Poznań, 26.10.2015 r.

Dr hab. inż. Paweł Kolwicz, prof. nadzw.
Instytut Matematyki
Wydział Elektryczny
Politechnika Poznańska
Piotrowo 3A, 60-965 Poznań
e-mail: pawel.kolwicz@put.poznan.pl

RECENZJA
rozprawy habilitacyjnej zatytułowanej
„Równania funkcyjne związane z analizą numeryczną"
oraz dorobku naukowego doktora Tomasza Szostoka

1. Wstęp

Rozprawę habilitacyjną stanowi (zgodnie z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tutule naukowym w zakresie sztuki) dzieło opublikowane w całości pod tytułem "Równania funkcyjne związane z analizą numeryczną". Dzieło zostało opublikowane w Dissertationes Mathematicae 508 (2015) pod angielskim tytułem "Functional equations stemming from numerical analysis". Rozprawa liczy 57 stron.

Autor zajmuje się bardzo ogólnym równaniem funkcyjnym postaci

$$\sum_{i=0}^{l} (y-x)^i \left[f_{1,i}\left(\alpha_{1,i}x+\beta_{1,i}y\right)+\ldots+f_{k_i,i}\left(\alpha_{k_i,i}x+\beta_{k_i,i}y\right)\right]=0 \tag{1}$$

oraz jego różnymi przypadkami szczególnymi. Duża ogólność równania pozwala wnioskować o rozwiązaniach wielu typów równań związanych z analizą numeryczną. Autor rozważa funkcje działające z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, dzięki czemu łatwiej widać główne idee dowodowe. Jak wiadomo, twierdzenia takie można później udowadniać również na ogólniejszych strukturach. W ten sposób autor stwarza możliwość rozwijania tej tematyki w przyszłości.

Rozprawa składa się z 6 rozdziałów oraz bibliografii.

W krótkim wstępie (rozdział 1) zostaje przedstawiona motywacja do badań. Rozmaite reguły kwadraturowe używane w całkowaniu numerycznym do przybliżania wartości całki oznaczonej prowadzą do równania funkcyjnego postaci

$$F(y)-F(x)=\sum_{i=1}^{l}(y-x)^i\left[f_{1,i}\left(\alpha_{1,i}x+\beta_{1,i}y\right)+\ldots+f_{k_i,i}\left(\alpha_{k_i,i}x+\beta_{k_i,i}y\right)\right]. \tag{2}$$

Poprzednio zbadano jedynie różne szczególne przypadki równania (2) dla $l \leq 2$. Z drugiej strony, różniczkowanie numeryczne służące do przybliżania pochodnej funkcji przez jej wartości w punktach węzłowych prowadzi do równania funkcyjnego, które nie jest typu (2), ale jest postaci (1). To prowadzi autora do postawienia sobie za cel zbadanie równania funkcyjnego postaci (1), które w takiej ogólności nie było dotąd rozważane.

Następnie autor omawia znane metody dotyczące równania typu (2) dla $l = 1$ oraz przedstawia zarys prezentowanej rozprawy.

W rozdziale drugim wprowadzone są niezbędne pojęcia. Odnotujmy, że kluczowe w tych badaniach twierdzenie o reprezentacji funkcji wielomianowej przez symetryzacje funkcji $k-$addytywnych i symetrycznych zostało udowodnione przez Mazura i Orlicza w roku 1934. Autor prezentuje Lemat Sablika w ogólnej postaci oraz udowadnia z jego pomocą, że funkcje spełniających równanie (1) są wielomianowe o ile spełniają pewne założenie (twierdzenie 2.6). Następnie habilitant wykorzystuje ten wynik do równań pochodzących od reguły kwadraturowej Simpsona oraz wskazuje, że założenie (2.7) w twierdzeniu 2.6 jest istotne. Ponadto autor prezentuje wynik dotyczący szczególnego przypadku równania (1), a mianowicie równania postaci

$$F(y) - F(x) = (y - x)\left[a_1 f(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \ldots + a_n f(\alpha_n x + \beta_n y)\right]$$

w przypadku, gdy punkty węzłowe są równo odległe (twierdzenie 2.14). Zaletą tego twierdzenia jest możliwość uzyskania lepszego oszacowania dla rzędu funkcji wielomianowej w konkretnym przypadku równania niż przy wykorzystaniu ogólnego twierdzenia 2.6. Ponadto twierdzenie 2.14 można stosować na odcinku oraz wykorzystać je do uzyskania rezultatów stabilnościowych.

