L} : X \to X$ definiujemy operator $\mathcal{P} : X \to X$ wzorem

$$\mathcal{P}\psi := p_3\mathcal{L}^3\psi + p_2\mathcal{L}^2\psi + p_1\mathcal{L}\psi, \qquad \psi \in X. \tag{3.59}$$

Równanie (3.58) możemy więc zapisać w postaci $\mathcal{P}\psi = \psi$.

W rozważaniach dotyczących operatora $\mathcal{P}$ ważną rolę odgrywają pierwiastki wielomianu charakterystycznego równania (3.58), tj. pierwiastki wielomianu

$$P(x) = p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x - 1. \tag{3.60}$$

Z wzorów Viety otrzymujemy, że jeśli $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego równania (3.58), to $a_i \neq 0$ dla $i \in \{1, 2, 3\}$ oraz

$$p_3 = \frac{1}{a_1a_2a_3}, \qquad -p_2 = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_1a_3} + \frac{1}{a_2a_3}, \qquad p_1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}.$$

Punktów stałych operatora $\mathcal{P}$ poszukujemy przy założeniu, że przestrzeń X jest rozszerzoną zespoloną przestrzenią unormowaną. Przypomnijmy, że parę $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy *rozszerzoną zespoloną przestrzenią unormowaną*, jeśli X jest zespoloną przestrzenią wektorową, zaś $\|\cdot\|$ jest funkcją określoną na X o wartościach w $[0, \infty]$ (tj. funkcja $\|\cdot\|$ może przyjmować wartość ∞) taką, że dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{C}$ oraz $x, y \in X$ takich, że $\|x\|, \|y\| \in [0, \infty)$ zachodzą warunki

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \qquad \|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|,$$

oraz równość $\|x\| = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy x jest wektorem zerowym. Rozszerzoną zespoloną przestrzeń unormowaną X nazywamy *rozszerzoną zespoloną przestrzenią Banacha*, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego elementów przestrzeni X jest zbieżny.

Główny wynik pracy [B26] dotyczy punktów stałych zdefiniowanego powyżej operatora $\mathcal{P}$.

Twierdzenie 3.44. ([B26], Theorem 2) *Niech X będzie rozszerzoną zespoloną przestrzenią Banacha. Niech $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ będą pierwiastkami wielomianu* (3.60) *takimi, że*

$$a_i \neq a_j, \qquad i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j.$$

Załóżmy, że operator liniowy $\mathcal{L}$ spełnia warunek Lipschitza

$$\|\mathcal{L}f - \mathcal{L}g\| \;\leq\; L\|f - g\|, \qquad f, g \in X,$$

z dodatnią stałą L taką, że

$$L < \min\{|a_1|, |a_2|, |a_3|\}. \tag{3.61}$$

Wówczas dla każdego $\varphi \in X$ takiego, że

$$\varepsilon := \left\|\mathcal{P}\varphi - \varphi\right\| < \infty, \tag{3.62}$$

gdzie $\mathcal{P}$ wyraża się wzorem (3.59), *operator $\mathcal{P}$ ma jedyny punkt stały $\psi \in X$ taki, że*

$$\|\varphi - \psi\| < \infty.$$

Ponadto,

$$\|\varphi - \psi\| \leq C\varepsilon,$$

gdzie

$$\begin{aligned} C = \Bigg(&\frac{1}{|a_2 - a_1|\,|a_3 - a_1|\,(|a_1| - L)} + \frac{1}{|a_1 - a_2|\,|a_3 - a_2|(|a_2| - L)} \\ &+ \frac{1}{|a_1 - a_3|\,|a_2 - a_3|\,(|a_3| - L)}\Bigg)\,|a_1||a_2||a_3|. \end{aligned} \tag{3.63}$$

W dowodzie powyższego twierdzenia stosujemy twierdzenie o punktach stałych pochodzące z pracy, której autorami są J.B. Diaz i B. Margolis (zob. [30]), dla silnie zwężających operatorów $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3 : X \to X$ zdefiniowanych wzorem

$$\mathcal{T}_j f := \frac{1}{a_j}\mathcal{L}f, \qquad f \in X, j = 1, 2, 3.$$

Dla każdego $j = 1, 2, 3$ jedyny punkt stały F_j operatora $\mathcal{T}_j$ jest wektorem własnym operatora $\mathcal{L}$.

