Autoreferat

1. Imię i nazwisko: Tomasz Szostok
2. Posiadane dyplomy:
   (a) Dyplom magistra matematyki (specjalność teoretyczna) uzyskany 13 czerwca 1997 roku na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach. Tytuł pracy magisterskiej: Własność Radona-Nikodyma przestrzeni Banacha; promotor: prof. dr hab. Roman Ger
   (b) Dyplom doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki uzyskany 4 czerwca 2002 roku w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach. Tytuł rozprawy doktorskiej: Modyfikacje i uogólnienia pewnych warunkowych równań funkcyjnych; promotor: prof. dr hab. Roman Ger
3. Zatrudnienie w jednostkach naukowych
   (a) od 1.10.2002 adiunkt w Zakładzie Równań Funkcyjnych Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach (etat)
   (b) od 1.10.2000 do 30.9.2002 asystent w Zakładzie Równań Funkcyjnych Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach (połowa etatu)
   (c) od 1.10.1997 do 30.9.1998 asystent w Zakładzie Równań Funkcyjnych Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach (etat)
4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule naukowym zakresie sztuki: dzieło opublikowane w całości
   (a) Tytuł: Równania funkcyjne związane z analizą numeryczną
   (b) Dane rozprawy: *Functional equations stemming from numerical analysis,* Dissertationes Math. **508** (2015), 57 pp.
   doi:10.4064/dm508-0-1
   (c) Omówienie celu naukowego ww. rozprawy i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

Wprowadzenie

Rozprawa, zasadniczo, poświęcona jest równaniu

$$\sum_{i=0}^{l}(y-x)^i[f_{1,i}(\alpha_{1,i}x+\beta_{1,i}y)+\cdots+f_{k_i,i}(\alpha_{k_i,i}x+\beta_{k_i,i}y)]=0 \tag{1}$$

i jego rozmaitym przypadkom szczególnym. Występujące w tym równaniu funkcje niewiadome $f_{j,i}$ są określone i mają wartości w $\mathbb{R}$. Jak wiadomo, z wcześniejszych prac [15], [18] i innych, wiele faktów można wykazać dla funkcji działających na ogólniejszych strukturach (pierścienie o pewnych własnościach), ale rozważając bardzo ogólną postać równania (1) chcemy, dla zachowania przejrzystości rozważań, ograniczyć się do przypadku rzeczywistego. Z drugiej strony, tak ogólne postawienie problemu pozwala dowodzić twierdzenia dla wielu typów równań związanych z analizą numeryczną, które wcześniej były rozpatrywane oddzielnie (lub nie były badane).

Jednak nasze rozważania należy rozpocząć od pracy J. Aczéla [1]. Zauważmy, że dla funkcji kwadratowej punkt pośredni występujący w twierdzeniu Lagrange'a leży dokładnie w środku rozważanego przedziału. Oznacza to, że funkcja $F(x)=x^2$ spełnia równanie

$$F(x)-F(y)=(y-x)F'\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Zastępując funkcję F' przez f, J. Aczél otrzymał równanie

$$F(y)-F(x)=(y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{2}$$

z dwiema funkcjami niewiadomymi: f i F. Równanie to można rozważać bez żadnych założeń regularnościowych, jednak, co zaskakujące, funkcje spełniające (2) muszą być ciągłe. Dokładniej, są to funkcje postaci $F(x)=ax^2+bx+c$ i $f(x)=2ax+b$ dla pewnych stałych a,b i c. Problem ciągłości rozwiązań równań rozważanej postaci odgrywa zasadniczą rolę w całej omawianej pracy, a metodę Aczéla zastępowania wyrażeń wymagających regularności rozważanych funkcji nową funkcją niewiadomą można zastosować do reguł kwadraturowych. Istotnie, jeśli przybliżamy całkę w następujący sposób

$$\int_x^y f(t)dt \approx (y-x)[a_1f(\alpha_1x+\beta_1y)+\cdots+a_nf(\alpha_nx+\beta_ny)], \tag{3}$$

to otrzymamy równanie funkcyjne postaci

$$F(y)-F(x)=(y-x)[a_1f(\alpha_1x+\beta_1y)+\cdots+a_nf(\alpha_nx+\beta_ny)], \tag{4}$$

którego rozwiązaniami z pewnością są funkcje dla których reguła (3) jest spełniona dokładnie. Jednak mogą się pojawić (i tak w istocie jest) nawet niemierzalne rozwiązania równania (4), które musielibyśmy wykluczyć używając całki oznaczonej.

Następnym krokiem jest równanie, które można nazwać „pexideryzacją” równania (4) czyli

$$F(y) - F(x) = (y - x)[f_1(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \cdots + f_n(\alpha_n x + \beta_n y)]. \tag{5}$$

Omówimy teraz krótko historię badań równań postaci (4) i (5). W. Rudin [23] zaproponował następujące uogólnienie równania Aczéla

$$F(y) - F(x) = (y - x) f\,(sx + ty)\,, \tag{6}$$

które zostało rozwiązane w pracy M.S. Jacobsona, Pl. Kannappana i P.K. Sahoo [8].

Następnym równaniem postaci (5) jest równanie

$$F(y) - F(x) = (y - x)\,[f(x) + f(y)] \tag{7}$$

rozwiązane przez Sh. Harukiego w pracy [7].

Widzimy, że równania (2), (6) i (7) są szczególnymi przypadkami równania (4) (chociaż motywacją do badania tych równań nie były reguły kwadraturowe).

Trzeba zauważyć, że błąd jaki pojawia się w regułach kwadraturowych wyraża się przy pomocy pochodnej pewnego rzędu (obliczonej w pewnym punkcie) i pomnożonej przez stałą. Z tego powodu przybliżenie ze wzoru (3) jest dokładne dla wielomianów stopnia zależnego od n, od postaci węzłów $\alpha_i x + \beta_i y$ oraz od współczynników a_i. W rezultacie równanie (4) jest spełnione przez wielomiany. Dlatego wielomiany stanowią pewnego rodzaju „modelowe” rozwiązania równań rozważanej postaci i zamierzamy odpowiedzieć na pytanie, kiedy równania postaci (5) czy (4) mogą mieć rozwiązania inne niż wielomiany.

Pierwszą regułą kwadraturową, rozpatrywaną z tego punktu widzenia była reguła Simpsona

$$\int_x^y f(t)dt \approx (y - x)\left[\frac{1}{6}f(x) + \frac{2}{3}f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{6}f(y)\right]. \tag{8}$$

Związane z nią równania

$$F(y) - F(x) = (y - x)\left[\frac{1}{6}f(x) + \frac{2}{3}f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{6}f(y)\right] \tag{9}$$

oraz (postać spexideryzowana)

$$F(y) - F(x) = (y - x)\,[f(x) + g(x + y) + h(y)] \tag{10}$$

badano między innymi w pracach [5, 10, 14, 22].

Uwaga 1. Zauważmy, że jeśli $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją addytywną, $f(x) = a(x),\ h(x) = a(x),\ g(x) = -a(x), x \in \mathbb{R}$ oraz funkcja F jest stała to czwórka f, g, h, F spełnia równanie (10). Oznacza to, że równanie (5), w przeciwieństwie do równania (2), nie wymusza ciągłości rozwiązań.

Następnym równaniem pochodzącym od reguły kwadraturowej jest równanie

$$F(y) - G(x) = (y - x)\left[f_1(x) + f_2\left(\frac{2x + y}{3}\right) + f_3\left(\frac{3x + y}{2}\right) + f_4(y)\right]$$

rozważane w pracach [20, 24, 25].

Bardziej skomplikowane równania tej postaci były rozważane m.in. w pracach, [16, 18]. Jednak w analizie numerycznej znane są również reguły kwadraturowe, w których do przybliżania całki, oprócz wartości całkowanej funkcji, używa się wartości jej pochodnych.

Przykładem może być tu reguła kwadraturowa Hermite'a

$$\begin{aligned}\int_x^y f(t)dt \approx \frac{y-x}{n}&\left[\frac{f(x)+f(y)}{2} + f\left(x + \frac{y-x}{n}\right)\right.\\ &\left.+\cdots + f\left(x + (n-1)\frac{y-x}{n}\right)\right] + \frac{(y-x)^2}{12}[f'(x) - f'(y)].\end{aligned} \tag{11}$$

Równanie funkcyjne związane z takim rodzajem aproksymacji całki (dla $n = 2$)

$$F(y) - F(x) = (y - x)[f(x) + af(\alpha x + \beta y) + f(y)] + (y - x)^2[g(y) - g(x)]$$

zostało rozwiązane w pracy [17]. Przed opublikowaniem omawianej rozprawy nie były znane wyniki dotyczące równań tego typu o bardziej złożonej postaci.

Dalej, do przybliżania całki można użyć pochodnych wyższych rzędów. Na przykład następująca reguła kwadraturowa Birkhoffa

$$\int_x^y f(t) \approx (y-x)\left[\frac{1}{10}f(x) + \frac{4}{5}f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{10}f(y)\right] + \frac{(y-x)^3}{60}f''\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

jest dokładna dla wielomianów stopnia nie większego niż 5. Jednak żadne równania funkcyjne postaci

$$F(y) - F(x) = \sum_{i=1}^{l}(y-x)^i[f_{1,i}(\alpha_{1,i}x + \beta_{1,i}y) + \cdots + f_{k_i,i}(\alpha_{k_i,i}x + \beta_{k_i,i}y)] \tag{12}$$

z $l > 2$ nie były dotąd badane.

