prof. dr hab. Piotr Zakrzewski
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Warszawskiego
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa

Warszawa, 7.11.2016 r.

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dr. Roberta Rałowskiego

Głównym przedmiotem recenzji jest osiągnięcie naukowe w postaci jednotematycznego cyklu ośmiu artykułów [H1]–[H8] (stosuję tu numerację zgodną z Autoreferatem habilitanta) pod tytułem „Niemierzalne podzbiory w przestrzeniach polskich", który w dalszej części recenzji będę nazywał Rozprawą. Artykuły te zostały opublikowane w latach 2007 – 2015. Trzy z nich są samodzielne. Pięć pozostałych to publikacje współautorskie, wśród których cztery mają jednego współautora, dr. hab. Szymona Żeberskiego (weszły one wcześniej w skład zestawu ośmiu prac, które dr hab. Żeberski przedstawił jako swoje osiągnięcie naukowe w ramach zakończonego pół roku temu powodzeniem postępowania habilitacyjnego).

1. Problematyka badawcza Rozprawy.

Wszystkie wymienione prace dotyczą mającej w teorii mnogości długą tradycję problematyki podzbiorów specjalnych prostej i ogólniej – nieprzeliczalnych przestrzeni ośrodkowych, metryzowalnych w sposób zupełny (tzw. przestrzeni polskich). Dokładniej, poza pracą [H7], wszystkie prace cyklu poświęcone są istnieniu zbiorów w rozmaitym sensie niemierzalnych. Chodzi o sytuację, kiedy dany jest σ-ideał $\mathcal{I}$ podzbiorów nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej X (zawierający wszystkie singletony), a przez zbiory $\mathcal{I}$-niemierzalne rozumie się podzbiory przestrzeni X, które nie należą do najmniejszego σ-ciała, zawierającego zbiory borelowskie w X oraz elementy σ-ideału $\mathcal{I}$. Pod ten schemat podpadają najbardziej znane przypadki szczególne: zbiory niemierzalne w sensie Lebesgue'a oraz zbiory bez własności Baire'a. Rezultatem, który stanowi punkt wyjścia projektu badawczego, którego wynikiem jest Rozprawa, jest tzw. „twierdzenie czterech Polaków" (z pracy J. Brzuchowskiego, J. Cichonia, E. Grzegorka i Cz. Ryll-Nardzewskiego) zgodnie z którym, jeśli rodzina $\mathcal{A}$ zbiorów z σ-ideału $\mathcal{I}$ o bazie borelowskiej (czyli generowanego przez swoje elementy borelowskie), jest punktowo-skończonym pokryciem przestrzeni X, to $\mathcal{A}$ zawiera podrodzinę, której suma jest $\mathcal{I}$-niemierzalna. Motywacją projektu stała się hipoteza, postawiona (zgodnie z informacją z pracy [H6]) przez J. Cichonia, że konkluzja tego twierdzenia może być wzmocniona tak, by orzekała istnienie podrodziny, której suma jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalna w tym sensie, że ani ona, ani jej dopełnienie nie zawierają żadnego zbioru borelowskiego spoza $\mathcal{I}$. Dla σ-ideału zbiorów miary Lebesgue'a zero pojęcie całkowitej niemierzalności zbioru Z odpowiada więc temu, że zarówno zbiór ten, jak i jego dopełnienie mają miarę wewnętrzną zero. Hipoteza Cichonia nie jest w pełni rozstrzygnięta nawet w tym przypadku (częściowa odpowiedź została podana przez D. Fremlina i S. Todorčevića w preprincie cytowanym w Autoreferacie jako [FrTod]). Z kolei dla σ-ideału przeliczalnych podzbiorów przestrzeni X zbiór całkowicie niemierzalny to po prostu zbiór Bernsteina - stąd zbiory całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalne nazywane są też zbiorami $\mathcal{I}$-Bernsteina.

2. *Główne wyniki i ocena Rozprawy.*

Omawiając pokrótce publikacje współautorskie [H1], [H2] oraz [H5]–[H7], skoncentruję się na tych wynikach, w których uzyskaniu udział habilitanta – zgodnie z oświadczeniami współautorów – był znaczący.

W pracy [H1] (opublikowanej w Topology Appl.; współautorzy: J. Cichoń, M. Morayne, Cz. Ryll-Nardzewski, Sz. Żeberski) pokazano istnienie podrodziny o całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnej sumie danego pokrycia $\mathcal{A}$ przestrzeni X (por. hipoteza Cichonia) przy pewnych dodatkowych założeniach odnoszących się do $\mathcal{I}$ oraz $\mathcal{A}$ (twierdzenia 3.1, 3.2 i 4.1). Udowodniono istnienie podrodziny o $\mathcal{I}$-niemierzalnej sumie pokrycia przestrzeni X za pomocą przeliczalnych zbiorów domkniętych o wspólnie ograniczonej randze Cantora-Bendixsona (twierdzenie 4.4). Nawiązując do wcześniejszych wyników Gruenhage'a, Darjiego i Keletiego, wykazano, że istnieje podzbiór A klasycznego (trójkowego) zbioru Cantora $C \subseteq [0,1]$ taki, że suma algebraiczna $A+C$ jest niemierzalna w sensie Lebesgue'a (twierdzenie 5.9 i wniosek 5.10).