Niech Y będzie zespoloną przestrzenią Banacha, a S zbiorem niepustym. W przestrzeni Y^S rozważamy normę supremum

$$\|f\| := \sup_{s \in S} \|f(s)\|, \qquad f \in Y^S$$

będącą naturalnym przykładem normy rozszerzonej (nazywać ją będziemy rozszerzoną normę supremum). Stosując Twierdzenie 3.44 dla tej przestrzeni otrzymujemy wynik o stabilności w sensie Ulama dla równania (3.58).

Twierdzenie 3.45. ([B26], Theorem 3) *Niech Y będzie zespoloną przestrzenią Banacha, a S zbiorem niepustym. Niech $\mathcal{C}$ będzie podprzestrzenią wektorową przestrzeni Y^S domkniętą ze względu na rozszerzoną normę supremum. Niech $\mathcal{L} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ będzie operatorem liniowym. Załóżmy, że $a_i \neq a_j$ dla $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, oraz $\mathcal{L}$ spełnia warunek Lipschitza*

$$\|\mathcal{L}f - \mathcal{L}g\| \ \leq \ L\|f - g\|, \qquad f, g \in \mathcal{C}, \tag{3.64}$$

z dodatnią stałą L taką, że $L < \min\{|a_1|, |a_2|, |a_3|\}$. Wówczas dla kazdej funkcji $\varphi \in \mathcal{C}$ takiej, że

$$\varepsilon := \left\| p_3\mathcal{L}^3\varphi + p_2\mathcal{L}^2\varphi + p_1\mathcal{L}\varphi - \varphi \right\| < \infty,$$

istnieje jedyne rozwiązanie $\psi \in \mathcal{C}$ równania (3.58) *takie, że $\|\varphi - \psi\| < \infty$. Ponadto,*

$$\|\varphi - \psi\| \le C\varepsilon,$$

gdzie C wyraża się wzorem (3.63).

W pracy [B27] wykazane zostało natomiast twierdzenie o punkcie stałym operatora działającego w zaburzonej przestrzeni quasi metrycznej (w skrócie przestrzeni dq-metrycznej). Mówimy, że para (X, d), gdzie X jest zbiorem niepustym oraz $d\colon X \times X \to [0, +\infty)$, jest *zaburzoną przestrzenią quasi metryczną* lub krócej *przestrzenią dq-metryczną*, gdy funkcja d spełnia warunki:

(A1) jeśli $d(x, y) = d(y, x) = 0$, to $x = y$,

(A2) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

dla dowolnych $x, y, z \in X$.

Niech (X, d) będzie przestrzenią dq-metryczną. Mówimy, że $x \in X$ jest *granicą* ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów przestrzeni X, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \max\{d(x_n, x), d(x, x_n)\} = 0.$$

Z warunku (A2) otrzymujemy jednoznaczność tak zdefiniowanej granicy ciągu. Ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów przestrzeni X nazywamy *ciągiem Cauchy'ego*, jeśli

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{m,n\geqslant N} d(x_n, x_m) = 0.$$

Przestrzeń dq-metryczną (X, d) nazywamy *zupełną*, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego elementów przestrzeni X ma granicę w X.

Dla przestrzeni dq-metrycznej (X, d) oraz dowolnego zbioru niepustego E określamy funkcję $d_f : X^E \times X^E \to {\mathbb{R}_+}^E$ kładąc

$$d_f(\xi, \mu)(t) := d(\xi(t), \mu(t)), \qquad \xi, \mu \in X^E, t \in E. \tag{3.65}$$

Analogicznie jak w klasycznej przestrzeni metrycznej, jeśli $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem elementów przestrzeni X^E, to mówimy, że funkcja $\chi \in X^E$ jest *granicą punktową* ciągu funkcyjnego $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \max\left\{d_f(\chi, \chi_n)(t), d_f(\chi_n, \chi)(t)\right\} = 0, \qquad t \in E.$$

Funkcję $\chi \in Y^E$ nazywamy natomiast *granicą jednostajną* ciągu $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in E} \max\left\{d_f(\chi,\chi_n)(t), d_f(\chi_n,\chi)(t)\right\} = 0.$$

Niepusty podzbiór $\mathcal{F}$ przestrzeni X^E nazywamy *p-domkniętym* (odpowiednio *u-domkniętym*), jeśli każda funkcja $\chi \in X^E$ będąca granicą punktową (odpowiednio jednostajną) pewnego ciągu $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów zbioru $\mathcal{F}$ należy do $\mathcal{F}$.