Gdybyśmy ograniczyli badania do równań funkcyjnych związanych z regułami kwadraturowymi wystarczyłoby zająć się równaniem (12). Będziemy szukali rozwiązań ogólniejszego równania (1), gdyż chcemy objąć naszymi wynikami również przypadek równań związanych z różniczkowaniem numerycznym. Przyjrzymy się więc teraz, z naszego punktu widzenia, wzorom różniczkowania numerycznego. Najprostszy wzór przybliżający pochodną przyjmuje postać

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}[f(x-h) - f(x+h)]$$

i jest dokładny dla wielomianów stopnia co najwyżej 2. Równanie funkcyjne związane z tym wzorem

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right)(y-x) = f(x) - f(y)$$

jest równaniem postaci (5). Jednak, aby otrzymać równania prawdziwe dla wielomianów wyższych stopni, musimy użyć bardziej skomplikowanych wzorów, jak na przykład:

$$f'(x) \approx \frac{1}{12h}[-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)]$$

czy

$$f''(x) \approx \frac{1}{12h^2}[-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)],$$

co prowadzi do następujących równań funkcyjnych:

$$3f\left(\frac{x+y}{2}\right)(y-x) = F(x) - 8F\left(\frac{3x+y}{4}\right) + 8F\left(\frac{x+3y}{4}\right) - F(y)$$

i

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}f\left(\frac{x+y}{2}\right)(y-x)^2 = {} & -F(x) + 16F\left(\frac{3x+y}{4}\right) \\ & - 30F\left(\frac{x+y}{2}\right) + 16F\left(\frac{x+3y}{4}\right) - F(y). \end{aligned} \tag{13}$$

Zauważmy, że teraz $h = y - x$ oraz, że stałe występujące po lewych stronach są tak dobrane aby otrzymać równość $F' = f$ (w przypadku rozwiązań ciągłych).

Równania związane z różniczkowaniem numerycznym mają więc postać

$$g(\alpha x + \beta y)(y-x)^k = a_1 f(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \cdots + a_n f(\alpha_n x + \beta_n y) \tag{14}$$

która nie jest już przypadkiem szczególnym równania (5). Z tego powodu, zajmiemy się ogólniejszym równaniem (1). Pokażemy, że funkcje spełniające tego typu równania są funkcjami wielomianowymi.

Funkcje wielomianowe

W tej części podamy, w oparciu o monografię M. Kuczmy [19], definicję i podstawowe fakty na temat funkcji wielomianowych.

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem, niech $f : I \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją oraz niech $x, h \in \mathbb{R}$ będą takie, że $x, x+h \in I$. Operator różnicowy o przyroście h definiujemy wzorem

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Iteracje Δ_h^n są określone rekurencyjnie,

$$\Delta_h^0 f := f,\ \Delta_h^{n+1} f := \Delta_h(\Delta_h^n f),\ n = 1, 2, \dots\ .$$

Używając tych pojęć możemy wprowadzić pojęcie funkcji wielomianowej.

Definicja 1. Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy wielomianową rzędu n jeśli spełnia równanie

$$\Delta_h^{n+1} f(x) = 0 \tag{15}$$

dla dowolnych $x, h \in \mathbb{R}$.

Postać ogólna rozwiązań tego równania została wyznaczona w pracy [21]. Wyraża się ona przy użyciu funkcji multiaddytywnych. Funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazywamy $n-$addytywną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ i dla dowolnych $x_1, \dots, x_n, y_i \in \mathbb{R}$ mamy

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Dalej, diagonalizacją funkcji $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nazywamy funkcję f daną wzorem

$$f(x) := F(x, \dots, x).$$

Możemy teraz przedstawić postać funkcji wielomianowych.

Twierdzenie 1. *Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wielomianową rzędu n, istnieją wówczas takie, jednoznacznie wyznaczone, funkcje $k-$addytywne i symetryczne $F_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$ oraz stała a_0, że*

$$f(x) = a_0 + f_1(x) + \dots + f_n(x), \tag{16}$$

gdzie f_k jest diagonalizacją F_k. Odwrotnie, każda funkcja postaci (16) *jest funkcją wielomianową rzędu n.*

Mówiąc o funkcjach wielomianowych, należy również zacytować następujące twierdzenie L. Székelyhidiego z pracy [28] (Theorem 9.5).

Twierdzenie 2. *Niech G będzie półgrupą abelową, S grupą abelową, n liczbą naturalną a $\varphi_i, \psi_i : G \to G$ takimi funkcjami addytywnymi, że $\varphi_i(G) \subset \psi_i(G)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Jeśli funkcje $f, f_i : G \to S$ spełniają równanie*

$$f(x) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\varphi_i(x) + \psi_i(y)) = 0 \tag{17}$$

to f spełnia

$$\Delta_{h_1,\ldots,h_n} f(x) = 0. \tag{18}$$

Uwaga 2. Zauważmy, że otrzymane w Twierdzeniu 2 równanie (18) oznacza, że f jest funkcją wielomianową, gdyż równania (15) oraz (18) są równoważne.

Wielomianowość rozwiązań równania (1)

W tej części pokażemy, że (pod pewnymi założeniami) rozwiązania równania (1) są funkcjami wielomianowymi. W tym celu użyjemy lematu z pracy [20]. Zanim go sformułujemy musimy wprowadzić pewne oznaczenia. Niech G, H będą grupami abelowymi oraz niech $SA^0(G, H) := H$, $SA^1(G, H) := \mathrm{Hom}(G, H)$ (to znaczy $SA^1(G, H)$ jest grupą homomorfizmów określonych na G o wartościach w H). Niech dalej dla $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$, $SA^i(G, H)$ będzie grupą odwzorowań i–addytywnych i symetrycznych przekształcających G^i w H. Weźmy $\mathcal{P} := \big\{(\alpha, \beta) \in \mathrm{Hom}(G, G)^2 : \alpha(G) \subset \beta(G)\big\}$ oraz dla $x \in G$, przyjmijmy $x^i := \underbrace{(x, \ldots, x)}_{i}$, $i \in \mathbb{N}$.

Lemat 1. *([20]) Niech $N, M, K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, oraz niech $I_0, \ldots, I_{M+K}$ będą skończonymi podzbiorami $\mathcal{P}$. Niech dalej grupa H będzie jednoznacznie podzielna przez $N!$. Jeśli funkcje $\varphi_i : G \to SA^i(G; H)$, $i = 0, \ldots, N$ oraz $\psi_{i,(\alpha,\beta)} : G \to SA^i(G; H)$ $(\alpha, \beta) \in I_i$ $i = 0, \ldots, M + K$ spełniają równanie*

$$\begin{aligned} &\varphi_N(x)(y^N) + \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_i(x)(y^i) = \\ &\textstyle\sum_{i=0}^{M} \sum_{(\alpha,\beta)\in I_i} \psi_{i,(\alpha,\beta)}(\alpha(x) + \beta(y))(y^i) + \\ &\textstyle\sum_{i=M+1}^{M+K} \sum_{(\alpha,\beta)\in I_i} \psi_{i,(\alpha,\beta)}(\alpha(x) + \beta(y))(x^i) \end{aligned} \tag{19}$$

dla dowolnych $x, y \in G$, to φ_n jest funkcją wielomianową rzędu co najwyżej

$$\sum_{i=0}^{M+K} \mathrm{card}\left(\bigcup_{s=i}^{M+K} I_s\right) - 1.$$

Używając tego lematu w omawianej rozprawie udowodniliśmy, że funkcje $f_{j,i}$ spełniające równanie (1) są wielomianowe.

Twierdzenie 3. *Niech l oraz $k_i, i = 0, 1, \dots, l$ będą danymi liczbami naturalnymi i niech*

$$\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{k_i,i}, \beta_{1,i}, \dots, \beta_{k_i,i} \in \mathbb{R} \tag{20}$$

dla $i \in \{0, \dots, l\}$.

Załóżmy, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ funkcje $f_{j,i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = 0, \dots, l; j = 1, \dots, k_i$ spełniają równanie funkcyjne

$$\sum_{i=0}^{l} (y-x)^i [f_{1,i}(\alpha_{1,i}x + \beta_{1,i}y) + \cdots + f_{k_i,i}(\alpha_{k_i,i}x + \beta_{k_i,i}y)] = 0. \tag{1}$$

Niech dalej $i_0 \in \{0, \dots, l\}$ oraz $j_0 \in \{1, \dots, k_{i_0}\}$ będą takie, że

$$\alpha_{j_0,i_0} + \beta_{j_0,i_0} \neq 0, \tag{21}$$

a J_i niech będzie dane wzorem

$$J_i := \left\{ (\alpha_{j,i}, \beta_{j,i}) : j \in \{1, \dots, k_i\}, \begin{vmatrix} \alpha_{j_0,i_0} & \beta_{j_0,i_0} \\ \alpha_{j,i} & \beta_{j,i} \end{vmatrix} = 0 \right\}.$$

Jeśli zachodzi warunek

$$J_{i_0} = \{(\alpha_{j_0,i_0}, \beta_{j_0,i_0})\} \text{ oraz } J_i = \emptyset \text{ dla dowolnych } i \in \{i_0+1, \dots, l\}, \tag{22}$$

to funkcja f_{j_0,i_0} jest wielomianowa rzędu co najwyżej

$$\sum_{i=0}^{l} \operatorname{card}\left(\bigcup_{s=i}^{l} \Big(\{(\alpha_{1,s}, \beta_{1,s}), \dots, (\alpha_{k_s,s}, \beta_{k_s,s})\} \setminus J_s \Big) \right) - 1.$$

Uwaga 3. Aby przedstawić przykład zastosowania Twierdzenia 3 zauważmy, że jeśli funkcje F oraz f spełniają równanie

$$F(y) - F(x) = (y-x) \left[\frac{1}{8} f(x) + \frac{3}{8} f\left(\frac{3x+y}{4} \right) + \frac{3}{8} f\left(\frac{x+3y}{4} \right) + \frac{1}{8} f(y) \right], \tag{23}$$

to f jest funkcją wielomianową rzędu co najwyżej

$$\operatorname{card}\left(\left\{ (1,0), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), (0,1) \right\} \cup \{(1,0),(0,1)\} \right) + \operatorname{card}\left\{ (1,0), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), (0,1) \right\} - 1 = 5.$$

Uwaga 4. Załóżmy, że funkcje F, f i g spełniają równanie

$$F(y) - F(x) = (y-x)[f(x) + af(\alpha x + \beta y) + f(y)] + (y-x)^2[g(y) - g(x)],$$

które zostało rozwiązane w pracy [17]. Jeśli $a \neq 0$, to można pokazać, stosując Twierdzenie 3, że f jest funkcją wielomianową rzędu co najwyżej 5. Jednak nie można użyć tego twierdzenia aby wykazać wielomianowość funkcji g ponieważ w tym przypadku nie jest spełniony warunek (22).

