Prof. dr hab. Roman Ger
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Śląskiego
ul. Bankowa 14
40-007 Katowice

Katowice, 13 kwietnia 2013 r.

R e c e n z j a

pracy habilitacyjnej oraz dorobku naukowego pani dr Teresy Rajby

Uwaga wstępna. O powołaniu mnie na recenzenta w postępowaniu habilitacyjnym pani dr Teresy Rajby, decyzją Centralnej Komisji do Spraw Stopni i Tytułów z dnia 7 marca 2013 r., dowiedziałem się 19 marca br., tj. w dniu w którym pismo dotyczące tego postępowania wpłynęło do Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego. Drakoński, bo tylko sześciotygodniowy, ustawowy termin na sporządzenie recenzji został przeto zredukowany do czterech tygodni. Gdyby nie fakt, że większość wyników pani dr Rajby była wcześniej przedstawiana na moich seminariach naukowych w IM UŚ, elementarna uczciwość nakazywałaby mi odmowę podjęcia obowiązków recenzenta lub, co na jedno wychodzi, sporządzenia recenzji z wnikliwością wprost proporcjonalną do czasu, który przypadł mi w udziale. Pani Sekretarz Komisji poinformowała mnie, że *Formalnie zgodnie z harmonogramem recenzja powinna być przygotowana do 17 kwietnia.* Rozpoczynam więc pisanie poniższej recenzji 13 kwietnia '13 roku z pełną świadomością ew. złych skutków tej feralnej numerologii.

Nie szczędząc na założeniach regularności i trzymając się ziemi, tj. odwzorowań rzeczywistych na przedziale otwartym, można krótko powiedzieć, że rozprawa dotyczy funkcji $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, dla których $(n+1)$-pochodna jest nieujemna. W przypadku $n = 1$ mamy wówczas do czynienia ze "zwykłą" wypukłością, tj. funkcją spełniającą nierówność funkcyjną

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{1}$$

dla wszelkich $x, y \in (a,b)$ i dowolnego $\lambda \in [0,1]$. Nierówność ta implikuje ciągłość funkcji f, a zredukowana do przypadku

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x, y \in (a,b), \tag{2}$$

definiuje tzw. wypukłość w sensie Jensena. Nierówność (2) dopuszcza już mnóstwo bardzo nieregularnych rozwiązań (niemierzalnych w sensie Lebesgue'a). Odpowiednikiem n-tego rzędu dla nierówności Jensena jest nierówność funkcyjna

$$\Delta_h^{n+1} f(x) \geqslant 0, x \in (a,b),\ h > 0 \text{ tak małe, aby } x + (n+1)h \in (a,b); \tag{3}$$

Δ_h^k oznacza tutaj k-tą iterację operatora różnicowego $\Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x)$. Ciągłe rozwiązania nierówności (3) są automatycznie funkcjami klasy C^{n-1} z wypukłą funkcją $f^{(n-1)}$; w szczególności, jeśli istnieje pochodna $f^{(n+1)}$, to jest nieujemna.

Jeśli w nierówności (3) zażądać, aby

$$\Delta_{h_1} \circ \Delta_{h_2} \circ \cdots \circ \Delta_{h_{n+1}} f(x) \geqslant 0, \; x \in (a,b), \text{ gdzie}$$
$$h_1, h_2, ..., h_{n+1} > 0 \text{ są tak małe, aby } x + h_i \in (a,b), \; i = 1, 2, ..., n+1,$$

to funkcję f spełniającą (4) nazywamy n-wypukłą w sensie Wrighta; dla $n = 1$ jest to równoważne nierówności

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) + f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leqslant f(x) + f(y)$$

spełnionej dla wszelkich $x, y \in (a,b)$ i dowolnego $\lambda \in [0,1]$.

Ta garść pojęć i faktów ułatwi nam wysłowienia rezultatów przedstawionych w recenzowanej dysertacji.

Rozprawa habilitacyjna pani dr Teresy Rajby zatytułowana

Analiza własności uogólnionych funkcji wypukłych i funkcji wypukłych wyższych rzędów,

na którą składa się zestaw pięciu publikacji:

1. T. Rajba, *New integral representation of nth order convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **379(2)** (2011), 736-747.