Twierdzenie 2.6 jest jednym z podstawowych w rozprawie z uwagi na częste wykorzystywanie. Lekki niedosyt budzi fakt, że jego dowód polega na sprawdzeniu założeń Lematu Sablika. Z drugiej strony dobranie odpowiednich warunków (2.6) oraz (2.7) zapewniających szerokie wykorzystanie twierdzenia 2.6 zasługuje na uznanie.

Zauważmy, że po stwierdzeniu, że funkcja spełniająca równanie (1) jest wielomianowa podstawowym staje się pytanie o jej ciągłość. Tym autor zajmuje się w rozdziale trzecim. Ważny w dalszej części rozprawy jest lemat 3.2. Wynika z niego, że jeżeli funkcje wielomianowe spełniają równanie (1) to ich odpowiednie jednomianowe składniki też spełniają to równanie. Wykorzystując ten fakt autor dowodzi (przy pewnych założeniach o współczynnikach), że wszystkie funkcje f_i spełniające równanie

$$F(y) - F(x) = \sum_{i=1}^{l} (y - x)^i \left[a_{1,i} f_i\left(\alpha_{1,i} x + \beta_{1,i} y\right) + \ldots + a_{k_i,i} f_i\left(\alpha_{k_i,i} x + \beta_{k_i,i} y\right)\right] \qquad (3)$$

są wielomianowe oraz F jest wielomianem (twierdzenie 3.5). Zauważmy, że równanie (3) jest szczególnym przypadkiem równania (2). Autor zauważa, że ciągłość F można otrzymać też dla ogólniejszego równania (2). Korzystając z twierdzenia 3.5, twierdzenia 2.6 oraz lematu 3.2 autor wykazuje, że jeżeli funkcje F, f spełniają równanie (3) dla $l = 1$, to znaczy zachodzi równość

$$F(y) - F(x) = (y - x)\left[a_1 f(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \ldots + a_n f(\alpha_n x + \beta_n y)\right], \qquad (4)$$

to (przy pewnych dodatkowych założeniach o współczynnikach) są one wielomianami stopnia conajwyżej $2n, 2n - 1$, odpowiednio (twierdzenie 3.10). Jest to wynik uzyskany wcześniej bezpośrednio w pracy [21], współautorstwa habilitanta. Innym zastosowaniem wyników uzyskanych w rozdziałach 2 i 3 jest twierdzenie 3.11 charakteryzujące dokładnie rozwiązania równania

$$f(x) - g(y) = (x - y)\left[h(x + y) + k(x) + k(y)\right].$$

Zagadnienie to zostało wcześniej opisane w monografii [31]. Ponadto autor zauważa, że dowód twierdzenia 3.11 pozwala na zbudowanie algorytmu oraz programu komputerowego rozwiązującego niektóre równania postaci (2) dla $l = 1$. W następnym podrozdziale 3.4 habilitant rozważa równanie (4) o współczynnikach wymiernych. W użytecznym twierdzeniu 3.15 rozważane są rozwiązania jednomianowe równania (4). Podane są związki między ciągłością (lub jej brakiem) funkcji f a pewnymi wyrażeniami spełnianymi przez współczynniki (równości (3.34) oraz (3.35)) co w pełni charakteryzuje rozwiązania równania (4) o współczynnikach wymiernych. Zauważmy ponadto, że wymierność współczynników jest wykorzystywana w dowodzie tylko dla rozwiązania nieciągłego. Następnie autor wykorzystuje twierdzenie 3.15 do pełnego scharakteryzowania rozwiązań równania pochodzącego od reguły kwadraturowej Simpsona (wniosek 3.16). Kolejne zastosowania twierdzenia 3.15 podane są w przykładach 3.18 oraz 3.19. Widać z nich, iż współczynniki konkretnego równania postaci (4) można wyliczyć, jeśli założymy, że jego rozwiązaniem jest wielomian f ustalonego stopnia (lub nieciągła, niezerowa funkcja addytywna f).