Ciągłość rozwiązań równania (5) Rozważmy następujące równanie funkcyjne

$$F(y) - F(x) = (y-x)\left[\frac{1}{6}f(x) + \frac{2}{3}f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{6}f(y)\right] \tag{9}$$

związane z (8). Wiele faktów dotyczących tego równania można znaleźć w monografii [22] w przypadku funkcji określonych na $\mathbb{R}$, w [14] dla odwzorowań pierścienia całkowitego w siebie oraz w pracy [5] dla funkcji określonych na przedziale. Równanie (9), podobnie jak (2) wymusza ciągłość rozwiązań (zobacz na przykład [16]). Dokładniej, jeśli f i F spełniają (9), to f jest wielomianem stopnia co najwyżej 3 a F jest funkcją pierwotną dla f. Jeśli jednak rozważymy (częściowo) spexideryzowaną wersję (9)

$$F(y) - F(x) = (y-x)\left[f(x) + g\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y)\right], \tag{24}$$

to sytuacja wygląda odmiennie. Zacytujmy wynik z monografii [22] (Twierdzenie 3.8 strona 106)

Twierdzenie 4. *Funkcje $f, g, h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają równanie funkcyjne*

$$f(x) - g(y) = (x-y)[h(x+y) + k(x) + k(y)] \tag{25}$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} f(x) &= 3ax^4 + 2bx^3 + cx^2 + dx + s \\ g(x) &= 3ax^4 + 2bx^3 + cx^2 + dx + s \\ h(x) &= ax^3 + bx^2 + A(x) + d - 2t \\ k(x) &= 2ax^3 + bx^2 + cx - A(x) + t \end{aligned}$$

gdzie $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją addytywną oraz $a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R}$ są dowolnymi stałymi.

Wyrażenie występujące po lewej stronie równania (25) jest nieco ogólniejsze niż w równaniu (24) jednak, podstawiając $x = y$, od razu otrzymujemy równość $f = g$. W monografii [22] znajduje się również podobne twierdzenie dotyczące rozwiązań równania, w którym zamiast wyrażenia $k(x)+k(y)$ używa się dwóch różnych funkcji niewiadomych, jednak to ogólniejsze równanie można łatwo rozwiązać przy użyciu Twierdzenia 4.

Zauważmy, że rozwiązania równań typu (25) czy (24) mają następujące własności:

(i) funkcje występujące po lewej stronie są ciągłe, chociaż nie zakładaliśmy żadnej ich regularności

(ii) nieciągłe składniki pozostałych funkcji redukują się po prawej stronie

(iii) składniki jednomianowe rzędów wyższych niż jeden są ciągłe.

Wszystkie te interesujące własności rozwiązań równania (25) zostaną wyjaśnione przez twierdzenie odnoszące się do ogólniejszego równania (12). Jednak zanim przejdziemy do tego twierdzenia podamy lemat z którego, w szczególności, wynika, że jeśli funkcje wielomianowe spełniają równanie rozważanej przez nas postaci, to ich jednomianowe składniki również spełniają to samo równanie.

Lemat 2. *Niech $m, k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$ będą stałymi. Załóżmy, że funkcje $F, f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, są postaci*

$$f_i(x) := f_{m,i}(x) + \cdots + f_{1,i}(x) + t_{0,i},\ i = 1, \dots, n \tag{26}$$

i

$$F(x) := F_{m+1}(x) + \cdots + F_1(x) + T_0, \tag{27}$$

gdzie $T_0, t_{0,i} \in \mathbb{R}$ są pewnymi stałymi a funkcje $F_j, f_{j,i}, i = 1, \dots, n$ spełniają równości

$$F_j(2x) = 2^j F_j(x),\quad x \in \mathbb{R},\ j = 1, \dots, m+1 \tag{28}$$

i

$$f_{j,i}(2x) = 2^j f_{j,i}(x),\quad x \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

$i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m.$

Jeśli funkcje $f_i, i = 1, \dots, n$ oraz F spełniają równanie

$$F(y) - F(x) = (y - x)[f_1(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \cdots + f_n(\alpha_n x + \beta_n y)], \tag{5}$$

to dla dowolnego $j \in \{1, \dots, m\}$ funkcje $F_{j+1}, f_{j,i},\ i = 1, \dots, n$ również spełniają (5).

Uwaga 5. Dla uproszczenia wypowiedzi lematu ograniczyliśmy się tu do równania (5). Po uważnej analizie dowodu widać, że analogiczną własność mają rozwiązania ogólniejszego równania (1).

Twierdzenie 5. *Niech l oraz $k_i, i = 0, 1, \ldots, l$ będą liczbami naturalnymi i niech*

$$\alpha_{1,i}, \ldots, \alpha_{k_i,i}, \beta_{1,i}, \ldots, \beta_{k_i,i} \in \mathbb{R}, a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{30}$$

dla $i = 0, 1, \ldots, l$.

Załóżmy, że funkcje $f_{j,i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają równanie

$$F(y)-F(x) = \sum_{i=1}^{l} (y-x)^i [a_{1,i} f_i(\alpha_{1,i}x+\beta_{1,i}y)+\cdots+a_{k_i,i} f_i(\alpha_{k_i,i}x+\beta_{k_i,i}y)] \tag{31}$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ oraz, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, l\}$ istnieje takie $j \in \{1, \ldots, k_i\}$, że

$$\alpha_{j,i} + \beta_{j,i} \neq 0$$

przy czym

$$\begin{vmatrix} \alpha_{j,i} & \beta_{j,i} \\ \alpha_{m,n} & \beta_{m,n} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{32}$$

dla $n \in \{i + 1, \ldots, l\}$, $m \in \{1, \ldots, k_n\}$ i dla wszelkich par (m, n) postaci (m, i) spełniających $m \neq j$.

Wówczas $f_1, \ldots, f_l$ są funkcjami wielomianowymi a F jest wielomianem.

Stosując Twierdzenie 5 do równania (5) otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6. *Niech funkcje $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami jednomianowymi danego rzędu k oraz niech F będzie funkcją jednomianową rzędu $k + 1$. Jeśli $f_1, \ldots, f_n, F$ spełniają (5) z pewnymi $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, oraz jeśli istnieje takie $i \in \{1, \ldots, n\}$, że f_i jest funkcją nieciągłą, to istnieją funkcje jednomianowe rzędu k : $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nie wszystkie zerowe, spełniające równanie*

$$g_1(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \cdots + g_n(\alpha_n x + \beta_n y) = 0. \tag{33}$$

Jako, prawie natychmiastowy, wniosek z Twierdzenia 6 dostajemy główny wynik pracy [16].

Twierdzenie 7. *Niech $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami spełniającymi równanie (4), z pewnymi $a_1, \ldots, a_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0, \qquad \alpha_i + \beta_i = 1, i = 1, \ldots, n$$

oraz

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_j & \beta_j \end{vmatrix} \neq 0 \text{ dla } i \neq j.$$

Wówczas f jest wielomianem stopnia co najwyżej $2n-1$ a F jest wielomianem stopnia co najwyżej $2n$. Ponadto zachodzi równość $F' = (\sum_{i=1}^{n} a_i)f$.

Dowód Z Twierdzenia 3 wiemy, że f jest funkcją wielomianową; zapiszmy ją w postaci

$$f(x) = f_m(x) + \cdots + f_1(x) + c,$$

gdzie f_i jest funkcją jednomianową rzędu i. Pokażemy, że f_i są funkcjami ciągłymi. Załóżmy, dla dowodu nie wprost, że istnieje $i \in \{1, \ldots, m\}$, dla którego f_i jest funkcją nieciągłą. Wówczas, korzystając z Twierdzenia 6, wiemy, że równanie

$$a_1 g(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \cdots + a_n g(\alpha_n x + \beta_n y) = 0$$

ma niezerowe rozwiązanie g rzędu i. Jednakże, biorąc tu $x = y$, dostajemy

$$(a_1 + \cdots + a_n) g(x) = 0$$

to znaczy $g = 0$. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że rozwiązania f równania (4) muszą być ciągłe Dysponując ciągłością f łatwo wykazać zarówno różniczkowalność funkcji F jak i równość $F' = (\sum_{i=1}^{n} a_i) f$. □

Pokażemy teraz, że z Twierdzenia 5 można otrzymać pozytywną odpowiedź na problem stawiany ustnie przez M. Sablika podczas konferencji z serii DKWS.

Wniosek 1. *Załóżmy, że funkcje F, f_i $i = 1, \ldots, n$ spełniają* (5) *z pewnymi α_i, β_i, $i = 1 \ldots, n$ takimi, że*

$$\alpha_i + \beta_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

oraz

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_j & \beta_j \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{dla} \quad i \neq j.$$

Wówczas jeśli przynajmniej jedna z funkcji f_i jest nieciągła, to równanie (33) *ma rozwiązanie nieciągłe.*

Dowód Z Twierdzenia 3 wiemy, że f_i są funkcjami wielomianowymi. Niech f_{i_0} będzie funkcją nieciągłą. Wtedy f_{i_0} ma nieciągły składnik jednomianowy pewnego rzędu j_0. Z Lematu 2 wynika, że składniki jednomianowe funkcji f_i rzędu j_0, wspólnie ze składnikiem F rzędu $j_0{+}1$, spełniają równanie (4). Możemy więc użyć Twierdzenia 6, które orzeka, że (33) ma rozwiązanie nieciągłe. □

Można więc powiedzieć, że sytuacja równania (25) nie jest wyjątkowa. W dowolnym równaniu postaci (5) nieciągłe części rozwiązań redukują się po prawej stronie równania.