2. T. Rajba, *A generalization of multiple Wright-convex functions via randomization*, J. Math. Anal. Appl. **388(1)** (2012), 548-565.

3. T. Rajba, *An application of the Choquet theorem to the study of randomly-superinvariant measures*, Opuscula Math. **40(2)** (2012), 317-326.

4. T. Rajba & B. Micherda, *On some Hermite-Hadamard-Fejer inequalities for (k,h)-convex functions*, Math. Inequal. Appl. **15(4)** (2012), 931-940.

5. K. Nikodem, T. Rajba & Sz. Wąsowicz, *On the classes of higher order Jensen-convex functions and Wright-convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **396(1)** (2012), 291-296.

(tę numerację będę w dalszym ciągu wykorzystywał), stanowi treściowo spójne studium tytułowych rodzin odwzorowań (**jednotematyczny cykl publikacji**). Dobrze przygotowany Autoreferat habilitantki zwalnia mnie, jak sądzę, ze szczegółowego przedstawiania samych wyników i umożliwia przesunięcie akcentów na część wartościującą. **Moja generalna ocena rozprawy** (w aktualnej nowomowie: osiągnięcia naukowego) **jest jednoznacznie pozytywna. Wraz z resztą dorobku naukowego (24 artykuły naukowe) uzyskanego po otrzymaniu stopnia naukowego doktora** (na Uniwersytecie Wrocławskim (1981) z profesorem Kazimierzem Urbanikiem jako promotorem) **stanowi ona znaczny wkład autorki w teorię równań i nierówności funkcyjnych o wielu zmiennych oraz w analizę wypukłą.** Nie dopatrzyłem się, co prawda, w dorobku pani dr Rajby jakiejś wyraźnej nowej metody dowodowej, ale niektóre wyniki mają ważki walor unifikujący i uogólniający badania innych autorów (zob. np. pracę 5.). Nie jestem probabilistą; ośmielę się wszakże wyrazić pogląd, że rozprawa niewiele lub zgoła nic nie wnosi do teorii prawdopodobiestwa i byłoby nieporozumieniem traktować ją jako pracę z probabilistyki. Wszelako wiedza i doświadczenie probabilistyczne habilitantki pozwoliły na dostrzeżenie istotnie nowych aspektów w odniesieniu do zagadnień skądinąd już bardzo dogłębnie badanych przez bardzo wielu matematyków w teorii równań i nierówności funkcyjnych - dziedzinie, której jedną z cech charakterystycznych jest matematyczna interdyscyplinarność. Aby opinia ta nie była jedynie gołosłowną deklaracją, przytoczę niektóre z wyników pani dr Teresy Rajby zasługujące, moim zdaniem, na podkreślenie:

- uzyskanie całkowych reprezentacji ciągłych funkcji wypukłych wyższych rzędów, tj. ciągłych rozwiązań nierówności (3) lub, równoważnie, funkcji n-wypukłych w sensie T. Popoviciu (nieujemność ilorazów różnicowych danego rzędu);
- rozkład takiej funkcji na sumę funkcji $(n+1)$-krotnie monotonicznej i wielomianu stopnia co najwyżej n;
- uzyskanie podobnych charakteryzacji oraz twierdzeń o podpieraniu dla silnej wypukłości wyższych rzędów;
- finezyjna "konstrukcja" funkcji wskazującej na to, że dla nieparzystego n, klasa funkcji n-wypukłych w sensie Wrighta stanowi podzbiór właściwy rodziny wszystkich funkcji n-wypukłych w sensie Jensena, tj. rozwiązań nierówności (3);
- randomizacja funkcji n-wypukłych w sensie Wrighta (prace 2. i 3.); to zagadnienie wraz z użytymi technikami (m.in. twierdzeniem reprezentacyjnym Choqueta) jest, wedle mojej wiedzy, istotnym novum w bogatej literaturze przedmiotu dot. analizy rozmaitych uogólnień pojęcia funkcji wypukłej;

- nierówności typu Hermite'a-Hadamarda dla pewnych uogólnień klasycznych funkcjonałów wypukłych. Akurat te uogólnienia (funkcje (k, h)-wypukłe) w moim odbiorze jawią się jako nieco sztuczne, by nie rzec "wydumane"; nie zmienia to jednak faktu, że rozmaitymi szczególnymi przypadkami tego pojęcia zajmowali się m.in. W.W. Breckner, S. Varošanec, H. Hudzik & L. Maligranda, Gy. Maksa & Zs. Páles, M.Z. Sarikaya.

