Łódź, dn. 20 lutego 2016 r.

Prof. dr hab. Marek Balcerzak
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dra Szymona Żeberskiego

Omówienie wyróżnionego cyklu publikacji. Wyróżnione osiągnięcie naukowe składa się z cyklu prac [H1]–[H8] (według numeracji z autoreferatu Habilitanta) opublikowanych w dobrych czasopismach matematycznych. Artykuły te są albo monoautorskie ([H1],H2],[H6]) albo powstały we współpracy z Robertem Rałowskim ([H3]–[H5], [H7]) oraz Marcinem Michalskim [H8].

Głównym tematem wyróżnionego cyklu jest wszechstronna analiza zjawiska niemierzalności zbiorów względem σ-ciała $Bor[\mathcal{I}]$ generowanego przez zbiory borelowskie przestrzeni polskiej T oraz σ-ideał $\mathcal{I}$ podzbiorów tej przestrzeni spełniający naturalne dodatkowe warunki (np. posiadanie bazy borelowskiej). Istotną motywacją tych badań było twierdzenie Bukovskiego oraz jego uogólnienie zwane Twierdzeniem Czterech Polaków dotyczące niemierzalności sumy podrodziny rodziny punktowo skończonej zbiorów z σ-ideału. Znamiennym faktem był powrót do szeroko pojętych idei tego twierdzenia dokonany po 28 latach przez Cichonia i Ryll-Nardzewskiego spośród tej czwórki w towarzystwie trzech nowych współautorów (w tym Sz. Żeberskiego) w interesującej i wartościowej pracy oznaczonej jako [P3] w pozostałym dorobku Habilitanta. Myślę, że powstawanie tej pracy miało istotny wpływ na pewne kierunki badań wyróżnionego osiągnięcia.

Dr Żeberski rozważa silny rodzaj niemierzalności zbiorów zwany całkowitą $\mathcal{I}$-niemierzalnością. W pracy [H5] znajduje się interpretacja całkowitej $\mathcal{I}$-niemierzalności jako bycie zbiorem $\mathcal{I}$-Bernsteina. W tym artykule jest też wzmianka o hipotezie Cichonia. Mówi ona o możliwości powtórzenia wersji Twierdzenia Czterech Polaków z silniejszą tezą całkowitej $\mathcal{I}$-niemierzalności odpowiedniej sumy. Przypuszczenie to zostało zamieszczone w autoreferacie jako Hipoteza 1. Wiele wyników wyróżnionego cyklu jest efektem atakowania tej hipotezy i choć nie uzyskano ostatecznego rozstrzygnięcia, widoczne są kolejne podejścia do problemu z różnych stron i różnymi metodami. W pracach [H7]–[H8] centralną rolę pełnią zbiory $\mathcal{I}$-Łuzina będące uogólnieniem klasycznych zbiorów Łuzina i Sierpińskiego. Śledząc kolejne artykuły omawianej serii, można zauważyć systematyczne pogłębianie badań, kolejne wzmacnianie wcześniejszych wyników oraz skuteczne próby stosowania różnych technik dowodowych i odkrywania nowych zjawisk.

Twierdzenia, które mają związek z Hipotezą 1, znajdują się w pracach [H2],H3,[H5]. W artykule [H2] otrzymano pożądaną tezę przy dodatkowych założeniach, że σ-ideał jest c.c.c. oraz nie istnieje quasi-mierzalna liczba kardynalna nie większa niż continuum. Ten wynik został rozszerzony w pracy [H5], gdzie uzyskano ω_1 parami rozłącznych podrodzin o sumach całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnych. Wykorzystane tu pomysły i metody zwłaszcza w drugim ujęciu są nietrywialne i mogą się podobać. W artykule [H3] pojawiają się jeszcze inne założenia, np. zamiast rodziny punktowo rozłącznej mamy partycję złożoną z domkniętych zbiorów z σ-ideału. W dowodzie zastosowano m.in. twierdzenie o selekcji, a jako wnioski otrzymuje się twierdzenia o całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnych przeciwobrazach odpowiednich funkcji i multifunkcji mierzalnych.

W pracy [H1] motywowanej zastosowaniami Twierdzenia Czterech Polaków pokazano, że każda funkcja z przestrzeni polskiej w przestrzeń metryzowalną, słabo mierzalna w sensie Baire'a, przekształca pewien zbiór rezydualny na przestrzeń ośrodkową, co uogólnia wynik Cichonia i Kharazishvili rozszerzający klasyczne twierdzenie Frolika. Budując odpowiedni model ZFC (przy pomocy forsingu), dr Żeberski dowodzi, że metryzowalność przestrzeni topologicznej będącej przeciwdziedziną nie może być zastąpiona normalnością.