Uwaga 6. W Twierdzeniu 3.11 omawianej rozprawy pokazujemy, że prezentowane przez nas metody mogą być użyte nie tylko do dowodzenia ciągłości rozwiązań, ale też do rozwiązywania równań, w tym równań z rozwiązaniami nieciągłymi. Co więcej, po dokładnej analizie dowodu tego twierdzenia widać, że rozwiązywanie tego typu równań układa się w pewnego rodzaju algorytm. Wydaje się więc, że można użyć programów komputerowych do obliczeń symbolicznych do rozwiązywania równań tej postaci w podobnym duchu jak było to wykonane w pracy [6] w odniesieniu do równania

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i(p_i x + q_i y) = 0.$$

W następnym twierdzeniu przedstawiamy rozwiązanie ogólne równania (4) z wymiernymi współczynnikami α_i, β_i. Przyjmujemy tutaj, że $0^0 = 1$.

Twierdzenie 8. *Niech $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami jednomianowymi rzędów, odpowiednio, k oraz $k+1$, spełniającymi równanie*

$$F(y) - F(x) = (y - x)[a_1 f(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \cdots + a_n f(\alpha_n x + \beta_n y)]. \tag{4}$$

Niech dalej

$$f(x) = A(x, \ldots, x),\ x \in \mathbb{R},$$

dla pewnej funkcji $k-$addytywnej i symetrycznej $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz niech α_i, β_i spełniają równości

$$\begin{aligned} A(\alpha_i x_1, x_2, \ldots, x_k) &= \alpha_i A(x_1, \ldots, x_k), \\ A(\beta_i x_1, x_2, \ldots, x_k) &= \beta_i A(x_1, \ldots, x_k), \end{aligned} \tag{34}$$

dla $i = 1, \ldots, n$. Jeśli funkcja f jest nieciągła, to

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i^k = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i^{k-1} \beta_i = \cdots = \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i^k = 0. \tag{35}$$

Z drugiej strony, jeśli równanie (35) *jest spełnione, to dowolna funkcja jednomianowa f rzędu k jest rozwiązaniem* (4) *(z $F = const$).*

Jeśli f jest funkcją ciągłą i $f \neq 0$, to dla dowolnych $l, m \in \{0, \ldots, k\}$ mamy

$$\binom{n}{l} \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i^{k-l} \beta_i^l = \binom{n}{m} \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i^{k-m} \beta_i^m. \tag{36}$$

Na odwrót, jeśli zachodzi równośc (36)*, to dowolny jednomian f stopnia k wraz z funkcją F daną wzorem*

$$F(x) = x[a_1 f(\alpha_1 x) + \cdots + a_n f(\alpha_n x)] + c, \tag{37}$$

gdzie $c \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą, jest rozwiązaniem (4)*.*

Uwaga 7. Zauważyliśmy, że Twierdzenie 8 podaje postać rozwiązania ogólnego równania (4) w przypadku wag wymiernych. Jest tak, gdyż Twierdzenie 3 mówi, że rozwiązania (4) są funkcjami wielomianowymi. Z Twierdzenia 2 wiemy, że ich jednomianowe składniki spełniają to samo równanie, zaś Twierdzenie 8 odpowiada na pytanie czy (w zależności od rzędu) mogą być to dowolne funkcje jednomianowe, czy funkcje te muszą być ciągłe i czy się zerują.

Uwaga 8. Jeśli $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ spełniają $a_1 + \cdots + a_n \neq 0$, to można użyć Twierdzenia 8 do rozwiązania równania funkcyjnego

$$F(y)-F(x) = (y-x)[a_1 f(\alpha_1 x+(1-\alpha_1)y)+\cdots+a_n f(\alpha_n x+(1-\alpha_n)y)] \quad (38)$$

również w przypadku, gdy α_i nie są liczbami wymiernymi.

Istotnie, najpierw przy pomocy Twierdzenia 3 stwierdzamy, że f jest funkcją wielomianową, następnie, z Twierdzenia 7 otrzymujemy ciągłość funkcji f. Pozwala to użyć Twierdzenia 8 (równości (34) są spełnione).

Uwaga 9. W przypadku, gdy $a_1 + \cdots + a_n = 0$ można sprowadzić (4) do, o wiele prostszego, równania

$$a_1 f(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \cdots + a_n f(\alpha_n x + \beta_n y) = 0. \quad (39)$$

Dokładniej, pokażemy, że jeśli funkcje jednomianowe F i f rzędów odpowiednio p i $p+1$ spełniają (4) z takimi a_1, α_i, β_i, że

$$\alpha_i + \beta_i = 1, i = 1, \ldots, n \ \text{ i } \ a_1 + \cdots + a_n = 0, \quad (40)$$

to $F = 0$ a f spełnia (39). Istotnie, z Twierdzenia 5 otrzymujemy $F(x) = cx^{p+1}, x \in \mathbb{R}$, dla pewnego $c \in \mathbb{R}$. Używając tej postaci funkcji F w (4), dostajemy

$$c(y^{p-1}x + \cdots + xy^{p-1}) = [a_1 f(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \cdots + a_n f(\alpha_n x + \beta_n y)].$$

Biorąc tu $x = y$ (w rozprawie pokazano, że nie popełniamy w ten sposób błędu) i korzystając z założenia $a_1 + \cdots + a_n = 0$, widzimy, że $c = 0$. Oznacza to, że f spełnia (39).

Znane są wyniki dotyczące rozwiązań równania (39) w przypadku (40) (zobacz na przykład [12, 29, 30]), więc równanie (4) można uważać za rozwiązane, gdy

$$\alpha_i + \beta_i = 1, i = 1, \ldots, n.$$

Co więcej, jeśli liczby $\alpha_i + \beta_i$ są wymierne (niekoniecznie równe jeden) to równanie (4) także można rozwiązać w podobny sposób. Trzeba jedynie zastąpić przypadki: $a_1 + \dots + a_n = 0$ i $a_1 + \dots + a_n \neq 0$ innymi - bardziej skomplikowanymi i zależnymi od rzędu funkcji jednomianowej, którą badamy.

Tak więc jedyny przypadek, w którym rozwiązania równania (4) nie są znane jest sytuacja, gdy $\alpha_i + \beta_i \notin \mathbb{Q}$. Jednak w tym przypadku pewne obiecujące wyniki zostały otrzymane w nieopublikowanej jeszcze pracy G. Kissa [13](w załączeniu).

Ciągłość funkcji spełniających równania związane z regułami Hermite'a i Birkhoffa

Ponieważ równania

$$F(y)-F(x) = (y-x)[a_1 f(\alpha_1 x+\beta_1 y)+\dots+a_n f(\alpha_n x+\beta_n y)]+(y-x)^2[g(y)-g(x)] \tag{41}$$

oraz

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) = \\ &(y - x)\,[a_1 f(x) + b_1 f(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \dots + b_n f(\alpha_n x + \beta_n y) + a_1 f(y)] + \\ &(y - x)^3 [c_1 g(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \dots + c_n g(\alpha_n x + \beta_n y)], \end{aligned} \tag{42}$$

są szczególnymi przypadkami równania (1) więc, korzystając z Twierdzenia 3, można pokazać, że (pod pewnymi założeniami) ich rozwiązania są funkcjami wielomianowymi. Mówią o tym, odpowiednio Lemat 3.22 i Stwierdzenie 3.30 omawianej rozprawy. Potrzebne są w tym celu dosyć rozbudowane, techniczne założenia więc dokładne wypowiedzi tych faktów pominiemy.

Dalej, jak już wspomnieliśmy można pokazać, że jeśli funkcje wielomianowe F, f i g spełniają na przykład równanie (41), to ich jednomianowe składniki rzędów odpowiednio $k, k-1, k-2$ również są rozwiązaniami tego równania. Pozwala to, podobnie jak było to w przypadku równania (4), ograniczyć nasze rozważania do funkcji jednomianowych. Sytuacja wygląda analogicznie również w przypadku równania (42). Omówimy więc teraz twierdzenia dotyczące ciągłości rozwiązań tych równań.

W rozprawie pokazano (Twierdzenie 3.26), że jeśli funkcje F, f i g spełniają (41), to funkcja F musi być ciągła (a więc w istocie jest wielomianem). Ponadto, z Twierdzenia 3.27 wynika, że jeśli $\alpha_i + \beta_i = 1$, $i = 1, \dots, n$ oraz $a_1 + \dots + a_n \neq 0$ to również funkcje f i g muszą byc ciągłe. Równania pochodzące bezpośrednio do reguły kwadraturowej Hermite'a spełniają te założenia więc , korzystając z tych Twierdzeń można je w pełnej ogólności rozwiązać.

Dalej, Twierdzenie 3.34 zawiera podobne wyniki w odniesieniu do równania (42)

Równania funkcyjne związane z różniczkowaniem numerycznym
W tej części omówimy równania związane ze wzorami postaci

$$f^{(k)}(\alpha x+\beta y)(y-x)^k \approx a_1 f(\alpha_1 x+\beta_1 y)+\cdots+a_n f(\alpha_n x+\beta_n y), \tag{43}$$

wykorzystywanymi do przybliżania wartości pochodnej. Rozważymy więc równanie funkcyjne

$$g(\alpha x+\beta y)(y-x)^k = a_1 f(\alpha_1 x+\beta_1 y)+\cdots+a_n f(\alpha_n x+\beta_n y). \tag{14}$$

Podobnie jak miało to miejsce w przypadku reguł kwadraturowych wzór występujący w (43) jest spełniony dokładnie przez wielomiany pewnego stopnia zależnego of postaci szczególnych przypadków równania (43).