Jedynym współautorem pozostałych czterech prac współautorskich jest dr hab. Sz. Żeberski (jak już wspominałem, prace te weszły w skład jego osiągnięcia habilitacyjnego).

Dwa (twierdzenia 2.1 i 2.2) spośród czterech głównych twierdzeń pracy [H2] (opublikowanej w Houston Journal of Mathematics) to eleganckie, proste wnioski z odpowiednio przeformułowanego twierdzenia 3.1 z pracy [H1]. Teza o istnieniu całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnej sumy podrodziny pojawia się w nich w odniesieniu do w pewnym sensie mierzalnych podziałów przestrzeni na zbiory z ideału $\mathcal{I}$. W tezach pozostałych twierdzeń (2.3 i 2.4) zbiory całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalne pojawiają się w kontekście mierzalnych multifunkcji.

Punktem wyjścia pracy [H5] (opublikowanej w Czechoslovak Math. Journal) jest klasyczne twierdzenie Sierpińskiego o istnieniu zbiorów miary zero $A, B \subseteq \mathbb{R}$, których suma algebraiczna $A+B$ jest niemierzalna. Praca zawiera kilka twierdzeń o bardzo technicznych sformułowaniach, pokazujących istnienie takiego zbioru $A \subseteq X$, że obraz jego kwadratu kartezjańskiego względem relacji dwuargumentowych, spełniających szereg warunków, jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny. Te ogólne twierdzenia prowadzą do eleganckich wniosków. Przykładowo wniosek 3.3 mówi, że istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, że obraz zbioru A^2 względem każdej suriekcji klasy C^1 z $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}$ jest całkowicie niemierzalny względem miary Lebesgue'a. Rezultaty pracy [H5] nawiązują do wcześniejszych prac innych autorów, uogólniając wyniki K. Ciesielskiego, H. Fejzića, C. Freilinga i M. Kysiaka.

Główne twierdzenie (1.3) pracy [H6] (opublikowanej w Cent. Eur. J. Math.) uogólnia twierdzenie Żeberskiego z jego wcześniejszej pracy pod prawie tym samym tytułem (cytowanej w autoreferacie jako [Zeb]). Osłabione dodatkowe założenie teoriomnogościowe (nie istnieje liczba kardynalna quasi-mierzalna poniżej kontinuum) prowadzi do wzmocnionej tezy o istnieniu nieprzeliczalnie wielu parami rozłącznych podrodzin wyjściowego punktowo-skończonego pokrycia przestrzeni X zbiorami z σ-ideału (spełniającego warunek *ccc*), których sumy są całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalne. Dowód jest silnie oparty na lematach z pracy [Zeb], ale zawiera też znaczący wkład habilitanta w postaci odpowiednich konstrukcji indukcyjnych.

Praca [H7] (opublikowana w Houston Journal of Mathematics) poświęcona jest (wprowadzonemu przez Sz. Żeberskiego) ciekawemu pojęciu zbioru Łuzina względem pary σ-ideałów, będącemu naturalnym uogólnieniem klasycznych zbiorów Łuzina i Sierpińskiego. Główne twierdzenie (2.1) pokazuje istnienie uogólnionego zbioru Łuzina przy założeniu, że zachodzą pewne związki pomiędzy współczynnikami kardynalnymi, związanymi z tymi σ-ideałami. Co więcej, przy podobnych założeniach istnieje wiele parami borelowsko nierównoważnych uogólnionych zbiorów Łuzina. Ostatnia część pracy zawiera kilka spostrzeżeń, odnoszących się do zachowywania uogólnionych zbiorów Łuzina w rozszerzeniach forsingowych.

Nieco dokładniej omówię teraz trzy samodzielne prace habilitanta: [H3], [H4] i [H8].