Artykuł [H5] zawiera daleko idące rozszerzenie twierdzenia Sierpińskiego o niemierzalności sumy algebraicznej pewnych dwóch zbiorów miary zero. Inni autorzy uogólniali ten wynik w różnych kierunkach. Rezultat [H5] idzie najdalej, a główny pomysł polega na zastosowaniu odpowiedniej relacji dwuczłonowej, która w szczególnych przypadkach staje się funkcją i może być działaniem dodawania.

Podoba mi się analogia twierdzenia Gitika-Shelaha dla kategorii Baire'a wykazana przez Habilitanta w artykule [H6]. W dowodzie zastosowano m.in. kombinatoryczne twierdzenie Erdősa-Alaoglu w wersji zaczerpniętej z pracy Taylora. Autor zaproponował także ogólne abstrakcyjne twierdzenia dotyczące wpisywania odpowiednich podrodzin w rodziny punktowo skończone zbiorów małych przy dodatkowych założeniach. Jest to nawiązanie do publikacji [H2] i [H5].

Dobre wrażenie wywołuje praca [H7] o zbiorach $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-Łuzina. Rozszerzając znacznie ideę Sierpińskiego-Erdősa, pokazano istnienie licznej rodziny takich zbiorów, które nie są wzajemnie równoważne względem każdej funkcji odpowiedniej rodziny z ograniczeniem mocy, a przy specjalnych założeniach teoriomnogościowych zbiory $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-Łuzina nie są wzajemnie równoważne względem wszystkich funkcji $\mathcal{I}$-mierzalnych. Następnie analizowane są pojęcia forsingu zachowujące własność bycia zbiorem $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-Łuzina.

Wreszcie ostatnia praca [H8] omawianego cyklu dostarcza wiele ciekawych pomysłów wiążących zbiory $\mathcal{I}$-Łuzina ze strukturą liniową przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Autorzy pokazują, że zbiory $\mathcal{I}$-Łuzina mogą mieć rozmaite własności w zależności od założeń o σ-ideale $\mathcal{I}$, np. dla pewnych regularnych σ-ideałów istnieje doskonały zbiór $\mathcal{I}$-Łuzina, a dla innych regularnych σ-ideałów każdy zbiór $\mathcal{I}$-Łuzina jest $\mathcal{I}$-niemierzalny. Wykazano, że w pewnym modelu ZFC istnieje zbiór

Łuzina, który jest liniową podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$. Omawiany artykuł zawiera też serię twierdzeń kojarzących ze sobą zbiory Łuzina, Sierpińskiego i Bernsteina. Subtelna konstrukcja przy założeniu CH pokazuje, że istnieje zbiór Łuzina L, dla którego suma $L + L$ jest zbiorem Łuzina – w dowodzie korzysta się z twierdzenia Shoenfielda o absolutności.

Ocena wyróżnionego osiągnięcia naukowego. Prace omawianego cyklu reprezentują dobry wyrównany poziom. Pokazano szeroką gamę rezultatów opisujących powszechność zjawiska silnej $\mathcal{I}$-niemierzalności zbiorów w trakcie rozważania naturalnych operacji takich jak sumowanie zbiorów należących do σ-ideału, branie przeciwobrazów funkcji i multifunkcji oraz branie obrazów relacji i funkcji – przy pewnych ogólnych założeniach o σ-ideałach, rodzinach zbiorów małych, funkcjach i relacjach. Badania te świadczą o determinacji w dążeniu do uzyskania twierdzeń silnych i uniwersalnych. Dr Żeberski wykazał się sporą pomysłowością i erudycją. Oprócz intensywnych badań wokół wspomnianej wcześniej hipotezy dotyczącej wzmocnienia Twierdzenia Czterech Polaków – równie interesujące i nieco świeższe wydają się odkrycia nowych często zaskakujących własności uogólnionych zbiorów $\mathcal{I}$-Łuzina, gdzie nieodzowna była znajomość specjalnych metod i odpowiednich modeli teorii mnogości. Można przewidywać, że ten kierunek badań ma przed sobą dalsze ciekawe możliwości. Podsumowując, uważam że wyróżniony cykl prac wnosi znaczący wkład w rozwój matematyki.

