Kraków, 9 czerwca 2015

Dr hab. Jacek Tabor
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński

Recenzja rozprawy habilitacyjnej pani dr Teresy Rajby „Funkcje wypukłe i ich uogólnienia"

Uwagi wstępne

Tematyka rozprawy habilitacyjnej pani dr Teresy Rajby, pod tytułem „Funkcje wypukłe i ich uogólnienia" składa się z sześciu prac i dotyczy badania różnych uogólnień wypukłości, w szczególności wypukłości wyższego rzędu, delta wypukłości, silnej wypukłości czy wypukłości w sensie Wrighta. Należy ona do pogranicza teorii nierówności równań funkcyjnych (której jedną z cech charakterystycznych jest badanie rozwiązań bez narzucania założeń dotyczących klasy rozważanych funkcji) oraz teorii funkcji wypukłych.

Charakterystyczną cechą rozprawy jest fakt, że Autorka używa w swoich rozważaniach, często w sposób nietrywialny, metod probabilistycznych. Autoreferat jest przedstawiony w pełni wyczerpująco.

Omówienie prac wchodzących w rozprawę

Rozprawa habilitacyjna składa się z sześciu poniżej wymienionych prac:

[R1] T. Rajba, On strong delta-convexity and Hermite-Hadamard type inequalities for deltaconvex functions of higher order. Math. Inequal. Appl., 18 (1) (2015), 267–293.

[R2] T. Rajba, On the Ohlin lemma for Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities, Math. Inequal. Appl., 17, (2) (2014), 557–571.

[R3] T. Rajba, On some relative convexities, J. Math. Anal. Appl., 411 (2) (2014), 876–886.

[R4] T. Rajba, A generalization of multiple Wright-convex functions via randomization. J. Math. Anal. Appl., 388 (1) (2012), 548–565.

[R5] T. Rajba, K. Nikodem and W. Wąsowicz, On the classes of higher-order Jensen-convex functions and Wright-convex functions, J. Math. Anal. Appl., 396 (2012), 261–269.

[R6] T. Rajba, New integral representations of nth order convex functions, J. Math. Anal. Appl., 379 (2) (2011), 736–747.

Poniżej postaram się przedstawić skrótowo, zgodnie z powyższą kolejnością, główne wyniki uzyskane w rozprawie, wraz z ich subiektywna oceną, bazująca na moich zainteresowaniach.

Funkcja f jest delta-wypukła n-tego rzędu z funkcją kontrolną g, jeżeli

$$x \leq y \Rightarrow \left|\Delta^{n+1}_{(y-x)/(n+1)} f(x)\right| \leq \Delta^{n+1}_{(y-x)/(n+1)} g(x)$$

Wiadomo, że funkcje delta-wypukłe są tymi funkcjami, które można przedstawić w postaci różnicy funkcji wypukłych. Praca [R1] zawiera uogólnienie znanego wyniku:
A function $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is delta-convex having the decomposition $f = \phi_1 - \phi_2$, where $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ are both convex and have finite endpoint derivatives, if and only if $f(x) = f(a) + \int_a^x r(u)du$, for some $r : [a,b] \to \mathbb{R}$ of bounded variation.
na przypadek funkcji wyższego rzędu. Powyższy wynik pozwala na charakteryzację funkcji które dają się przedstawić jako różnica funkcji wypukłych (w przypadku wyniku uzyskanego przez Autorkę, pozwala to uzyskać analog dla funkcji wyższego rzędu). Co więcej, pozwala to na uzyskanie kanonicznego „rozkładu" f i wskazanie minimalnej funkcji kontrolującej (Theorem 2.6). Autorka wprowadza tutaj także porządek na funkcjach delta wypukłych, oraz rozważa pewne naturalne uogólnienia zdefiniowanych pojęć. Pod koniec pokazuje pewne wersje twierdzenia Hermite'a-Hadamarda w rozważanym przez siebie kontekście. Wyniki uzyskane tej pracy wydają się być naturalne oraz mogą stanowić solidną bazę do badania funkcji delta-wypukłach wyższego rzędu. Spośród uzyskanych wyników, najciekawsze wydało mi się, wcześniej wspomniane, Theorem 2.6.

Praca [R2] dotyczy uogólnienia znanej i ważnej nierówności Hermite'a-Hadamarda

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

przy pomocy lematu Ohlina. Dowody uzyskanych nierówności są pomysłowe i ciekawe, co więcej stosowane narzędzia (twierdzenie o s-wypukłych stochastycznych porządkach) pozwalają na uzyskanie nietrywialnych uogólnień wyników dla funkcji wypukłych wyższych rzędów.