Wielomianowość funkcji spełniających (14)
Korzystając z Twierdzenia 3, można pokazać (pod podobnymi założeniami jak dla równania (12)), że jeśli f i g spełniają (14), to f jest funkcją wielomianową rzędu co najwyżej

$$n+1+\underbrace{1+\cdots+1}_{k}-1=n+k$$

oraz g jest funkcją wielomianową rzędu co najwyżej n. Również podobnie jak poprzednio, głównym problemem jakim musimy się zająć jest problem ciągłości rozwiązań równania (14). Zaczniemy jednak od odpowiednika Lematu 2

Lemat 3. *Niech $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą funkcjami wielomianowymi spełniającymi równanie* (14)*, z pewnymi liczbami $\alpha,\beta,\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_n,\beta_n$. Wówczas ich składniki jednomianowe g_i oraz f_{i+k} rzędów odpowiednio i oraz $i+k$ również spełniają to równanie.*

W następnym twierdzeniu pokazujemy, że rozwiązania równania (14), pod pewnymi założeniami, są ciągłe. Niestety wynik ten nie jest tak satysfakcjonujący jak Twierdzenie 5.

Twierdzenie 9. *Niech funkcje $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniają równanie* (14)*. Niech dalej p będzie liczbą naturalną, g będzie funkcją wielomianową rzędu p, f będzie funkcją wielomianową rzędu $p+k$ oraz niech liczby $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$; $\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{Q}, i=1,\ldots,n$; $a_i\in\mathbb{R}, i=1,\ldots,n$ spełniają:*

$$\begin{aligned} a_1\alpha_1^{p+k}+\cdots+a_n\alpha_n^{p+k}\neq 0,\\ a_1\beta_1^{p+k}+\cdots+a_n\beta_n^{p+k}\neq 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Jeśli dokładnie jedna z liczb α, β jest równa zero, to funkcje f i g są zerowe.

Jeśli $\alpha, \beta \neq 0$, to

$$\frac{(-1)^k \alpha^p}{a_1 \alpha_1^{p+k} + \cdots + a_n \alpha_n^{p+k}} = \frac{\beta^p}{a_1 \beta_1^{p+k} + \cdots + a_n \beta_n^{p+k}}. \tag{45}$$

Niech

$$\mathfrak{a}_p := \frac{(-1)^k \alpha^p}{a_1 \alpha_1^{p+k} + \cdots + a_n \alpha_n^{p+k}}. \tag{46}$$

Jeżeli spełnione są następujące warunki:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_p \left[a_1 \alpha_1 \beta_1^{p+k-1} + \cdots + a_n \alpha_n \beta_n^{p+k-1} \right] &\neq \alpha \beta^{p-1}, \\ \mathfrak{a}_p \left[a_1 \alpha_1^2 \beta_1^{p+k-2} + \cdots + a_n \alpha_n^2 \beta_n^{p+k-2} \right] &\neq \alpha^2 \beta^{p-2}, \\ &\vdots \\ \mathfrak{a}_p \left[a_1 \alpha_1^{p-1} \beta_1^{k+1} + \cdots + a_1 \alpha_n^{p-1} \beta_n^{k+1} \right] &\neq \alpha^{p-1} \beta, \\ \mathfrak{a}_p \left[a_1 \alpha_1^p \beta_1^k + \cdots + a_n \alpha_n^p \beta_n^k \right] &\neq \alpha^p, \end{aligned} \tag{47}$$

to funkcje f i g są ciągłe.

Zauważmy, że używając Twierdzenia 9, można z łatwością rozwiązywać konkretne równania typu (14).

Wniosek 2. *Funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają równanie*

$$3g\left(\frac{x+y}{2}\right)(y-x) = f(x) - 8f\left(\frac{3x+y}{4}\right) + 8f\left(\frac{x+3y}{4}\right) - f(y)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

oraz

$$g(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Istotnie, do wykazania tego wniosku wystarczy użyć Twierdzenia 3, aby otrzymać wielomianowość rozwiązań, później Lematu 3, który pozwala ograniczyć rozważania do funkcji jednomianowych i ostatecznie sprawdzić, że zachodzą warunki (47).

Uwaga 10. Łatwo zauważyć, że równanie

$$\frac{1}{4}g\left(\frac{x+y}{2}\right)(y-x)^2 = f(x) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y)$$

ma rozwiązania nieciągłe. Oznacza to, że założenie (44) w Twierdzeniu 9 jest istotne. Problem istotności warunków (47) pozostaje otwarty.

Równania funkcyjne związane z ilorazami różnicowymi

Pokażemy teraz, że nasze wyniki (motywowane analizą numeryczną) mogą być użyte do otrzymania rozwiązań dobrze znanej klasy równań funkcyjnych. W tym celu wprowadzimy rekurencyjną definicję ilorazów różnicowych wyższych rzędów. Niech

$$f[x_1] := f(x_1)$$

oraz

$$f[x_1, \ldots, x_p] := \frac{f[x_2, \ldots, x_p] - f[x_1, \ldots, x_{p-1}]}{x_1 - x_n}.$$

Mamy oczywiście:

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

oraz

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}.$$

Będziemy także używali następującego wzoru wyrażającego jawną postać ilorazu różnicowego $n-$tego rzędu (zobacz na przykład [22]).

Twierdzenie 10. *Dla dowolnego n naturalnego iloraz różnicowy $n-$tego rzędu wyraża sie wzorem*

$$f[x_1, \ldots, x_n] = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod_{k=1, k\neq j}^{n}(x_j - x_k)}.$$

Następny lemat można znaleźć na przykład w monografii [19].

Lemat 4. *Niech $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ będą liczbami postaci*

$$x_i = x_1 + (i-1)d,\ i = 1, \ldots, n,$$

dla pewnego $d \in \mathbb{R}$. Wówczas spełniona jest równość

$$f[x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta_d^{n-1} f(x_1)}{(n-1)! d^{n-1}}. \tag{48}$$

Używając tego pojęcia, równanie Aczéla można zapisać następująco

$$g(x+y) = f[x,y]. \tag{49}$$

Dlatego, jako naturalne uogólnienia równania (49), D.F. Bailey w pracy [2] rozważał równanie

$$g(x+y+z) = f[x,y,z],$$

które rozwiązał pod założeniem różniczkowalności funkcji g. Bailey zadał również pytanie o postać rozwiązań ogólniejszego równania

$$g(x_1 + \cdots + x_n) = f[x_1, \ldots, x_n]. \tag{50}$$

Znane jest twierdzenie o wartości średniej dla ilorazów różnicowych dowolnego rzędu (zobacz na przykład [22]).

Twierdzenie 11. *Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^n i niech $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$. Istnieje wówczas taki punkt η z przedziału*

$$[\min\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \max\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}],$$

że

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!}.$$

W tej samej monografii można znaleźć również następujące twierdzenie.

Twierdzenie 12. *Jeśli dla pewnego l mamy $f(x) = x^l$, to*

$$f[x_1, \ldots, x_n] = \begin{cases} 0 & \text{gdy } l < n-1, \\ 1 & \text{gdy } l = n-1, \\ x_1 + \cdots + x_n & \text{gdy } l = n \end{cases}$$

dla dowolnego n.

Uwaga 11. Twierdzenie 11 orzeka, że iloraz $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ jest równy wartości $n-$tej pochodnej funkcji f w pewnym punkcie. Dalej, z Twierdzenia 12 wiemy, że dla jednomianów punkt ten jest średnią arytmetyczną $x_1, \ldots, x_n$. Oznacza to, że równanie (50) ma nietrywialne rozwiązanie i warto zastanowić się, czy ma ono inne rozwiązania.

Równanie (50) zostało rozwiązane przez Pl. Kannappana i P.K. Sahoo w pracy [11]. Autorzy późniejszych prac zajmowali się równaniem (50) na ogólniejszych strukturach niż $\mathbb{R}$. W pracach [3] i [26] równanie to było rozważane na ciele o charakterystyce różnej od 2, a w pracy [4] został (po odpowiedniej modyfikacji równania) rozważony przypadek funkcji określonych na pierścieniu całkowitym. Warto również wspomnieć, że w pracy [9] spexideryzowana wersja (50) została rozwiązana w ciele o charakterystyce różnej od dwóch, zawierającym pewną liczbę różnych punktów. Dla przykładu zacytujemy tu twierdzenie dla funkcji określonych na $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 13. *([22], Theorem 2.8) Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami spełniającymi równanie* (50) *dla wszystkich parami różnych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Wówczas g jest wielomianem stopnia co najwyżej n, a funkcja f jest wielomianem stopnia pierwszego.*

W następnym stwierdzeniu odnotujemy związek pomiędzy równaniem (50) a pewnym równaniem postaci (14).

Stwierdzenie 1. *Jeśli funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają równanie* (50)*, to spełniają również równanie*

$$\frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}} g\left(\frac{n(x+y)}{2}\right)(y-x)^{n-1} = \Delta^{n-1}_{\frac{y-x}{n-1}} f(x). \tag{51}$$

Istotnie, załóżmy, że funkcje f i g spełniają (50) i weźmy

$$x_i := x + (i-1)\frac{y-x}{n-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Wóczas, z Lematu 4, dostajemy

$$f[x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^{n-1}_{\frac{y-x}{n-1}} f(x)}{(n-1)! \left(\frac{y-x}{n-1}\right)^{n-1}}.$$

Z drugiej strony

$$x_1 + \cdots + x_n = x + x + \frac{y-x}{n-1} + \cdots + x + (n-1)\frac{y-x}{n-1} = \frac{n(x+y)}{2}$$

co znaczy, że otrzymaliśmy równanie (51).

Używając podobnego rozumowania jak we Wniosku 2 w omawianej rozprawie otrzymano następujące twierdzenie.

Twierdzenie 14. *Funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają równanie* (51) *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + f_{n-2}(x) + \cdots + f_1(x) + c$$

i

$$g(x) = ax + b,$$

gdzie $f_i, i = 1, \ldots, n-2$ są funkcjami jednomianowymi rzędu i oraz $a, b, c \in \mathbb{R}$ sa pewnymi stałymi.