Dla funkcji $f, g \in \mathbb{R}^E$, piszemy $f \le g$, jeśli $f(t) \le g(t)$ dla wszystkich $t \in E$. Niech $\emptyset \ne \mathcal{C} \subset X^E$, $\Lambda\colon {\mathbb{R}_+}^E \to {\mathbb{R}_+}^E$ oraz $\omega \in {\mathbb{R}_+}^E$. Mówimy, że operator $\mathcal{T}\colon \mathcal{C} \to X^E$ jest $(\omega,\Lambda)-$zwężający, jeśli

$$d_f(\mathcal{T}\xi, \mathcal{T}\mu) \le \Lambda\delta$$

dla dowolnych $\xi, \mu \in \mathcal{C}$ oraz $\delta \in {\mathbb{R}_+}^E$ takich, że

$$\delta \le \omega, \qquad d_f(\xi,\mu) \le \delta.$$

Ponadto, w celu uproszczenia zapisu niektórych wzorów oznaczmy przez Λ_0 operator identycznościowy na ${\mathbb{R}_+}^E$, tj. $\Lambda_0\delta = \delta$ dla każdego $\delta \in {\mathbb{R}_+}^E$.

Głównym wynikiem pracy [B27] jest następujące twierdzenie o punkcie stałym.

Twierdzenie 3.46. ([B27], Theorem 2) *Niech (X, d) będzie przestrzenią dq-metryczną, E zbiorem niepustym, zaś $d_f : X^E \times X^E \to {\mathbb{R}_+}^E$ funkcją określoną wzorem (3.65). Niech $\emptyset \ne \mathcal{C} \subset X^E$, $\mathcal{T}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ oraz $\Lambda_n\colon {\mathbb{R}_+}^E \to {\mathbb{R}_+}^E$ dla $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że istnieją funkcje $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in {\mathbb{R}_+}^E$ oraz $\varphi \in \mathcal{C}$ takie, że*

$$\varepsilon_j^*(t) := \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda_i \varepsilon_j(t) < \infty, \qquad t \in E, j = 1, 2, \tag{3.66}$$

$$d_f(\mathcal{T}\varphi, \varphi) \le \varepsilon_1, \qquad d_f(\varphi, \mathcal{T}\varphi) \le \varepsilon_2, \tag{3.67}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \Lambda_1\Big(\sum_{i=n}^{\infty} \Lambda_i\varepsilon_j\Big)(t) = 0, \qquad t \in E, j = 1, 2. \tag{3.68}$$

Niech $\varepsilon^*(t) := \max\{\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)\}$ dla $t \in E$. Jeśli $\mathcal{T}^n$ jest operatorem $(\varepsilon^*, \Lambda_n)-$zwężającym dla $n \in \mathbb{N}$ i zachodzi jeden z warunków

(i) *$\mathcal{C}$ jest p-domknięty;*

(ii) *$\mathcal{C}$ jest u-domknięty oraz ciąg $\left(\sum_{i=0}^{n} \Lambda_i\varepsilon_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zmierza jednostajnie do ε_j^* na zbiorze E dla $j = 1, 2$,*

to dla każdego $t \in E$ istnieje granica

$$\psi(t) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}^n\varphi(t), \tag{3.69}$$

oraz funkcja $\psi \in \mathcal{C}$ zdefiniowana w ten sposób jest punktem stałym operatora $\mathcal{T}$ spełniającym warunek

$$d_f(\mathcal{T}^n\varphi, \psi) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \Lambda_i \varepsilon_1, \qquad d_f(\psi, \mathcal{T}^n\varphi) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \Lambda_i \varepsilon_2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.70}$$

Ponadto, zachodzą następujące warunki:

(a) *dla każdego ciągu $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb całkowitych dodatnich spełniającego warunek $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$, funkcja ψ jest jedynym punktem stałym operatora $\mathcal{T}$ takim, że*

$$d_f(\mathcal{T}^{k_n}\varphi, \psi) \leq \sum_{i=k_n}^{\infty} \Lambda_i \varepsilon_j, \qquad d_f(\psi, \mathcal{T}^{k_n}\varphi) \leq \sum_{i=k_n}^{\infty} \Lambda_i \varepsilon_l, \qquad n \in \mathbb{N},$$

dla pewnych $j, l \in \{1, 2\}$;

