Gdańsk, 20 maja 2015 r.

Tomasz Szarek
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Gdańskiego

## Recenzja rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego dr Teresy Rajby

Pani Teresa Rajba ukończyła studia matematyczne na Uniwersytecie Wrocławskim w roku 1976. Cztery lata później na tym samym uniwersytecie uzyskała stopień doktora nauk matematycznych na podstawie rozprawy pt. „O półgrupach rozkładalności miar probabilistycznych na prostej". Promotorem pracy doktorskiej, podobnie zresztą jak i pracy magisterskiej, był prof. Kazimierz Urbanik.

Dr Rajba pracowała w latach 1981– 1999 na stanowisku adiunkta w Zakładzie Rachunku Prawdopodobieństwa na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Wrocławskiego. Od 1999 roku jest adiunktem w Bielsku-Białej, do września 2001 roku w Katedrze Matematyki i Informatyki filii Politechniki Łódzkiej, a następnie w Akademii Techniczno–Humanistycznej.

Rozprawę habilitacyjną stanowi cykl 6 prac. Prace zostały opublikowane w *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (4) oraz w *Mathematical Inequalities & Applications* (2), a więc w uznanych czasopismach z tzw. listy filadelfijskiej. Rozprawa habilitacyjna stanowi cykl powiązanych ze sobą artykułów naukowych poświęcony wybranym problemom teorii funkcji wypukłych i ich uogólnień, spełniony jest więc art. 16 pkt 2 ustawy z dnia14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki.

### Ocena rozprawy habilitacyjnej

Praca [**R6**: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (**2011**)](numeracja według autoreferatu autorki) poświęcona jest badaniu funkcji $n$–wypukłych. Własność $n$–wypukłości zadaje się przez założenie mówiące o tym, że odpowiedni iloraz różnicowy $n$–tego rzędu jest nieujemny. Równoważnie możemy tę własność wyrazić zakładając istnienie $n$–tych pochodnych jednostronnych, które są funkcjami niemalejącymi. Główne wyniki tej pracy to całkowe reprezentacje funkcji $n$–wypukłych.

Niewątpliwą inspirację dla tego typu rozważań stanowi klasyczny wzór Taylora, którego odpowiednik w przypadku funkcji jedynie $n$–wypukłych $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ przyjmuje postać:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_R^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_a^b (x-t)_+^n d\mu(t) \quad \text{dla } x \in (a,b),$$

gdzie $\mu([x,y]) = f_R^{(n)}(y) - f_L^{(n)}(x)$ ($f_R^{(n)}$ oraz $f_L^{(n)}$, to, odpowiednio, prawa i lewa pochodna rzędu $n$). Powyższy wzór jest prawdziwy przy założeniu, że $\mu$ ma wahanie skończone. Główny wkład autorki to uogólnienie tego wzoru na przypadek obejmujący wahanie nieskończone miary $\mu$ (twierdzenia 2.9 i 2.10). Praca podoba mi się pomimo dość technicznego charakteru. Swoimi rezultatami autorka twórczo wpisuje się w ciąg wyników osiąganych przez innych matematyków; warto tu wspomnieć kilka nazwisk: Popoviciu, Karlin, Studden, Bullen, Brown, Granata, Pinkus, Wulbert i wielu innych (zob. autoreferat autorki).

W pracy [**R5:** *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **(2012)**] (wspólna z K. Nikodemem i S. Wąsowiczem) autorka rozważa funkcje wypukłe rzędu $n$ w *sensie Jensena* i w *sensie Wrighta.* Wypukłości definiuje się dla zadanej funkcji $f : I \to \mathbb{R}$ przez odpowiedni operator różnicowy:

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

oraz

$$\Delta_{h_1,\ldots,h_{n+1}} f(x) = \Delta_{h_1,\ldots,h_n}(\Delta_{h_{n+1}} f)(x). \tag{1}$$

Funkcja jest wypukła w sensie Wrighta (rzędu $n$), gdy $\Delta_{h_1,\ldots,h_{n+1}} f(x) \geq 0$ dla każdego $x \in I$ oraz odpowiednich $h_1, \ldots, h_n$, dla których ma sens powyższe wyrażenie. Wypukłość w sensie Jensena oznacza, że $\Delta_{h,\ldots,h} f(x) \geq 0$ dla $x \in I$ oraz odpowiedniego $h$.