Korzystając z tego twierdzenia można otrzymać wynik, wzmacniający Twierdzenie 13.

Twierdzenie 15. *Jeśli funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają równanie* (50) *dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ takich, że różnica $x_{i+1} - x_i$ nie zależy od $i = 1, \ldots, n-1$ oraz dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ postaci $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, x$ gdzie c_i, dla $i = 1, \ldots, n$ są pewnymi, parami różnymi stałymi, to*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

i

$$g(x) = a_n x + a_{n-1}$$

dla pewnych $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$.

Na odwrót, funkcje f, g dane powyższymi wzorami spełniają (50) *dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.*

Udowodniliśmy w tym twierdzeniu, że równanie zachowuje swoje rozwiązania jeśli założymy, że jest spełnione nie dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n$ ale jedynie na pewnym podzbiorze $\mathbb{R}^n$. W rzeczywistości, w twierdzeniu tym wyznaczyliśmy minimalny zbiór o takich własnościach.

Nowa metoda wykazywania wielomianowości rozwiązań równania (5)

Zaprezentujemy teraz prostą obserwację, której można użyć do wykazania iż rozwiązania równań typu kwadraturowego są funkcjami wielomianowymi.

Metoda ta nie jest tak uniwersalna jak Twierdzenie 3, jednak jest kilka powodów, dla których o niej wspominamy. Po pierwsze stanowiła ona inspirację pewnego uogólnienia równania Aczéla (2), które to uogólnienie później omówimy. Dalej, w niektórych przypadkach okazuje się, że otrzymany w taki sposób rząd funkcji wielomianowej jest niższy niż ten który został wyznaczony przy użyciu lematu Sablika (Lemat 1) oraz, że metodę tę można stosować dla funkcji określonych na przedziale. Ostatecznie, metoda ta (po odpowiednich modyfikacjach) może być zastosowana do otrzymania wyników typu stabilnościowego

Podejście to, w skrócie, polega na eliminacji (przez odpowiednie podstawienia) z równania (5) lub (4) funkcji F. W omawianej rozprawie znajduje się, na przykład, następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 2. *Jeśli funkcje $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają równanie*

$$F(y) - F(x) = (y - x)\left[a_1 f(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \cdots + a_n f(\alpha_n x + \beta_n y)\right], \qquad (4)$$

to f spełnia

$$a_1 f((\alpha_1+\beta_1)x+\beta_1 h)+\cdots+a_n f((\alpha_n+\beta_n)x+\beta_n h)+$$
$$a_1 f((\alpha_1+\beta_1)x+(\alpha_1+2\beta_1)h)+\cdots+a_n f((\alpha_n+\beta_n)x+(\alpha_n+2\beta_n)h)$$
$$=2\left[a_1 f((\alpha_1+\beta_1)x+2\beta_1 h)+\cdots+a_n f((\alpha_n+\beta_n)x+2\beta_n h)\right], \tag{52}$$

dla dowolnych $x, h \in \mathbb{R}$.

Stwierdzenie to (które ma zaskakująco prosty dowód - zobacz strony 48-49 rozprawy) łącznie z twierdzeniem Székelyhidiego (Twierdzenie 2) pozwala stwierdzić, że funkcje spełniające (4) muszą być wielomianowe. Co więcej znane są wersje twierdzenia Székelyhidiego dla odwzorowań określonych na przedziale (zobacz [27]). Oznacza to, że takie podejście jest, w pewnym sensie, ogólniejsze niż metoda oparta na wykorzystaniu lematu Sablika (Lemat 1). Oczywiście można go użyć jedynie do wyznaczania rozwiązań równania (4) lub (5).

Twierdzenie 16. *Niech $(G,\circ),(H,+)$ będą półgrupami, $(S,*)$ niech będzie półgrupą abelową. oraz niech $F: S\to G, f: S\to G, \varphi: S\to H, T: G\times H\to G$ będą takimi funkcjami, że*

$$\varphi(x*y)=\varphi(x)+\varphi(y) \tag{53}$$

oraz wartości funkcji F,φ są odwracalne wzgledem działań odpowiednio $\circ$ i $+$.

Jeśli jest spełnione równanie

$$F(x)\circ F(y)^{-1}=T(f(x*y),\varphi(y)-\varphi(x)), \tag{54}$$

to f,φ i T spełniają

$$T(f(x^2*h^2,2\varphi(h))^2=T(f(x^2*h,\varphi(h))\circ T(x^2*h^3,\varphi(h))$$

Twierdzenia tego można użyć do nowego (krótkiego) dowodu twierdzenia wyznaczającego rozwiązania równania Aczéla (zobacz Corollary 5.2 rozprawy) , jednak, co bardziej interesujące, pozwala ono rozwiązywać następujące równania:

$$F(x)-F(y)=(\log x-\log y)f(xy),$$
$$\frac{F(x)}{F(y)}=f(x+y)^{x-y},$$

i

$$\frac{F(x)}{F(y)} = f(xy)^{\log x - \log y}$$

które można nazwać, odpowiednio, logarytmiczną, eksponencjalną i multyplikatywną wersją równania Aczéla.

Jest widoczne, że bardziej skomplikowane równania motywowane regułami kwadraturowymi również można modyfikować w podobny sposób.

Ponadto używając tej samej metody, która posłużyła do dowodów Stwierdzenia 2 i Twierdzenia 16 można udowodnić następujące twierdzenie, które można nazwać pierwszym krokiem do wykazania stabilności równań typu (4).

Stwierdzenie 3. *Jeśli funkcje $F, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spelniają równanie*

$$\Big|F(y) - F(x) - (y-x)\big[f_1(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \cdots + f_n(\alpha_n x + \beta_n y)\big]\Big| \le \varepsilon, \tag{55}$$

to f spełnia nierówność

$$\begin{aligned}\Big|h\big[&f_1((\alpha_1+\beta_1)x + \beta_1 h) + \cdots + f_n((\alpha_n+\beta_n)x + \beta_n h) + \\ &f_1((\alpha_1+\beta_1)x + (\alpha_1+2\beta_1)h) + \cdots + f_n((\alpha_n+\beta_n)x + (\alpha_n+2\beta_n)h) - \\ &2[f_1((\alpha_1+\beta_1)x + 2\beta_1 h) + \cdots + f_n((\alpha_n+\beta_n)x + 2\beta_n h)]\big]\Big| \le \varepsilon\end{aligned} \tag{56}$$

Ponadto w rozprawie znajduje się kilka problemów otwartych. Jak już wspomnieliśmy jeden z nich znalazł częściowe rozwiązanie w nieopublikowanej jeszcze pracy [13].

Literatura

[1] J. Aczél, *A mean value property of the derivative of quadratic polynomials—without mean values and derivatives*, Math. Mag., **58**, 1, 1985, 42–45.

[2] D. F. Bailey, *A mean value property of cubic polynomials - without mean value,* Math. Mag., **65**, (1992), 123–124.

[3] R. O. Davies, G. Rousseau, *A divided difference characterization of polynomials over a general field,* Aequationes Math., **55**, (1998), 73–78.

[4] B. R. Ebanks, P. de Place Friis *A class of functional equations (almost) characterizing polynomials on integral domains,* Sarajevo J. Math., (2005), **1** (14) 185–196.

[5] J. Ger, *On Sahoo-Riedel equations on a real interval*, Aequationes Math., **63**, 1-2, 2002, 168–179.

[6] A. Gilányi, *Solving linear functional equations with computer*, Math. Pannon., **9**/1, 1998, 57–70.

[7] Sh. Haruki, *A property of quadratic polynomials,* Amer. Math. Monthly 86 no. 7 (1979), 577–579.

[8] M.S. Jacobson, PL. Kannappan,P.K. Salloo *A characterization of low degree polynomials,* Demonstratio Mathematica, **28** (1995) 87–96.

[9] Pl. Kannappan, *Divided differences and polynomials*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **16** 1994, 187–192.

[10] Pl. Kannappan, T. Riedel, P.K. Sahoo, *On a functional equation associated with Simpson's rule*, Results Math., **31**, 1-2, 1997, 115–126.

[11] Pl. Kannappan, P.K. Sahoo, , *Characterization of polynomials and divided difference*, Proc. Indian Acad. Sci., **105**, 1995, 287–290.

[12] G. Kiss, A. Varga, Talk at the 50^{th} International Symposium on Functional Equations, June 17 - 24, 2012, Hajdúszoboszló, Hungary.

[13] G. Kiss, *On the additive solutions of inhomogeneous linear functional equations,* manuscript.

[14] B.Koclęga-Kulpa, T. Szostok, *On some functional equations connected to Hadamard inequalities*, Aequationes Math., **75**, 1-2, 2008, 119–129,

[15] B. Koclęga-Kulpa,T. Szostok, *On a functional equation connected to Gauss quadrature rule*, Ann. Math. Sil., No. 22 (2008), 27—40 (2009).

[16] B. Koclęga-Kulpa, T. Szostok, *On a class of equations stemming from various quadrature rules,* Acta Math. Hungarica 2011, **130**, Number 4, 340–348.

[17] B. Koclęga-Kulpa, T. Szostok, *On a functional equation connected to Hermite quadrature rule,* J. Math. Anal. Appl., Volume 414, Issue 2, 632–640.

[18] B. Koclęga-Kulpa,T. Szostok, Sz. Wąsowicz, *On functional equations connected with quadrature rules*, Tatra Mt. Math. Publ., 2009, 27–40

[19] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality*, 2nd edition 2009, Birkhäuser Verlag.

[20] A. Lisak, M. Sablik, *Trapezoidal rule revisited*, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.), **6** (2011), no. 3, 347-–360.

[21] S. Mazur, W. Orlicz *Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen*, Studia Math., **5**, 1934, 50–68, 179–189

[22] T. Riedel, P.K. Sahoo, *Mean value theorems and functional equations*, 1998, World Scientific.

[23] W. Rudin. *Problem E3338*, Amer. Math. Monthly, **96** (1989) 641.