(b) *jeśli*

$$\liminf_{n\to\infty} \Lambda_n \varepsilon_j^*(t) = 0, \qquad j = 1, 2, \ t \in E, \tag{3.71}$$

to ψ jest jedynym punktem stałym operatora $\mathcal{T}$ takim, że

$$d_f(\varphi, \psi) \leq \varepsilon_1^*, \qquad d_f(\psi, \varphi) \leq \varepsilon_2^*,$$

oraz dla dowolnych $j, l \in \{1, 2\}$

$$\psi(t) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}^{k_n}\xi(t), \qquad t \in E \tag{3.72}$$

dla wszystkich $\xi \in \mathcal{C}$ takich, że $d_f(\xi, \psi) \leq \varepsilon_j^*$ oraz $d_f(\psi, \xi) \leq \varepsilon_l^*$ i każdego ciągu $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb całkowitych dodatnich spełniającego warunek $\lim_{n\to\infty} \Lambda_{k_n} \varepsilon_m^*(t) = 0$ dla $t \in E$ oraz $m \in \{j, l\}$.

Pokażemy teraz zastosowanie powyższego twierdzenia do wykazania stabilności w sensie Ulama równań funkcyjnych postaci

$$\Phi(t, \psi(f_1(t)), ..., \psi(f_j(t))) = \psi(t), \qquad t \in E, \tag{3.73}$$

gdzie $E \neq \emptyset$, $j \in \mathbb{N}$, $f_i : E \to E$ dla $i = 1, \ldots, j$, $\Phi : E \times X^j \to X$ są dane, zaś $\psi : E \to X$ funkcją szukaną.

Niech

(H1) $L_i : E \to \mathbb{R}_+$ dla $i = 1, \ldots, j$, spełniają warunek

$$d(\Phi(t, w_1, ..., w_j), \Phi(t, z_1, ..., z_j)) \leq \sum_{k=1}^{j} L_k(t) d(w_k, z_k)$$

dla $t \in E$ oraz $(w_1, ..., w_j), (z_1, ..., z_j) \in X^j$ takich, że $d(z_i, w_i) \leq e$ dla $i = 1, \ldots, j$, przy ustalonym e takim, że $e > 0$ lub $e = \infty$. Wówczas korzystając z Twierdzenia 3.46 otrzymujemy wynik o stabilności równania (3.73).

Wniosek 3.47. ([B27], Corollary 6) *Niech (X, d) będzie przestrzenią dq-metryczną, $E \neq \emptyset$, $j \in \mathbb{N}$, $\Phi : E \times X^j \to X$ oraz $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : E \to \mathbb{R}_+$. Załóżmy, że $L_i : E \to \mathbb{R}_+$ dla $i = 1, \dots, j$ są funkcjami, dla których zachodzi* (H1) *przy* $e := \sup\{\varepsilon_j^*(t) : t \in E, j = 1, 2\}$, *gdzie*

$$\varepsilon_j^*(t) := \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda^i \varepsilon_j(t) < \infty, \qquad t \in E,\ j = 1, 2.$$

Niech $\Lambda : \mathbb{R}_+^E \to \mathbb{R}_+^E$ będzie określone wzorem

$$\Lambda\delta(t) := \sum_{k=1}^{j} L_k(t)\delta(f_k(t)), \qquad \delta \in \mathbb{R}_+^E,\ t \in E,$$

dla pewnych $f_1, \dots, f_j : E \to E$. Wówczas, jeśli $\varphi : E \to X$ spełnia warunki

$$d(\Phi(t, \varphi(f_1(t)), ..., \varphi(f_j(t))), \varphi(t)) \leq \varepsilon_1(t), \qquad t \in E,$$

$$d(\varphi(t), \Phi(t, \varphi(f_1(t)), ..., \varphi(f_j(t)))) \leq \varepsilon_2(t), \qquad t \in E,$$

to istnieje granica

$$\psi(t) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}^n \varphi(t) \tag{3.74}$$

dla każdego $t \in E$, gdzie $\mathcal{T}$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{T}\varphi(t) := \Phi(t, \varphi(f_1(t)), ..., \varphi(f_j(t))), \qquad \varphi \in X^E,\ t \in E,$$

oraz funkcja $\psi : E \to X$ określona wzorem (3.74) *jest jedynym rozwiązaniem równania* (3.73) *takim, że*

$$d(\varphi(t), \psi(t)) \leq \varepsilon_1^*(t), \qquad d(\psi(t), \varphi(t)) \leq \varepsilon_2^*(t), \qquad t \in E.$$

Równanie różnicowe

$$\psi(i) = \Phi(i, \psi(i+1)), \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{3.75}$$

gdzie $\Phi : \mathbb{N} \times X \to X$ jest funkcją daną, zaś $\psi : \mathbb{N} \to X$ funkcją szukaną, posłużyło w pracy [B27] jako przykład zastosowania Wniosku 3.47. Jest ono bowiem szczególnym przypadkiem równania (3.73), gdzie $E = \mathbb{N}$, $j = 1$ oraz $f_1(i) = i + 1$ dla $i \in \mathbb{N}$.