W podrozdziale 3.5 autor dyskutuje równanie

$$\begin{aligned} &F(y) - F(x) = \\ &= (y - x)\left[a_1 f(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \dots + a_n f(\alpha_n x + \beta_n y)\right] + (y - x)^2 \left[g(y) - g(x)\right], \qquad (5) \end{aligned}$$

które pochodzi od reguły kwadraturowej Hermite'a. Równanie (5) w pewnym szczególnym przypadku zostało przez autora rozwiązane w pracy [22]. W rozprawie autor dowodzi, że, przy pewnym technicznym założeniu na współczynniki, funkcje spełniające to równanie muszą być wielomianami. Następnie pokazuje, że wiedząc już o ciągłości rozwiązań można w konkretnym przykładzie wyznaczyć ich postać.

W ostatnim poddrozdziale 3.6 autor zajmuje się równaniem postaci

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) = (y - x)\left[a_1 f(x) + b_1 f(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \dots + b_n f(\alpha_n x + \beta_n y) + a_1 f(y)\right] \\ + (y - x)^3 \left[c_1 g(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \dots + c_n g(\alpha_n x + \beta_n y)\right], \qquad (6) \end{aligned}$$

które pochodzi od reguły kwadraturowej Birkhoffa. Postępowanie biegnie według standardowego schematu. Najpierw wykazuje się, że, przy pewnych założeniach dla współczynników, funkcje spełniające to równanie muszą być wielomianowe (twierdzenie 3.30). Następnie, przy dodatkowych założeniach, udowadnia się ich ciągłość (twierdzenie 3.34). O użyteczności powyższych rezultatów można przekonać się studiując twierdzenie 3.35 charakteryzujące rozwiązania klasycznego równania

$$F(y) - F(x) = (y - x)\left[\frac{1}{10} f(x) + \frac{4}{5} f\left(\frac{x + y}{2}\right) + \frac{1}{10} f(y)\right] + \frac{1}{60}(y - x)^3 g\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

Rozdział 4 dotyczy równań funkcyjnych postaci

$$g(\alpha x + \beta y)(y - x)^k = a_1 f(\alpha_1 x + \beta_1 y) + ... + a_n f(\alpha_n x + \beta_n y) \tag{7}$$

związanych z różniczkowaniem numerycznym. Analiza odbywa się zgodnie z ustalonym schematem, lecz dowód twierdzenia 4.6 o ciągłości rozwiązań wymaga technicznych założeń i jest skomplikowany i nie zawsze jasny. Następnie czytelnik może znaleźć:

(i) zastosowania do znalezienia rozwiązania konkretnych równań,

(ii) przykład równania, którego nie można rozwiązać za pomocą twierdzenia 4.6,

(iii) uzasadnienie istotności założenia (4.7) w twierdzeniu 4.6 - uwaga 4.10. Jednak dla recenzenta wyjaśnienie nie jest czytelne. Wydaje się, że warunek (4.7) dla równania (4.18) jest spełniony dla każdego wykładnika większego niż 1, jednak w tym przypadku $k = 2$, więc $p + k \geq 3$.

Ostatnie zagadnienie rozdziału 4 dotyczy związanych z ilorazami różnicowymi równań postaci

$$g(x_1 + ...x_n) = f[x_1, ..., x_n], \tag{8}$$

gdzie wyrażenie po prawej stronie oznacza iloraz różnicowy n-tego rzędu. Autor pokazuje związek tego równania z równaniem różniczkowania numerycznego oraz z klasycznym równaniem Aczéla. Następnie habilitant wykazuje, że, pod pewnymi warunkami, funkcje spełniające równanie (8) są wielomianami (twierdzenie 4.21). Jest to wynik istotnie silniejszy niż udowodnione wcześniej twierdzenie 2.8 z monografii [31].

W krótkim rozdziale 5 autor udowadnia pewne równanie funkcyjne w dużej ogólności (twierdzenie 5.1) oraz wykorzystuje je do rozwiązania uogólnień równania Aczéla.

W rozdziale 6 autor dyskutuje możliwość dalszego rozwoju omawianej problematyki w postaci kilku otwartych problemów. Cztery pierwsze problemy w naturalny sposób wynikają z omawianej rozprawy. Piąty problem dotyczy rozwiązania równania, którego motywacja pochodzi od metody używanej w numerycznych rozwiązaniach równań różniczkowych. Ostatni problem związany jest ze stabilnością pewnych równań rozważanych w rozprawie.