Z definicji wynika, że każda funkcja wypukła w sensie Wrighta jest wypukła w sensie Jensena, natomiast głównym celem pracy jest pokazanie, że warunek odwrotny nie jest spełniony. Istotnie, autorzy w pomysłowy sposób konstruują funkcję, która jest wypukła w sensie Wrighta, nie jest zaś wypukła w sensie Jensena. Z oświadczeń współautorów wynika, że udział p. dr Rajby przy powstawaniu pracy był dominujący.

Z kolei praca [**R4:** *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **(2012)**] bada funkcje, które są wypukłe w sensie Wrighta w średniej. Istotnie, autorka przyjmuje, że parametry $h_1, \ldots, h_n$ we wzorze (1) są zmiennymi losowymi niezależnymi i o tym samym rozkładzie, a warunek wypukłości w średniej oznacza, iż

$$\mathbb{E}\Delta_{h_1,\ldots,h_{n+1}} f(x) \geq 0.$$

W pracy [**R4**] autorka znajduje rodzinę generatorów dla klasy funkcji wypukłych w średniej przy ustalonym rozkładzie zmiennych $h_i$. Praca mimo że zaawansowana technicznie, nie wzbudziła u mnie szczególnego entuzjazmu. Odniosłem wrażenie, że napisanie pracy było tu celem samym w sobie - stworzono dość sztuczną klasę odwzorowań, a następnie zbadano jej własności. Nie wydaje mi się, że kierunek, który zarysowała p. dr Rajba stawiając otwarte problemy wart jest tego, by podążali nim młodzi matematycy – uczniowie promowani przez Panią Doktor po uzyskaniu stopnia doktora habilitowanego.

Praca [**R3:** *Mathematical Inequalities & Applications* (**2014**)] to interesujący przyczynek do badania własności funkcji względnie wypukłych. Funkcja $f$ jest wypukła względem $g$ jeżeli istnieje ściśle rosnąca i wypukła funkcja $h$ taka, że $f = h(g)$ (Palmer (2002, 2003)). Autorka analizuje związki tej wypukłości z wypukłością badaną w pracy [**R6**]. Związki te wyraża w terminach pochodnych dystrybucyjnych, podaje ich probabilistyczną interpretacje, formułuje także pewne uogólnienia nierówności Jensena.

Praca [**R2:** *Mathematical Inequalities & Applications* (**2014**)] poświęcona jest nierównościom typu *Hermitta-Hadamarda.* Najbardziej podstawowe nierówności formułowana są dla funkcji wypukłej $f$ określonej na otwartym przedziale $I$ prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ i mają postać

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Powyższe nierówności można uogólnić do następującej postaci (nierówności *Fejéra*):

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx,$$

gdzie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest dowolną nieujemną funkcją symetryczną względem środka przedziału $[a,b]$. Autorka wyprowadza powyższe nierówności (i ich uogólnienia) korzystając z lematu Ohlina podającego warunek wystarczający na to, aby dwie zmienne losowe były w relacji wypukłego stochastycznego porządku. W pracy rozważana są także odpowiednie nierówności dla funkcji wypukłych wyższych rzędów. Choć dowody mają elementarny charakter, to praca podoba mi się, głównie dlatego, że wiąże ona ze sobą nierówności formułowane dla funkcji wypukłych ze stochastycznym porządkiem w klasie rozkładów zmiennych losowych.