Bibliografia

[1] J.M. Aarts, L. G. Oversteegen, *Whitney's regular families of curves revisited*, Contemp. Math. *117*, 1–7, Amer. Math. Soc., Providence 1991.

[2] P.S. Alexandrov, *Combinatorial topology, Vols. I,II,III*, Graylock Press, Baltimore 1956, 1957, 1960.

[3] P.S. Alexandrov, H. Hopf, *Topologie I*, Springer, Berlin 1935.

[4] S. Alpern, V. S. Prasad, *Typical dynamics of volume preserving homeomorphisms*, Cambridge Tracts in Mathematics *139*, Cambridge University Press, Cambridge 2000.

[5] S.A. Andrea, *On homeomorphisms of the plane which have no fixed points*, Abh. Math. Sem. Hamburg *30* (1967), 61–74.

[6] M. A. Armstrong, *Basic topology*, Springer-Verlag, New York 1983.

[7] K. Baron, W. Jarczyk, *Recent results on functional equations in a single variable, perspectives and open problems*, Aequationes Math. *61* (2001), No. *1-2*, 1–48.

[8] R.B. Barrar, *Proof of the fixed point theorems of Poincaré and Birkhoff*, Canad. J. Math. *19* (1967), 333–343.

[9] A. Beck, *Continuous flows in the plane*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften *201*, Springer-Verlag, Berlin 1974.

[10] F. Béguin, F. Le Roux, *Ensemble oscillant d'un homéomorphisme de Brouwer, homéomorphismes de Reeb*, Bull. Soc. Math. France *131* (2003), No. *2*, 149–210.

[11] W. Benz, *Classical geometries in modern contexts. Geometry of real inner product spaces*, Birkhäuser Verlag, Basel 2007.

[12] M. Bessa, J. Rocha, *On the fundamental regions of a fixed point free conservative Hénon map*, Bull. Austral. Math. Soc. *77* (2008), 37–48.

[13] D. Betten, *Sperner-Homöomorphismen auf Ebene, Zylinder und Möbiusband*, Abh. Math. Sem. Hamburg *44* (1975), 263–272.

[14] O. Bhatia, G.P. Szegö, *Stability theory of dynamical systems*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften *161*, Springer-Verlag, Berlin 1970.

[15] A. Blokh, E. Coven, M. Misiurewicz, Z. Nitecki, *Roots of continuous piecewise monotone maps of an interval*, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) *60* (1991), No. *1*, 3–10.

[16] A. Blokh, L. Oversteegen, *A fixed point theorem for branched covering maps of the plane*, Fund. Math. *206* (2009), No. *1*, 77–111.

[17] M. Bonino, *A Brouwer-like theorem for orientation reversing homeomorphisms of the sphere*, Fund. Math. *182* (2004), No. *1*, 1–40.

[18] M. Bonino, *Propriétés locales de l'espace des homéomorphismes de Brouwer*, Ergodic Theory Dynam. Systems 19 (1999), No. *6*, 1405–1423.

[19] L.E.J. Brouwer, *Beweis des ebenen Translationssatzes*, Math. Ann. *72* (1912), 37–54.

[20] M. Brown, *A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Houston J. Math. *10* (1984), No. *1*, 35–41.

[21] M. Brown, *Fundamental regions of planar homeomorphisms*, Contemp. Math. *117*, 49–56, Amer. Math. Soc., Providence 1991.

[22] M. Brown, *Homeomorphisms of two-dimensional manifolds*, Houston J. Math. *11* (1985), No. *4*, 455–469.

[23] M. Brown, E.E. Slaminka, W. Transue, *An orientation preserving fixed point free homeomorphism of the plane which admits no closed invariant line*, Topology Appl. *29* (1988), 213–217.

[24] J. Brzdęk, J. Chudziak, Z. Páles, *A fixed point approach to stability of functional equations*, Nonlinear Anal. 74 (2011), No. 17, 6728–6732.

[25] W.G. Chinn, N.E. Steenrod, *First concepts of topology: the geometry of mappings of segments, curves, circles, and disks*, New Mathematical Library *18*, Random House, New York 1966.