[24] P.K. Sahoo, *On a functional equation associated with the trapezoidal rule,* Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.) 2 (2007), no. 1, 67—82.

[25] P.K. Sahoo, *On a functional equation associated with the trapezoidal rule II.* Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.), **4** (2009), no. 1, 9—23.

[26] J. Schwaiger, *On a characterization of polynomials by divided differences,* Aequationes Math., **48** (1994), 317–323.

[27] L. Székelyhidi, *On a class of linear functional equations,* Publ. Math. Debrecen, **29** (1982), 19–28.

[28] L. Székelyhidi, *Convolution Type Functional Equations on Topological Abelian Groups,* World Sci. Publ. Co., Singapore, 1991.

[29] A. Varga, Talk at the 13^{th} Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Functional Inequalities January 30 - February 02, 2013, Zakopane, Poland.

[30] A. Varga, Cs. Vincze *On a functional equations containing weighted arithmetic means,* International Series of Numerical Mathematics, **157** (2009), 305-315.

5. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

    (a) Wykaz opublikowanych prac naukowych nie wchodzących w skład osiągnięcia wymienionego w punkcie 4

Literatura

[Sz1] T. Szostok, *On a modified version of Jensen inequality,* J. Inequal. Appl., **3** (1999), no. 4, 331-347.

[Sz2] T. Szostok, *Modified version of Jensen equation and orthogonal additivity,* Publ. Math. Debrecen, **58** (2001), no. 3, 491-504.

[Sz3] T. Szostok, *On a generalized orthogonal additivity,* Bull. Polish Acad. Sci. Math., **49** (2001), no. 4, 395-408.

[Sz4] T. Szostok, *On some conditional functional equations,* Ann. Math. Sil. No. 16 (2002), 65-77 (2003).

[Sz5] T. Szostok, *On a generalization of the sine function,* Glas. Mat. Ser. III, **38**(58) (2003), no. 1, 29-44.

[Sz6] J. Sikorska, T. Szostok, *On mappings preserving equilateral triangles,* J. Geom., **80** (2004), no. 1-2, 209-218 .

[Sz7] J. Sikorska, T. Szostok, *On mappings preserving equilateral triangles in normed spaces,* J. Geom., **85** (2006), no. 1-2, 149-156

[Sz8] B. Koclęga-Kulpa, T. Szostok, *On some functional equations connected to Hadamard inequalities,* Aequationes Math., **75** (2008), no. 1-2, 119-129

[Sz9] B. Koclęga-Kulpa, T. Szostok, *On a functional equation connected to Gauss quadrature rule,* Ann. Math. Sil. **22** (2008), 27-40.

[Sz10] B. Koclęga-Kulpa, T. Szostok, *Some functional equations characterizing polynomials,* Tatra Mt. Math. Publ., **44** (2009), 27-40

[Sz11] B. Koclęga-Kulpa, T. Szostok, Sz.Wąsowicz, *On functional equations connected to quadrature rules,* Georgian Math. J. **16** (2009), 4, 725-736

[Sz12] B. Koclęga-Kulpa, T. Szostok, Sz.Wąsowicz, *On some equations stemming from quadrature rules,* Ann. Acad. Pedagog. Crac. Stud. Math. VIII (2009), 19-30.

[Sz13] B. Koclęga-Kulpa, T. Szostok, *On a class of equations stemming from various quadrature rules,* Acta Math. Hungar., March 2011, Volume 130, Issue 4, pp 340-348.

[Sz14] Sz. Wąsowicz, T. Szostok *On the stability of the equation stemming from Lagrange MVT,* Appl. Math. Lett., **24**, No. 4, 541-544 (2011).

[Sz15] T. Szostok, *On ω-convex functions,* Banach Center Publ. **92** (2011), 351-359.

[Sz16] M. Baczyński, W. Niemyska, T. Szostok, *On a functional equation related to distributivity of fuzzy implications,* 2013 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ IEEE 2013) Hyderabad, India, July 7-10, 2013 pp.1-5.

[Sz17] B. Koclęga-Kulpa, T. Szostok, *On a functional equation connected to Hermite quadrature rule,* J. Math. Anal. Appl., **414**, Issue 2 (2014) 632–640.

[Sz18] T. Szostok, *Ohlin's lemma and some inequalities of the Hermite-Hadamard type* Aequationes Math. http://link.springer.com/article/10.1007/s00010-014-0286-2

[Sz19] T. Szostok, *The generalized sine function and geometrical properties of normed spaces,* Opuscula Math. **35**, no. 1 (2015), 117-126

[Sz20] M. Baczyński, W. Niemyska, T. Szostok *On a functional equation related to distributivity of fuzzy implications,* Kybernetika **50** no. 5, 679-695, 2014.

[Sz21] A, Olbryś, T. Szostok, *Inequalities of the Hermite-Hadamard type involving numerical differentiation formulas,* Results Math., http://link.springer.com/article/10.1007/s00025-015-0451-5

(b) Omówienie tematyki prac ujętych w punkcie 5(a)

Pozostały mój dorobek można podzielić na kilka grup. Pierwszą grupę stanowią prace [Sz1, Sz15]. W pracach tych rozważa się wzmocnioną nierówność Jensena

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \gamma[f(x)+f(y)], x, y > 0, x \le ay \tag{57}$$

gdzie $a \in (0,1), \gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ są pewnymi stałymi. Nierówność (57) jest używana w teorii przestrzeni Orlicza i jeśli funkcja Orlicza spełnia tę nierówność, to przestrzeń Orlicza związana z tą funkcją ma pewne pożądane własności geometryczne na przykład takie jak jednostajna wypukłość. Główne twierdzenie pracy [Sz1] mówi, że jeśli funkcja $f(0,\infty) \to (0,\infty)$ spełnia nierówność (57) oraz $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, to istnieją stałe $b, c > 0$ oraz $d > 1$ takie, że

$$f(x) \leq cx^d, \quad x \in (b,\infty).$$

Oznacza to, że rozwiązania nierówności można oszacować przez funkcje potęgowe, które spełniają równanie

$$f(x + ax) = \gamma(a)[f(x) + f(ax)]. \tag{58}$$

Równanie to również zostało rozwiązane w pracy [Sz1]. Praca [Sz15] także jest poświęcona nierówności (57). W pracy tej wykorzystano rodzinę Beckenbacha typu

$$\{\omega(x + \alpha) + b : a, \beta \in \mathbb{R}\}$$

gdzię ω jest funkcją spełniającą pewne warunki. Używając tej rodziny można rozważać pojęcie wypukłości, która w pracy [Sz15] nazywana jest $\omega-$wypukłością. Głownym wynikiem pracy [Sz15] jest następujące twierdzenie, które wiąże nierówność (57) z $\omega-$wypukłościa dla funkcji $\omega(x) = |x|^c$.

Twierdzenie 17. *Niech $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ będzie funkcją Orlicza. Niech d będzie liczbą większą od zera, niech $c > 2$ a zbiór A_d będzie zdefiniowany następująco*

$$A_d := \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \leq dx^c\}.$$

Jeśli funkcja $\varphi_{|[0,\infty)}$ jest $|x|^c-$wypukła, to istnieje taka funkcja $\gamma : (0,1) \to (0,1/2)$, że nierówność

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \gamma(a)[f(x) + f(y)]$$

jest spełniona dla wszelkich $a \in (0,1)$ i $x, y \in A_d$ takich, że $x \leq ay$.

Prace [Sz2, Sz3, Sz4] poświęcone są badaniom związków warunkowych równań funkcyjnych z równaniami motywowanymi nierównościami używanymi w przestrzeniach Orlicza. Równanie (58) (dla $x, y > 0$) można zapisać w postaci

$$f(x + y) = \gamma\left(\frac{x}{y}\right)[f(x) + f(y)]. \tag{59}$$

Łatwo widać, że funkcja f spełnia (59) (z pewną funkcją γ) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia

$$f(x + y) = \gamma\left(\frac{|x-y|}{|x+y|}\right)[f(x) + f(y)] \tag{60}$$

oczywiście na ogół z inną funkcją γ. Jednak równanie (60) można rozważać dla funkcji określonych na przestrzeniach unormowanych (po zastąpieniu wartości bezwzględnej przez normę). W pracy [Sz2] udowodniono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 18. *Niech X będzie przestrzenią unitarną. Wówczas funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ spełnia równanie*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \gamma\left(\frac{\|x-y\|}{\|x+y\|}\right)[f(x)+f(y)], \tag{61}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z warunków:

$\gamma(\alpha) = \frac{1}{2}$, *dla* $\alpha \geq 0$ *oraz*

$$f(x) = b(x) + c,\ x \in X,$$

dla pewnych funkcji addytywnej $b : X \to \mathbb{R}$ i stałej rzeczywistej c,

lub

$\gamma(\alpha) = \frac{1}{2(1+\alpha^2)}$, *dla* $\alpha \geq 0$ *oraz*

$$f(x) = k\|x\|^2,\ x \in X,$$

dla pewnej stałej $k \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie to oznacza, że istnieje związek pomiędzy równaniami motywowanymi własnościami funkcji Orlicza a ortogonalną addytywnością. Dokładniej, ciągłe rozwiązania ortogonalnego równania Cauchy'ego można wyrazić jako sumę dwóch rozwiązań równania (61). Oczywiście występujące w rozwiązaniach równania (5) stałe pojawiają się tam gdyż rozważamy równanie Jensena zamiast równania Cauchy'ego.

Dalej, z równania (61), w szczególności, można otrzymać następujące, dobrze znane, warunkowe równanie funkcyjne

$$\|x+y\| = \|x-y\| \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \gamma(1)[f(x)+f(y)].$$

Dlatego naturalne jest pytanie o inne przypadki szczególne równania, które dają nam równanie spełnione dla wektorów o pewnym, ustalonym ilorazie przekątnych (niekoniecznie równym 1). Równanie takie badano w pracy [Sz3]. Zacytujemy najważniejszy wynik pochodzący z tej pracy.