Większość wyników pracy [H3] (opublikowanej w Math. Log. Quart.) dotyczy – podobnie jak prace [H1], [H2] i [H6] – warunków wystarczających istnienia takiej podrodziny danego pokrycia $\mathcal{A}$ przestrzeni X zbiorami z σ-ideału $\mathcal{I}$ o bazie borelowskiej, której suma jest $\mathcal{I}$-niemierzalna lub całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalna. W obu głównych twierdzeniach (2.1 i 2.2) zakłada się, że żadne dwa różne punkty przestrzeni nie należą jednocześnie do nieprzeliczalnie wielu zbiorów z rodziny $\mathcal{A}$ oraz że żadnego zbioru borelowskiego spoza σ-ideału $\mathcal{I}$ nie można pokryć mniej niż kontinuum wieloma zbiorami z $\mathcal{A}$ (w skrócie: $cov_h(\mathcal{A}) = \mathfrak{c}$). Przy tych założeniach twierdzenie 2.2 daje istnienie podrodziny rodziny $\mathcal{A}$ o sumie $\mathcal{I}$-niemierzalnej, natomiast twierdzenie 2.1, przy dodatkowym założeniu, że każdy element przestrzeni X należy do kontinuum wielu zbiorów z rodziny $\mathcal{A}$, gwarantuje istnienie podrodziny o sumie całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnej. O ile dowód twierdzenia 2.1 wydaje się być prostym uogólnieniem indukcyjnej konstrukcji zbioru Bernsteina, o tyle dowód twierdzenia 2.2, też prowadzony przez indukcję pozaskończoną, jest znacznie bardziej pomysłowy i złożony technicznie. To twierdzenie mi się podoba także z uwagi na prostotę założeń, które są spełnione w licznych naturalnych sytuacjach. Kilka takich sytuacji habilitant opisuje w twierdzeniach 3.8, 3.10 i 3.11. W szczególności, w twierdzeniu 3.8 rodzina $\mathcal{A}$ składa się z prostych, które pokrywają płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ – w konsekwencji suma pewnej jej podrodziny jest zbiorem niemierzalnym w sensie Lebesgue'a (a suma być może innej jej podrodziny nie ma własności Baire'a). By w tej sytuacji móc zastosować twierdzenie 2.2, wystarczy sprawdzić, że $cov_h(\mathcal{A}) = \mathfrak{c}$, co habilitant robi, pomysłowo posługując się wprowadzonym przez siebie pojęciem zbioru doskonałego szczupłego względem rodziny $\mathcal{A}$. Na marginesie warto zauważyć, że F. van Engelen, K. Kunen i A. Miller („Two remarks about analytic sets", Lecture Notes in Math., 1401 (1989), 68–72) pokazali, że jeśli borelowskiego podzbioru płaszczyzny nie da się pokryć za pomocą przeliczalnie wielu prostych z danej rodziny $\mathcal{A}$, to nie da się go również pokryć za pomocą mniej niż kontinuum prostych należących do $\mathcal{A}$. Innymi słowy warunek $cov_h(\mathcal{A}) = \mathfrak{c}$ jest spełniony dla każdego σ-ideału podzbiorów $\mathbb{R}^2$ o bazie borelowskiej, zawierającego wszystkie proste, co prowadzi do istotnego zwiększenia zakresu stosowalności twierdzenia 2.2 poprzez rozszerzenie tezy twierdzenia 3.8 na wszystkie takie σ-ideały.

Mam uwagi krytyczne odnoszące się do redakcji pracy [H3]. Dowody lematu 3.5 oraz stwierdzeń 3.6 i 3.7 nie są poprawne, gdyż odwołują się do lematu 3.2, który został sformułowany i udowodniony jedynie dla σ-ideału zbiorów miary Haara zero. Wątpię, czy w takiej ogólności fakty te są w ogóle prawdziwe (w autoreferacie ich sformułowania zostały poprawione za pomocą odpowiedniej zmiany definicji zbioru szczupłego). Na szczęście twierdzenia 3.8 i 3.9 dotyczą σ-ideałów związanych z miarą i kategorią, są więc prawdziwe (odpowiednik lematu 3.2 jest prawdziwy dla wszystkich σ-ideałów z własnością *ccc*, czego inny dowód można znaleźć w literaturze, np. w pracy J. Cichonia, A. Jasińskiego, A. Kamburelisa i P. Szczepaniaka „On translations of subsets of the real line", Proc. Amer. Math. Soc. 130 (6), 1833–1842).

Praca [H4] (opublikowana w Far East Journ. of Math. Sci.) poświęcona jest $\mathcal{I}$-niemierzalności w przestrzeniach Banacha względem σ-ideałów z następującą własnością Steinhausa: suma algebraiczna zbiorów $\mathcal{I}$-mierzalnych spoza $\mathcal{I}$ ma niepuste wnętrze. Artykuł ten, inspirowany wcześniejszymi pomysłami J. Cichonia i P. Szczepaniaka, zawiera kilka twierdzeń o zgrabnych sformułowaniach i prostych dowodach. Stwierdzają one, że przy różnych naturalnych założeniach obraz kuli jednostkowej względem izomorfizmu liniowego, niebędącego homeomorfizmem, jest $\mathcal{I}$-niemierzalny.