[26] G. Choquet, *Topology*, Pure and Applied Mathematics *19*, Academic Press, New York 1966.

[27] K. Ciepliński, M. C. Zdun, *On a system of Schröder equations on the circle*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. *13* (2003), No. *7*, 1883–1888.

[28] C.C. Cowen, *Iteration and the solution of functional equations for functions analytic in the unit disk*, Trans. Amer. Math. Soc. *265* (1981), No. *1*, 69–95.

[29] E.W. Daw, *A maximally pathological Brouwer homeomorphism*, Trans. Amer. Math. Soc. *343* (1994), 559–573.

[30] J.B. Diaz and B. Margolis, *A fixed point theorem of the alternative, for contractions on a generalized complete metric space*, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 305-309.

[31] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston 1966.

[32] F. Dumortier, J. Llibre, J.C. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer, Berlin 2006.

[33] M. Elin, V. Goryainov, S. Reich, D. Shoikhet, *Fractional iteration and functional equations for functions analytic in the unit disk*, Comput. Methods Funct. Theory *2* (2002), No. *2* , 353–366.

[34] R. Engelking, *Topologia ogólna*, Biblioteka Matematyczna *47*, PWN, Warszawa 1989.

[35] R. Engelking, K. Sieklucki, *Geometria i topologia, cz. II: Topologia*, Biblioteka Matematyczna *54*, PWN, Warszawa 1980.

[36] D.B.A. Epstein, *Pointwise periodic homeomorphisms*, Proc. London Math. Soc. (3) *42* (1981), No. *3*, 415–460.

[37] D.B.A. Epstein, *Prime ends*, Proc. London Math. Soc. (3) *42* (1981), No. *3*, 385–414.

[38] A. Fathi, *An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Enseign. Math. *33* (1987), 315–322.

[39] J. Franks, *A new proof of the Brouwer plane translation theorem*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. *12* (1992), 217–226.

[40] J. Franks, *A variation on the Poincaré-Birkhoff theorem*, Contemp. Math. *81*, 111–117, Amer. Math. Soc., Providence 1988.

[41] J. Franks, *Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem*, Ann. of Math. (2) *128* (1988), No. *1*, 139–151.

[42] J. Franks, *Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms*, Ergodic Theory Dynam. Systems *8** (1988), Charles Conley Memorial Issue, 99–107.

[43] Y.H. Goo, *Square roots of homeomorphisms*, J. Chungcheong Math. Soc. *19* (2006), No. *4*, 409–415.

[44] L. Guillou, *A generalized translation theorem for free homeomorphisms of surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. *123* (1995), No. *10*, 3243–3250.

[45] L. Guillou, *Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff*, Topology *33* (1994), No. *2*, 331–351.

[46] A. Haefliger, G. Reeb, *Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan*, Enseign. Math. *3* (1957), 107–126.

[47] N.P. Hájek, *Dynamical systems in the plane*, Academic Press, London 1968.

[48] J.G. Hocking, G.S. Young, *Topology*, Addison-Wesley, Reading 1961.

[49] H. Hofer, E. Zehnder, *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*, Birkhäuser Verlag, Basel 1994.

[50] T. Homma, S. Kinoshita, *On the regularity of homeomorphisms of E^n*, J. Math. Soc. Japan *5* (1953), 365–371.

[51] T. Homma, H. Terasaka, *On the structure of the plane translation of Brouwer*, Osaka Math. J. *5* (1953), 233–266.

[52] S.D. Iliadis, *An investigation of plane continua by means of Carathéodory prime ends*, (w jęz. rosyjskim) Dokl. Akad. Nauk SSSR *204* (1972), 1305–1308.

[53] S.D. Iliadis, *Positions of continua on the plane and fixed points*, (w jęz. rosyjskim) Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh. *25* (1970), No. *4*, 66–70.

[54] M.C. Irwin, *Smooth Dynamical Systems*, Academic Press, London 1980.

[55] T.A. Ivey, J.M. Landsberg, *Cartan for beginners: differential geometry via moving frames and exterior differential systems*, Graduate Studies in Mathematics 61, American Mathematical Society, Providence 2003.

[56] W. Jarczyk, *Babbage equation on the circle*, Publ. Math. Debrecen *63* (2003), No. *3*, 389–400.

[57] G.D. Jones, *The embedding of homeomorphisms of the plane in continuous flows*, Pac. J. Math. *41* (1972), 421–436.

[58] W. Kaplan, *Regular curve-families filling the plane I*, Duke Math. J. *7* (1940), 154–185.