Ocena pozostałego dorobku i aktywności naukowej Habilitanta. Pozostały dorobek naukowy Szymona Żeberskiego składa się z 9 artykułów, w tym 8 współautorskich. Spośród tych prac, sześć ukazało się w czasopismach z bazy JCR. W publikacjach [P1],[P2] przeprowadzono niestandardowe dowody twierdzeń typu Egglestona i klasycznego twierdzenia Mazurkiewicza. Zastosowanie twierdzenia Shoenfielda o absolutności daje eleganckie rozumowanie, ale wymaga dodatkowej wiedzy. Potem Habilitant jeszcze kilkakrotnie skutecznie wykorzystywał tę metodę. Praca [P4] zawiera ciekawe uogólnienia i konsekwencje twierdzenia Steinhausa o sumie kompleksowej, zaś artykuł [P5] rozwija teorię zbiorów nakrywających, którymi zajmowali się wcześniej Muthuvel i Nowik. Mogą podobać się wyniki dotyczące zbiorów dwupunktowych Mazurkiewicza z pracy [P6] – ten temat jest wciąż żywy w literaturze matematycznej i nadal nie wiadomo, czy istnieje borelowski zbiór Mazurkiewicza.

W tej części dorobku współautorskiego Habilitanta najwyżej oceniam publikacje [P3] oraz [P7]–[P9]. O walorach i konsekwencjach pracy [P3] wspominałem przy okazji omawiania cyklu prac [H1]–[H8]. Najnowsze artykuły [P7]–[P9] napisane wspólnie z T. Banakhem, M. Morayne i R. Rałowskim, można zaliczyć do ważnego nurtu badań współczesnej teorii mnogości. Analizowane są tu σ-ideały topologicznie niezmiennicze w przestrzeni euklidesowej i w kostce Hilberta oraz σ-ideały niezmiennicze względem homeomorfizmów zachowujących miarę w tzw. dobrej miarowej przestrzeni Cantora. Uzyskane charakteryzacje i twierdzenia nt. współczynników kardynalnych wpisują się w światowe trendy i świadczą o nowatorstwie pomysłów i wysokim kunszcie autorów.

Dużym atutem rozwoju naukowego Szymona Żeberskiego była współpraca w zespołach badawczych, w których działały takie autorytety jak Ryll-Nardzewski, Cichoń, Morayne, Banakh. Najczęstszym współautorem w omawianym dorobku był Robert Rałowski. Wkład

Habilitanta do wspólnych badań był niewątpliwy, a samodzielne publikacje i artykuł [H8] z młodym naukowcem-doktorantem potwierdzają jego możliwości. Należy odnotować udział Szymona Żeberskiego w trzech grantach pozauczelnianych jako wykonawcy oraz prezentowanie własnych wyników na wielu konferencjach i szkołach naukowych, m.in. w Czechach, Izraelu, Kanadzie, Irlandii, na Węgrzech i na Ukrainie. W karierze naukowca ważnym czynnikiem są staże badawcze – tego brakuje w życiorysie doktora Żeberskiego. Habilitant nie uzyskał żadnych wyróżnień ani nagród naukowych, natomiast odniósł sukces dydaktyczny w postaci nagrody im. J. Marcinkiewicza za kierowaną przez niego pracę magisterską.

Słabszą stroną dotychczasowych osiągnięć Habilitanta są nieliczne cytowania jego rezultatów. Szanse na duży oddźwięk w środowisku naukowym mają publikacje [P7]–P9]. Ciekawe są cytowania artykułu [P3] opisane w autoreferacie. Uzasadniony wydaje się pogląd, że część zagadnień dotyczących niemierzalności, także dzięki pracom Sz. Żeberskiego, stopniowo się wyczerpuje. Pewne inspiracje do badań innych autorów mogą wywołać prace nt. uogólnionych zbiorów Łuzina.

Konkluzja. Omówiony dorobek oraz informacje dostarczone przez Habilitanta prowadzą do stwierdzenia, że osiągnął on poziom dojrzałości, który pozwala mu samodzielnie prowadzić zaawansowane badania naukowe w aksjomatycznej i deskryptywnej teorii mnogości w powiązaniu z zagadnieniami topologii oraz prostych struktur algebraicznych. Uważam, że wniosek habilitacyjny dra Żeberskiego spełnia wymagania ustawowe zarówno w części dotyczącej wyróżnionego osiągnięcia naukowego jak i w części związanej z pozostałym dorobkiem i ogólną aktywnością naukową Habilitanta.

M. Balcerzak