Pierwsze trzy spośród prac 1. - 5. składających się na zaprezentowane przez panią dr Teresę Rajbę "osiągnięcie naukowe" (po ludzku mówiąc: na pracę habilitacyjną) są monoautorskie, w pozostałych dwu, zgodnie z oświadczeniami współautorów, udział procentowy habilitantki wynosi odpowiednio: 50% dla pracy 4. i 70% dla pracy 5. Prace te zostały opublikowane w trzech czasopismach (wszystkie ministerialnie"punktowane", najwyżej - *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, gdzie habilitantka opublikowała trzy spośród prac składających się na rozprawę). Choć sam przykładam taką wagę do ciągle zmieniającej się punktacji, jak do numerologii, o której pisałem w *Uwadze wstępnej*, to do pisania o tym zmuszają mnie względy formalne.

Mam kilka uwag krytycznych, sprowadzających się w istocie do tego, czego mi w przedstawionym "osiągnięciu naukowym" zabrakło.

- W wielu przypadkach autorka ogranicza się do rozpatrywania odwzorowań skalarnych (funkcjonałów) w sytuacjach, gdy szczególnie interesujące i stanowiące wdzięczne pole badań są odwzorowania o wartościach wektorowych (przynajmniej w przestrzeniach Banacha); dotyczy to w pierwszym rzędzie odwzorowań delta-wypukłych.

- Dyskutując związki pomiędzy klasami odwzorowań n-wypukłych w sensie Jensena i n-wypukłych w sensie Wrighta, autorka całkowicie przemilcza zasadniczo odmienne zachowanie się odpowiednich klas funkcji wielomianowych, gdzie stosowne odpowiedniki definicyjne, tj. równania funkcyjne

  $$\Delta_h^{n+1} f(x) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \Delta_{h_1} \circ \Delta_{h_2} \circ \cdots \circ \Delta_{h_{n+1}} f(x) = 0$$

  okazują się być równoważne (przynajmniej w przypadku grup abelowych ze stosowną podzielnością). Narzuca się pytanie o wyjaśnienie tego fenomenu. Ponadto, w przypadku drugiego z tych równań dość delikatna jest kwestia, czy rozważane przyrosty $h_1, h_2, ..., h_{n+1}$ są dowolne, czy tylko dodatnie (z odpowiedniego stożka); również to ważkie zagadnienie nie jest w ogóle poruszone w pracach pani dr Rajby.

- Choć mówiłem wcześniej o dobrze przygotowanym Autoreferacie, to ocenę tę należy odczytywać z dokładnością do składni i typografii (pośpiech?) oraz wytłuszczoną czcionką zapisaną fałszywą informację, że "Jensen-wypukłość implikuje Wright-wypukłość" (str. 21). Na szczęście, zarówno dalsza treść tego akapitu, jak i wytłuszczoną czcionką zapisany tytuł paragrafu paragrafu czwartego (na tej samej stronie), temu zaprzeczają.