W podobnym duchu utrzymana jest praca [**R1:** *Mathematical Inequalities & Applications* (**2015**)], w której autorka charakteryzuje funkcje *delta–wypukłe wyższych rzędów.* Funkcje te stanowiły obiekt intensywnych badań specjalistów z teorii równań i nierówności funkcyjnych. W szczególności R. Ger pokazał w 1994 roku, że każda delta–wypukła funkcja rzędu $n$, działająca z jednej przestrzeni unormowanej w drugą, może być przedstawiona jako różnica dwóch funkcji $n$–wypukłych. Z mojego subiektywnego punktu widzenia najciekawsze wydaje się twierdzenie 4.4, które przynosi dowody nierówności *Hermitta- Hadamarda-Fejéra* dla funkcji delta–wypukłych wyższych rzędów. Wcześniej autorka wprowadza relację wypukłego stochastycznego porządku odpowiedniego rzędu dowodząć *analogon* lematu Ohlina i podaje charakteryzację probabilistyczną delta–wypukłości.

Powyższy opis pozwala się zorientować, że autorka w swej rozprawie habilitacyjnej zajmuje się wieloma aspektami wypukłości funkcji rzeczywistych. W umiejętny sposób wiąże metody probabilistyczne z technikami właściwymi teorii równań i nierówności funkcyjnych. Jej rozprawa stanowi przykład przyzwoitego rzemiosła. Choć bez efektownych twierdzeń i spektakularnych pomysłów, to jednak udało się autorce rozwiązać postawione problemy niemalże do końca.

Należy zwrócić uwagę, że wszystkie prace wchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej zostały opublikowane w okresie ostatnich pięciu lat. Poza pracą [5], dr Rajba jest ich jedyną autorką. Dobrze to świadczy o aktywności i możliwościach naukowych habilitantki. Mam zrozumienie dla przestoju, który miał miejsce w jej rozwoju naukowym; jego powody (sześciokrotne macierzyństwo) wywołują u mnie głęboki szacunek. Tym większe mam uznanie dla aktywności naukowej ostatnich lat. Należy podkreślić, że autoreferat prezentujący wyniki dr Rajby jest przygotowany niezwykle starannie, jego lektura stanowi prawdziwą przyjemność.

Osiągnięcia zawarte w rozprawie habilitacyjnej oceniam pozytywnie. Choć trudno uznać je za wybitne, o moich zastrzeżeniach napisałem powyżej, mogą one moim zdaniem stanowić podstawę do nadania dr Rajbie stopnia doktora habilitowanego.

## Ocena dorobku poza rozprawą habilitacyjną

Pozostały dorobek dr Rajby przedstawia się bardzo skromnie. Habilitantka podaje ogólną liczbę 30 publikacji, jednak w grupie tej są także prace w materiałach konferencyjnych, a także artykuły dotyczące zastosowań matematyki w technice (*Przegląd Elektrotechniczny*). Przed uznaniem tego dorobku za niewystarczające powstrzymuje mnie fakt napisania kilku dobrych prac na początku kariery naukowej (opublikowanych w *Colloq. Math. i Bull. Pol. Acad. Sci.; Math*).

Osiągnięcia dydaktyczne i organizacyjne dr Rajby wyglądają już znacznie lepiej; habilitantka prowadziła na Uniwersytecie Wrocławskim kilkanaście prac magisterskich z matematyki, wygłaszała także liczne odczyty popularyzatorskie.

Dr Rajba uczestniczyła w kilkudziesięciu konferencjach, na wielu prezentując osiągnięte przez siebie rezultaty. Recenzowała prace dla czasopism naukowych. Za pracę naukową była wielokrotnie wyróżniana otrzymując nagrody: Rektora Uniwersytetu Wrocławskiego, Politechniki Łódzkiej i Akademii Techniczno-Humanistycznej w Bielsku-Białej.

## Konkluzja

W mojej opinii rozprawa habilitacyjna i pozostały dorobek naukowy doktor Teresy Rajby **w dostatecznym stopniu spełniają wymagania ustawy z dnia 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki i dlatego wnoszą o dopuszczenie habilitantki do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.**

T. Sobek