2. Ocena dorobku naukowego zawartego w rozprawie habilitacyjnej.

Rozprawa habilitacyjna zawiera wszystkie elementy, które powinny być wynikiem solidnej pracy naukowej. Autor prawidłowo przedstawia motywację badań na tle literatury światowej. Na tej podstawie stawia za cel zbadanie równania w dużej ogólności dla funkcji określonych i działających do zbioru $\mathbb{R}$. Duża ogólność rozważanych równań pozwala znaleźć wiele zastosowań. Rozważanie funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (zamiast ogólniej zdefiniowanych) nie powinno wywoływać krytyki. Z jednej strony daje to możliwość łatwiejszego ujrzenia idei dowodów, a z drugiej strony pozwala otworzyć pole do badań nad podobnymi równaniami dla funkcji określonych ogólniej. Rozprawa jest zredagowana poprawnie, chociaż recenzent znalazł niewielką liczbę drobnych usterek i nieścisłości. Ponadto niektóre dowody mogłyby być przeprowadzone z większą starannością i bardziej szczegółowo.

Autor zajmuje się dwoma zasadniczymi pytaniami. Dla danego równania należy najpierw wykazać, że funkcje je spełniające są wielomianowe, a następnie udowodnić ich ciągłość. Schemat ten jednak wymaga różnorodnych technik w zależności od równania.

Ponadto użyteczną obserwacją jest stwierdzenie, że dane równanie dla funkcji wielomianowej wystarczy rozważać tylko dla jej jednomianowych składników. Stopień zaawansowania dowodów jest zadowalający. W uzyskanych wynikach występują często techniczne założenia, których istotność autor potrafi uzasadnić lub pozostawia ją w problemach otwartych. Ważna w tej rozprawie jest duża liczba klasycznych równań, dla których stosuje się ogólne rezultaty oraz możliwość wykorzystania niektórych twierdzeń w algorytmach numerycznych.

W rozprawie autor wykazał cechy pożądane dla samodzielnego pracownika naukowego.

3. Ocena dorobku i aktywności naukowej.

Na pozostały dorobek naukowy składa się 21 artykułów w tym 18 po uzyskaniu stopnia doktora. Więcej niż połowa artykułów liczy conajmniej 10 stron, najdłuższy ma 17 stron. Habilitant opublikował swoje wyniki najczęściej w bardzo dobrych i dobrych czasopismach. W czasopismach znajdujących się w bazie JCR oraz na wykazie A Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z grudnia 2014 roku recenzent znalazł 11 artykułów autora, w tym: Journal of Mathematical Analysis and Applications (35 punktów, 1 praca), Applied Mathematics Letters (35 punktów, 1 praca), Journal of Inequalities and Applications (30 punktów, 1 praca), Aequationes Mathematicae (20 punktów, 2 prace), Publicationes Mathematicae Debrecen (20 punktów, 1 praca), Results in Mathematics (20 punktów, 1 praca), Acta Mathematica Hungarica (15 punktów, 1 praca), Glasnik Matematicki Seria III (15 punktów, 1 praca), Georgian Mathematical Journal (15 punktów, 1 praca), Kybernetika (15 punktów, 1 praca). Ponadto 2 artykuły znalazły się w cenionych czasopismach takich jak Bulletin of the Polish Academy of Sciences oraz Banach Center Publications. Według bazy MathSciNet dr Szostok jest cytowany 32 razy przez 10 autorów (9 razy po odrzuceniu autocytowań). Najczęściej cytowana (5 razy) jest praca [Sz8]. Indeks Hirscha doktora Szostoka wynosi 3. Według bazy Web of Science jest cytowany 20 razy, 5 razy po odrzuceniu autocytowań, a jego indeks Hirscha wynosi 3 (stan na 15.10.2015). Jest to wynik nie najlepszy, lecz dynamika przyrostu cytowań od momentu złożenia dokumentów przez habilitanta jest znacząca. Według załącznika 6, sumaryczny impact factor dla prac habilitanta wynosi 6,128.