[59] W. Kaplan, *Regular curve-families filling the plane II*, Duke Math. J. *8* (1941), 11–46.

[60] B. Kerékjártó, *On a a geometrical theory of continuous groups, I. Families of path-curves of continuous one-parameter groups of the plane*, Ann. of Math. *27* (1925), No. *2*, 105–117.

[61] B. Kerékjártó, *The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poinaré*, Acta Sci. Math. (Szeged) *4* (1928-29), 86–102.

[62] B. Kerékjártó, *Sur le groupe des transformations topologique du plan*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa CI. Sci *II*, Ser. *3* (1934), 393–400.

[63] B. Kerékjártó, *Über die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene*, Acta Sci. Math. (Szeged) *6* (1932-34), 226–234.

[64] B. Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie*, Springer, Berlin 1923.

[65] D.E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 2, Addison-Wesley, Reading 1981.

[66] J. Krasinkiewicz, *On internal composants of indecomposable plane continua*, Fund. Math. *84* (1974), No. *3*, 255–263.

[67] M. Kuczma, *Functional equations in a single variable*, Monografie Matematyczne *46*, PWN, Warszawa 1968.

[68] M. Kuczma, *On the functional equation* $\varphi^n(x) = g(x)$, Ann. Polon. Math. *11* (1961), 161–175.

[69] M. Kuczma, B. Choczewski, R. Ger, *Iterative functional equation*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications *32*, Cambridge University Press, Cambridge 1990.

[70] K. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne *20*, Warszawa 1952.

[71] K. Kuratowski, *Topologie II. Espaces compacts, espaces connexes, plan euclidien*, Monografie Matematyczne *21*, Warszawa-Wrocław 1950.

[72] P. Le Calvez, *Un version feuilletée du théorème de translation de Brouwer*, Comment. Math. Helv. *79* (2004), 229–259.

[73] P. Le Calvez, *Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. *102* (2005), 1—98.

[74] P. Le Calvez, A. Sauzet, *Un démonstration dynamique du théorème de translation de Brouwer*, Expo. Math. *14* (1996), 277–287.

[75] F. Le Roux, *Classes de conjugaison des flots du plan topologiquement équivalents au flot de Reeb*, C. R. Acad. Sci. Paris *328*, No. *1* (1999), 45–50.

[76] F. Le Roux, *Ensemble oscillant d'un homéomorphisme de Brouwer, homéomorphismes de Reeb*, Bull. Soc. Math. France *131* (2003), No. *2*, 149–210.

[77] F. Le Roux, *Il n'y pas de classification borélienne des homéomorphismes de Brouwer*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. *21* (2001), 233–247.

[78] F. Le Roux, *Structures des homéomorphismes de Brouwer*, Geom. Topol. *9* (2005), 1689–1774.

[79] Lin Li, Dilian Yang, Weinian Zhang, *A note on iterative roots of PM functions*, J. Math. Anal. Appl. *341* (2008), No. *2*, 1482–1486.

[80] J. Llibre, A. Mahdi, N. Vulpe, *Phase portraits and invariant straight lines of cubic polynomial vector fields having a quadratic rational first integral*, Rocky Mountain J. Math. *41* (2011), No. *5*, 1585-1629.

[81] S. Łojasiewicz, *Solution générale de l'équation fonctionelle* $f(f(\ldots f(x)\ldots)) = g(x)$, Ann. Soc. Polon. Math. *24* (1951), 88–91.

[82] R.J. Martin, *Möbius splines are closed under continuous iteration*, Aequationes Math. *64* (2002), No. *3*, 274–296.

[83] S. Matsumoto, *A characterization of the standard Reeb flow*, Hokkaido Math. J. *42* (2013), No. *1*, 69-80.

[84] S. Matsumoto, *Flows of flowable Reeb homeomorphisms*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble *62* (2012), No. *3*, 887-897.

[85] S. Mazurkiewicz, *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. *1* (1920), 166–209.

[86] R.C. McCann, *Planar dynamical systems without critical points*, Funkcial. Ekvac. *13* (1970), 67–95.

[87] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, Annals of Mathematics Studies *160*, Princeton University Press, Princeton 2006.

[88] J. Mioduszewski, *Wykłady z topologii. Zbiory spójne i kontinua*, Wydawnictwo UŚ, Katowice 2003.

[89] R.L. Moore, *Foundations of point set theory*, Colloquium Publications *13*, American Mathematical Society, Providence 1962.