W pracy [R3] zawarte jest badanie relacji względnej wypukłości (w szczególności podane są różne charakteryzacje rozważanych porządków). Muszę przyznać, że motywacja do rozważania tego tematu wydawała mi się sztuczna, nie jestem też przekonany do możliwości zastosowania otrzymanych tu wyników.

Praca [R4] dotyczy randomizacji funkcji n-Wright wypukłych i zawiera nowatorskie podejście do badania wypukłości. Motywacja do badania tej tematyki pochodzi między innymi z prac Zs. Pálesa. Zdefiniowana została nowa klasa $\mathcal{W}_n(\theta, \mathcal{M}_j)$, składająca się z funkcji których wartość oczekiwana jest j-krotnie monotoniczna, czyli należy do klasy $\mathcal{M}_j$. Najciekawszym wynikiem jest tu chyba Twierdzenie 4.1, które mówi, że w przypadku gdy zmienna losowa pochodzi z rozkładu wykładniczego, zbiór funkcji całkowicie Exp(1)-Wright wypukłych pokrywa się ze zbiorem funkcji wielokrotnie monotonicznych. Wyniki uzyskane w tej pracy są moim zdaniem jednymi z ważniejszych elementów rozprawy.

Praca [R5] jest moim zdaniem najważniejsza w rozprawie i zawiera (pierwszą w literaturze) konstrukcję dla dowolnej liczby nieparzystej n funkcji która jest n-Jensen wypukła, ale nie jest n-Wright wypukła. Dowody są zazwyczaj nietrywialne a same fakty trudne, gdyż wymagają często dosyć nieintuicyjnych konstrukcji bazujących na bazie Hamela. Autorka, podobnie jak we wcześniejszych pracach rozprawy, w dowodzie głównego wyniku używa podejścia probabilistycznego. Konstrukcje przedstawione w tej pracy są szczególnie ważne z punktu widzenia nierówności funkcyjnych, gdyż w przypadku założenia ciągłości rozważane klasy pokrywają się.

Praca [R6] zawiera wyniki potencjalnie przydatne, ale raczej nie zaskakujące i nie zawiera nowych istotnych metod dowodowych. Dotyczy ona raczej uzupełnienia znanych wyników dotyczących opisu funkcji n-wypukłych i n-monotonicznych.

Pozostały dorobek

Pozostały dorobek Autorki rozprawy jest przyzwoity, dotyczy między innymi oprócz szeroko rozumianej teorii wypukłości, także rachunku prawdopodobieństwa oraz transmisji informacji. Na podkreślenie zasługują tu z pewnością wyniki dotyczące rozkładalności miar probabilistycznych, które były rozważane w grupie naukowej stworzonej przez prof. Kazimierza Urbanika, z której habilitantka się wywodzi.

Personalnie uważam także za wartościowe, pomimo raczej nie wysokiej rangi czasopism w których były wydrukowane, prace dotyczące zastosowań rachunku prawdopodobieństwa w informatyce. Fakt, iż Autorka pomimo czysto teoretycznych wyników, uzyskuje wyniki stosowane, dobrze świadczy o szerokim horyzoncie naukowym autorki, który nie zamyka się w jednej dziedzinie. Pozytywne wrażenie sprawia także szeroka wiedza autorki.

Konkluzja

Problemy rozważane przez autorkę są zazwyczaj naturalne, i wynikają z badań innych naukowców. Autorka wprowadza do badania wypukłości nowe narzędzia bazujące na rachunku prawdopodobieństwa, co pozwala na uzyskanie interesujących i mocnych wyników. Co więcej, prace składające się na rozprawę są opublikowane w cenionych czasopismach branżowych (MIA i JMAA), co umożliwia ich potencjalnie szerokie przyswojenie, a autorka uczestniczy regularnie w konferencjach dziedzinowych. Na uwagę także zasługuje staranność z jaką zostały napisane prace składające się na rozprawę.

Jako pewien zarzut można postawić habilitantce niezbyt wysoki indeks Hirscha (5 według Google Scholar, oraz 1 według Web of Science) oraz przeciętną, jak na sumaryczną ilość 36 prac, liczbę cytowań (83 według bazy Google Scholar oraz 11 według bazy Web of Science - po wyrzuceniu autocytowań). Także jedynie 10 (spośród 36) prac opublikowanych zostało w czasopismach z bazy JCR. Nie wpływa to jednakże znacząco na całkowicie pozytywny obraz dokonań Autorki.

Konkludując uważam dorobek autorki, zarówno ten zawarty w rozprawie, jak i poza nim, za wartościowy i ciekawy, i w pełni spełniający zarówno zwyczajowe, jak i ustawowe wymagania stawiane rozprawom habilitacyjnym. W związku z tym stawiam wniosek o dopuszczenie Pani dr Teresy Rajby do dalszych etapów postępowania habilitacyjnego.

Jacek Tabor