Twierdzenie 19. *Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią unormowaną wymiaru co najmniej 2 i niech L będzie daną przestrzenią liniową. Wówczas nieparzysta funkcja $f : X \to L$ spełniająca warunek:*

$$[\ \|x-y\| = \alpha\|x+y\| \text{ lub } \|x+y\| = \alpha\|x-y\|\ ] \Rightarrow f(x+y) = \gamma[f(x)+f(y)]$$

z pewnym $\alpha \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$ *i* $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, *jest funkcją addytywną.*

Iloraz $\frac{\|x-y\|}{\|x+y\|}$ jest ściśle powiązany z prostopadłością Jamesa. Dokładniej, x, y są wektorami ortogonalnymi w sensie Jamesa wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\|x-y\|}{\|x+y\|} = 1$. W pracach [Sz5, Sz19] zajmujemy się konstrukcją i własnościami wyrażenia odgrywającego podobną rolę dla prostopadłości Birkhoffa-Jamesa. Przypomnijmy, że jeśli X jest przestrzenią unormowaną, to dla $x, y \in X$ mówimy, że y jest prostopadły do x w sensie Birkhoffa-Jamesa (i piszemy $x \perp_{BJ} y$) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\| \text{ dla } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Niech więc $(X, \|\cdot\|)$ będzie rzeczywistą przestrzenią unormowana. Funkcję $s : X \times X \to \mathbb{R}$ definiujemy następującym wzorem

$$s(x,y) := \begin{cases} \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{\|x+\lambda y\|}{\|x\|} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Związek funkcji s z prostopadłością Birkhoffa-Jamesa podaje relacja

$$s(x,y) = 1 \Leftrightarrow x \perp_{BJ} y.$$

Jednak funkcja s przyjmuje poza jedynką wszystkie inne wartości z przedziału $[0, 1]$. W pewnym sensie można więc powiedzieć, że mierzy ona kąt pomiędzy wektorami x i y. Używając funkcji s można rozważać równania podobne do (57), ale związane nie z prostopadłością Jamesa, tylko Birkhoffa-Jamesa. Takie równania zostały (między innymi) rozważone w pracy [Sz4].

Z drugiej strony, prace [Sz5, Sz19] poświęcone są badaniu własności samej funkcji s. Łatwo pokazać, że jeśli X jest przestrzenia euklidesową, to $s(x, y)$ jest równe wartości bezwzględnej sinusa kąta między wektorami x i y. Następnie, opierając się na funkcji s, zdefiniowano nową funkcję której dziedziną jest $\mathbb{R}$, i którą można nazwać ugólnieniem funkcji sinus na dowolną przestrzeń unormowaną. Przy użyciu tej funkcji również można charakteryzować przestrzenie unitarne, ale okazuje się, że także takie, geometryczne, własności jak ścisła wypukłość czy gładkość przestrzeni unormowanych mają związek z własnościami tej nowej funkcji.

W pracy [Sz4] rozważone zostało następujące równanie Ptolemeusza

$$\|x + y\| = \|x - y\| \Rightarrow f(x)^2 + f(y)^2 = f(x + y)f(x - y) \tag{62}$$

i jego zmodyfikowana (bezwarunkowa) wersja

$$f(x + y)f(x - y) = \gamma \left(\frac{\|x - y\|}{\|x + y\|} \right) [f(x)^2 + f(y)^2]. \tag{63}$$

Równanie (62) zostało w tej pracy rozwiązane i w rezultacie otrzymano nową charakteryzację przestrzeni unitarnych. Ponadto równanie (63) zostało rozwiązane dla funkcji określonych na $\mathbb{R}$.

Prace [Sz6, Sz7] poświęcone są problemowi zachowywania trójkątów równobocznych. Załóżmy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną a funkcja $f : X \to X$ spełnia warunek

$$d(x, y) = d(y, z) = d(x, z) \Rightarrow d(f(x), f(y)) = d(f(y), f(z)) = d(f(x), f(z)).$$

Powstaje naturalne pytanie czy f musi być podobieństwem. Prace [Sz6, Sz7] udzielają twierdzącej odpowiedzi na to pytanie w przypadkach, gdy X jest przestrzenią euklidesową oraz gdy jest przestrzenią unormowaną wymiaru co najmniej 3.

Prace [Sz16, Sz20] dotyczą równania związanego z rozdzielnością implikacji rozmytych. Dokładniej, w niedawno opublikowanych pracach dotyczących tego typu zagadnień pojawiło się równanie

$$f(\min(x + y), a) = \min(f(x) + f(y), b).$$

W pracach [Sz16, Sz20] rozważone zostało następujące uogólnienie tego równania

$$f(m_1(x + y)) = m_2(f(x) + f(y)),$$

gdzie $r_1, r_2 \in (0, \infty), m_1 : [0, 2r_1] \to [0, r_1], m_1 : [0, 2r_1] \to [0, r_1]$ są funkcjami spełniającymi pewne warunki a $f : [0, r_1] \to [0, r_2]$.

Prace [Sz8, Sz9, Sz10, Sz11, Sz12, Sz13, Sz14, Sz17] poświęcone są podobnym zagadnieniom jak rozprawa wymieniona w punkcie 4. W pracy [Sz8] równanie

$$(y - x)\left[\frac{f(x) + f(y)}{2} + pf\left(\frac{x + y}{2}\right)\right] = (p + 1)[F(y) - F(x)]$$

zostało rozwiązane w przypadku, gdy funkcje F i f są określone i przyjmują wartości w pierścieniu całkowitym jednoznacznie podzielnym przez 2 i 3.

Praca [Sz9] poświęcona jest równaniu funkcyjnemu

$$F(y) - F(x) = (y - x)[f(x + \gamma y) + f(\gamma x + y)] \tag{64}$$

dla funkcji działających na pierścieniach całkowitych podzielnych przez 2 i 3. Warto podkreślić, że zastosowanie otrzymanych w tej pracy wyników do ciała liczb rzeczywistych pozwala rozwiązać równanie (64) w pełnej ogólności - nie zakłada się wymierności liczby λ. Jest to pierwsza praca poświęcona równaniom typu (5), w której dopuszcza się niewymierne współczynniki w argumencie funkcji f

Wyniki otrzymane w pracy [Sz10] dotyczą rozwiązań równania

$$8[F(x) - F(y) = (x-y)\left[f(x) + 3f\left(\frac{x+2y}{3}\right) + 3f\left(\frac{2x+y}{3}\right) + f(y)\right], \tag{65}$$

gdzie $f, F : P \to P$ są funkcjami niewiadomymi określonymi na pierścieniu całkowitym P. Równanie (65) zostało rozwiązane przy użyciu twierdzenia dotyczącego ogólniejszego równania

$$F(x) - F(y) = (x-y)[b_1 f(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \cdots + b_n f(\alpha_n x + \beta_n y)].$$

W pracy [Sz14] został rozważony problem stabilności równania Aczéla w sensie Hyersa-Ulama. Okazuje się, że równanie to jest superstabilne. Dokładniej, jeśli funkcje $F, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają nierówność

$$\left| F(y) - F(x) - (y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \le \varepsilon,$$

to f jest wielomianem stopnia co najwyżej pierwszego to znaczy spełnia równanie

$$G(y) - G(x) = (y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

z odpowiednio dobraną funkcją G.

W pracy [Sz17] otrzymano rozwiązanie ogólne równania

$$F(y) - F(x) = (y-x)[f(x) + af(x+y) + f(y)] + (y-x)^2[g(y) - g(x)].$$

Wynik ten został uogólniony w rozprawie opisanej w punkcie 4.

Prace [Sz18] i [Sz21] poświęcone są metodzie dowodzenia nierówności dla funkcji wypukłych z wykorzystaniem całki Stieltjesa. W pracy [Sz18] używamy w tym celu lematu Ohlina. Lemat Ohlina stwierdza, że jeśli dwie zmienne losowe mają równe wartości oczekiwane a dla ich dystrybuant F_1, F_2 istnieje taki punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, że

$$F_1(x) \le F_2(x) \text{ dla } x < x_0 \text{ oraz } F_1(x) \ge F_2(x) \text{ dla } x > x_0,$$

to zachodzi nierówność

$$Ef(X_1) \le Ef(X_2) \tag{66}$$

dla wszystkich funkcji wypukłych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jak zauważyła T. Rajba lemat Ohlina może posłużyć do (zaskakująco szybkiego) dowodu nierówności Hermite'a-Hadamarda

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \int_x^y f(t)dt \le \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{67}$$

spełnionej dla funkcji wypukłych. W pracy [Sz18] pokazano, że podobną metodę można zastosować również w przypadku, gdy dystrybuanty F_1, F_2 mają więcej punktów przecięcia niż jeden. W efekcie uzyskano uogólnienia nierówności Hermite'a-Hadamarda postaci

$$af(\alpha x + (1-\alpha)y) + (1-a)f(\beta x + (1-\beta y) \le \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)dt$$

oraz

$$bf(x) + cf(\gamma x + (1-\gamma)y) + df(y) \ge \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)dt.$$

Temat ten jest kontynuowany w pracy [Sz21]. Po zapisaniu nierówności (67) w postaci

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

(gdzie $F' = f$) widzimy, że w pracy [Sz18] wyrażenia $f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, $\frac{f(x)+f(y)}{2}$ występujące w nierówności Hermite-Hadamarda zostały zastąpione przez ogólniejsze operatory typu kwadraturowego podczas, gdy środkowe wyrażenie pozostało niezmienione. W pracy [Sz21] pozostawiamy bez zmian skrajne wyrażenia a iloraz różnicowy $\frac{F(y)-F(x)}{y-x}$ zastępujemy bardziej złożonymi wzorami różniczkowania numerycznego.

Kolejne wyniki podobnego typu zostały uzyskane w nieopublikowanej jeszcze pracy *Levin Stechkin theorem and inequalities of the Hermite-Hadamard type* http://arxiv.org/abs/1411.7708.

Tomasz Szostok