Na **pozostały dorobek naukowy** habilitantki składa się 25 artykułów naukowych opublikowanych w rozmaitych czasopismach, czasami nieco egzotycznych dla matematyka (np. *Knowledge in telecommunication technologies and optics, Technique of measurement and metrology, Rozprawy Elektrotechniczne,* etc.), czasami w rozmaitych Proceedings. Nie sposób nie zaznaczyć jednak wyraźnie, że tylko dwie spośród tych prac opublikowane zostały w czasopismach znajdujących się w bazie Journal Citation Reports. Pozytywnie wszakże zdumiewa fakt, że spektrum badań naukowych pani dr Teresy Rajby jest bardzo szerokie: oprócz prac z nierówności funkcyjnych (pewnych aspektów analizy wypukłej) w tym, oprócz zagadnień już omawianych, np. wypukłość w sensie Schura, prac z teorii prawdopodobieństwa, prac z pogranicza obu tych dyscyplin, po prace dotyczące problemów ściśle technicznych (sieci bezprzewodowe, telefonia komórkowa, cyfrowe transmisje informacji, a nawet żeglarstwo). Merytorycznej oceny tych osiągnięć podjąć się nie jestem w stanie, ze względu na brak kompetencji.

Z badań o bardziej teoretycznym charakterze na uwagę zasługują prace dotyczące c-rozkładalności miar probabilistycznych i charakteryzacji półgrup rozkładalności miar nieskończenie podzielnych, interesujące zwłaszcza w w świetle faktu, że problem charakteryzacji wszystkich półgrup rozkładalności jest nadal otwarty nawet na prostej rzeczywistej (w moim odczuciu chyba takim pozostanie). Są to starsze prace pani dr Rajby (publikowane m.in. w *Colloquium Mathematicum, Biuletynie PAN, Probability and Mathematical Statistics* i *Demonstratio Mathematica*), związane jeszcze z inspiracjami pochodzącymi z wrocławskiego środowiska probabilistycznego, z którego habilitantka się wywodzi.

Łączna liczba cytowań wynosi 37 (choć w bazie Web of Science tylko 1 (!)), na co składają się 23 cytowania pod nazwiskiem Rajba, 10 cytowań prac sygnowanych panieńskim nazwiskiem Niedbalska oraz 4 cytowania prac opublikowanych pod podwójnym nazwiskiem Niedbalska-Rajba. Do **istotnych przejawów aktywności naukowej** pani dr Teresy Rajby zaliczyć, bez wątpienia, należy jej czynne uczestnictwo w krajowych i międzynarodowych meetingach naukowych, na których wygłosiła łącznie 35 referatów o wynikach swoich badań, w tym m.in. w Bułgarii, Czechach, Hiszpanii, Izraelu, na Litwie, Łotwie, w Rumunii, na Ukrainie, Węgrzech i we Włoszech.

Informacje nt. dorobku dydaktycznego, dostarczone przez habilitantkę w dokumentacji związanej z postępowaniem o nadanie stopnia, są więcej niż skąpe; sprowadzają się bowiem do stwierdzenia, że pani dr Rajba była promotorem kilkunastu prac magisterskich na Uniwersytecie Wrocławskim w latach 1981 - 1999. Niezbyt otymistycznie to rokuje jeśli chodzi o przyszłe kształcenie młodych ludzi na poziomie doktorskim. Efekt ten jest, na szczęście, złagodzony naprawdę szerokim rozeznaniem habilitantki w rozległej literaturze przedmiotu; dość powiedzieć, że bibliografia rozprawy liczy blisko dwieście pozycji i są to cytowania przemyślane, co wiąże się także z podkreślaną już wcześniej wieloaspektowością twórczości naukowej pani dr Rajby.

Działalność popularyzatorska (m.in. na forum Polskiego Towarzystwa Matematycznego) również przedstawiona została bardzo powściągliwie. Zdecydowanie większą i udokumentowaną aktywność przejawiła natomiast wygłaszając kilkadziesiąt referatów na specjalistycznych seminariach naukowych m.in. na Uniwersytecie Wrocławskim, Uniwersytecie Śląskim, Akademii Techniczno-Humanistycznej w Bielsku-Białej, na Politechnice Warszawskiej i Politechnice Lubelskiej.

Konkluzja. Uważam, że przedstawione osiągnięcie naukowe (rozprawa habilitacyjna) oraz pozostały dorobek naukowy pani dr Teresy Rajby czynią zadość warunkom określonym w ustawie o stopniach i tytule naukowym oraz tytule w zakresie sztuki. Stawiam przeto wniosek o dopuszczenie pani dr Teresy Rajby do dalszych etapów postępowania habilitacyjnego.

(-) Roman Ger