[90] H. Nakayama, *A non flowable plane homeomorphism whose non Hausdorff set consists of two disjoint lines*, Houston J. Math. *21* (1995), No. *3*, 569–572.

[91] H. Nakayama, *Limit sets and square roots of homeomorphisms*, Hiroshima Math. J. *26* (1996), 405–413.

[92] H. Nakayama, *On dimensions of non-Hausdorff sets for plane homeomorphisms*, J. Math. Soc. Japan *47* (1995), No. *4*, 789–793.

[93] M.H.A. Newman, *Elements of the topology of plane sets of points*, Cambridge University Press, London 1951.

[94] V.V. Nemytskii, V.V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Princeton Mathematical Series *22*, Princeton University Press, Princeton 1960.

[95] A. O'Farrell, F. Le Roux, M. Roginskaya, I. Short, *Flowability of plane homeomorphisms*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble *62* (2012), No. *2*, 619–639.

[96] A. Pelczar, *Wstęp do teorii równań różniczkowych, cz. II: Elementy jakościowej teorii równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1989.

[97] L. S. Pontryagin, *Foundations of combinatorial topology*, Graylock Press, Rochester 1952.

[98] C. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften *299*, Springer-Verlag, Berlin 1992.

[99] W. Scherrer, *Translationen über einfach zusammenhängende Gebiete*, Viertelkschr. Naturf. Ges. Zurich *70* (1925), 77–84.

[100] G. Scorza Dragoni, *Über die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene*, Abh. Math. Sem. Hamburg *14* (1941), 1–21.

[101] K. Sieklucki, *On a class of plane acyclic continua with the fixed point property*, Fund. Math. *63* (1968), 257–278.

[102] Yong-Guo Shi, Li Chen, *Meromorphic iterative roots of linear fractional functions*, Sci. China Ser. A *52* (2009), No. *5*, 941–948.

[103] E.E. Slaminka, *A Brouwer translation theorem for free homeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. *306* (1988), No. *1*, 277–291.

[104] P. Solarz, *Iterative roots of homeomorphisms possessing periodic points*, Ann. Acad. Pedagog. Crac. Stud. Math. *6* (2007), 77–93.

[105] E. Sperner, *Über die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene*, Abh. Math. Sem. Hamburg *10* (1934), 1–47.

[106] G. Targoński, *Progres of iteration theory since 1981*, Aequationes Math. *50* (1995), No. *1-2*, 50–72.

[107] G. Targoński, *Topics in iteration theory*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1981.

[108] H. Terasaka, *Ein Beweis des Brouwerschen ebenen Translationssatzes*, Japan J. Math. *7* (1930), 61–69.

[109] W.P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology, Vol. 1*, edited by S. Levy, Princeton Mathematical Series *35*, Princeton University Press, Princeton 1997.

[110] W.R. Utz, *The embedding of homeomorphisms in continuous flows*, Topology Proc. *6* (1981), 159–177.

[111] H. Whitney, *Regular families of curves*, Annals of Math. (2) *34* (1933), 244–270.

[112] G.T. Whyburn, *Analytic topology*, Colloquium Publications *28*, American Mathematical Society, Providence 1963.

[113] G.T. Whyburn, *Topological analysis*, Princeton Mathematical Series *23*, Princeton University Press, Princeton 1964.

[114] W. Wilkosz, *Les propriétés topologiques du plan euclidien*, Mémorial des Sciences Mathématiques, *45*, Gauthier-Villars, Paris 1931.

[115] S. Willard, *General topology*, Addison-Wesley, Reading 1970.

[116] H.E. Winkelnkemper, *Twist maps, coverings and Brouwer's translation theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. *267* (1981), No. *2*, 585–593.

[117] Jingzhong Zhang, Lu Yang, *Discussion on iterative roots of piecewise monotone functions*, Acta. Math. Sinica *26* (1983), No. *4*, 398–412.

[118] Weinian Zhang, *A generic property of globally smooth iterative roots*, Sci. China Ser. A *38* (1995), No. *3*, 267–272.

[119] Weinian Zhang, *PM functions, their characteristic intervals and iterative roots*, Ann. Polon. Math. *65* (1997), No. *2*, 119–128.

[120] Wanxiong Zhang, Weinian Zhang, *Computing iterative roots of polygonal functions*, J. Comput. Appl. Math. *205* (2007), No. *1*, 497–508.

[121] M.C. Zdun, *On iterative roots of homeomorphisms of the circle*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. *48* (2000), No. *2*, 203–213.

Zbigniew Leśniak