Tematyka prac doktora Szostoka dotyczy rozmaitych aspektów równań funkcyjnych dla funkcji określonych często w dużej ogólności. Ciekawy wątek związany jest z równaniami motywowanymi własnościami funkcji Orlicza ([Sz1], [Sz15]). Zagadnienia te prowadzą również do badań warunkowych równań funkcyjnych dla funkcji określonych w przestrzeni unitarnej lub, ogólniej, w przestrzeni unormowanej ([Sz2], [Sz3], [Sz4]). Autor rozważa równania, w których występują wyrażenia dla pewnego ilorazu norm, co jest z kolei związane z tzw. prostopadłością Jamesa lub Birkhoffa-Jamesa. Habilitant definiuje pewną funkcję s dwóch zmiennych związaną z prostopadłością Birkhoffa-Jamesa oraz z pewnym równaniem ([Sz4]). Ponadto zbadane są własności tej funkcji niezależnie, scharakteryzowano z jej pomocą przestrzenie unitarne oraz wskazano jej związki ze ścisłą wypukłością lub gładkością przestrzeni unormowanej ([Sz5], [Sz19]).

Prace [Sz6] oraz [Sz7] poświęcone są problemowi zachowywania trójkątów rownobocznych. W pracach [Sz16] oraz [Sz20] autor zajmuje się równaniem związanym z rozdzielnością implikacji rozmytych.

Szereg prac habilitanta dotyczy kilku szczególnych przypadków równania rozważanego w rozprawie (prace [Sz8], [Sz9], [Sz10], [Sz11], [Sz12], [Sz13], [Sz14], [Sz17]. Jednak funkcje występujące w równaniach określone są bardziej ogólnie (na pierścieniu całkowitym) niż w rozprawie. W pracy [Sz14] rozważany jest problem stabilności równania Aczéla.

Motywacją do badań w pracach [Sz18] oraz [Sz21] są klasyczne nierówności Hermite'a-Hadamarda. Do uzyskania ich pewnych uogólnień autor wykorzystuje lemat Ohlina dla zmiennych losowych.

Podsumowując dorobek doktora Szostoka należy zauważyć dużą różnorodność problematyki oraz interesujące związki z geometrią przestrzeni Banacha. Większość prac po uzyskaniu stopnia doktora jest współautorska, lecz udział doktora Szostoka jest istotny lub dominujący.

Poza publikowaniem doktor Szostok był aktywny w innych obszarach działalności naukowej i organizacyjnej. Wykonał 7 recenzji artykułów, w tym również dla czasopism z listy JCR. Wziął udział w 37 konferencjach. Habilitant otrzymał medal "For outstanding contribution" przyznany przez komitet naukowy 40-go Międzynarodowego Sympozjum z Równań Funkcyjnych w 2002 roku, a rok później trzecią nagrodę w konkursie im. M. Kuczmy na najlepszą pracę z równań funkcyjnych oraz Nagrodę Rektora Uniwersytetu Śląskiego za wyróżniającą rozprawę doktorską. Ponadto przewodniczył 2 sesjom na konferencjach międzynarodowych oraz współorganizował konferencje dotyczące równań funkcyjnych.

Był zaangażowany również w kształcenie studentów i popularyzację matematyki. Wypromował 26 magistrów oraz 18 licencjatów. W latach 2003-2011 był opiekunem Koła Naukowego Matematyków. Współorganizował konferencje międzynarodowe dla studentów oraz był członkiem jury międzynarodowego konkursu matematycznego im. V. Jarnika. Był również opiekunem licealnych klas uniwersyteckich.

4. Podsumowanie i konkluzja

Myślę, że doktor Szostok jest dojrzałym, aktywnym matematykiem oraz zaangażowanym nauczycielem akademickim. Zakres jego naukowych zainteresowań daje szansę na dalszy dynamiczny rozwój. Jest dobrym kandydatem na samodzielnego pracownika naukowego.

Uważam, że rozprawa habilitacyjna, osiągnięcia i aktywność naukowa pana doktora Tomasza Szostoka spełniają warunki określone w Ustawie z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (z późniejszymi zmianami) oraz zwyczajowe wymagania stawiane kandydatom do stopnia doktora habilitowanego.

Wnioskuję zatem o dopuszczenie doktora Szostoka do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Kolwicz

Paweł Kolwicz