Również w przypadku pracy [H4] mam uwagi krytyczne odnoszące się do jej redakcji. W szczególności, definicja własności Steinhausa (definicja 1.3) jest błędna, a dowód lematu 2.1 – zbędny (sam autor pisze we wstępie, że fakt, że w dowolnej grupie topologicznej σ-ideał zbiorów pierwszej kategorii Baire'a ma własność Steinhausa, jest dobrze znany).

Rezultaty części 2. i 3. pracy [H8] (opublikowanej w Arch. Math. Logic) znów dotyczą możliwości wyboru takiej podrodziny danego pokrycia $\mathcal{A}$ przestrzeni X zbiorami z σ-ideału $\mathcal{I}$, której suma jest $\mathcal{I}$-niemierzalna. Nowym elementem jest porzucenie założenia, że $\mathcal{I}$ ma bazę borelowską i skoncentrowanie się na σ-ideale zbiorów s_0 Marczewskiego i pokrewnych σ-ideałach, zdefiniowanych za pomocą różnych klas zbiorów doskonałych w przestrzeni Baire'a $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (równoważnie: drzew na zbiorze liczb naturalnych). Indukcyjne dowody twierdzeń 2.2, 2.5 i 3.1 robią wrażenie nietrudnych modyfikacji konstrukcji zbioru Bernsteina. Część 4. artykułu dotyczy istnienia maksymalnych rodzin parami rozłącznych funkcji w przestrzeni Baire'a, niemierzalnych względem rozważanych ideałów. Indukcyjny dowód twierdzenia 4.1, pokazującego istnienie takich rodzin przy założeniu CH, wymaga inwencji i jest znacznie bardziej złożony technicznie. To samo dotyczy forsingowego dowodu twierdzenia 4.2 o niesprzeczności podobnej tezy z negacją CH. Praca [H8] jest zredagowana wyraźnie lepiej od wcześniej omawianych.

Obraz, wyłaniający się z powyższego przeglądu głównych wyników Rozprawy sprawia, że jej ocena nie jest sprawą łatwą.

Co prawda jest jednym z wymogów ustawowych, by publikacje, składające się na cykl stanowiący Rozprawę, były powiązane tematycznie, to jednak w tym przypadku wiążący je zakres tematyczny jest bardzo wąski. Szczególnie widać to w pracach [H1], [H2], [H3], [H6] i [H8], które dotyczą głównie możliwości wyboru takiej podrodziny danego pokrycia $\mathcal{A}$ przestrzeni X zbiorami z σ-ideału $\mathcal{I}$, której suma jest $\mathcal{I}$-niemierzalna. Powtarza się w nich wielokrotnie ten sam schemat dowodowy, polegający na odpowiednich modyfikacjach indukcyjnej konstrukcji zbioru Bernsteina. Zewnętrzny oddźwięk ich wyników jest na razie znikomy – artykuły z Rozprawy są cytowane niemal wyłącznie w pracach, których jednym ze współautorów jest R. Rałowski lub Sz. Żeberski. W samodzielnych pracach habilitanta, zwłaszcza [H3] i [H4], rzuca się w oczy brak starannej redakcji. Ta sama uwaga krytyczna odnosi się też do Autoreferatu, który jest swoistą wizytówkę habilitanta, po części odgrywając rolę dawnego wykładu habilitacyjnego.

Z drugiej strony Rozprawa stanowi interesującą całość. Znalazłem w niej ładne twierdzenia, odpowiadające na naturalne pytania i uzupełniające lub uogólniające wyniki innych matematyków, także spoza wrocławskiego otoczenia habilitanta. Dowody niejednokrotnie wymagały inwencji i sprawności technicznej. Techniki dowodowe stosowane w Rozprawie to, oprócz dominujących konstrukcji przez indukcję pozaskończoną, także elementy deskryptywnej teorii mnogości oraz forsingu. Prace, wchodzące w skład Rozprawy zostały opublikowane w dobrych czasopismach.

Indywidualny wkład dr. hab. Sz. Żeberskiego we wspólne z habilitantem prace [H2] oraz [H5]–[H7] został przez niego bardzo szczegółowo opisany w dołączonym do wniosku o wszczęcie postępowania habilitacyjnego oświadczeniu. Pozwala ono zarazem wyodrębnić indywidualny wkład habilitanta w te prace i stwierdzić, że jest on znaczący i równorzędny wkładowi Sz. Żeberskiego (który został – od czego nie sposób całkowicie abstrahować – jednoznacznie pozytywnie oceniony przez recenzentów w jego postępowaniu habilitacyjnym).

Biorąc wszystkie powyższe elementy pod uwagę, skłaniam się do stwierdzenia, że Rozprawa spełnia wymogi ustawowe, stanowiąc znaczący wkład habilitanta w rozwój uprawianej przez niego dyscypliny.

3. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze i dorobek dydaktyczny.

Oprócz ośmiu omówionych już prac, wchodzących w skład Rozprawy, na dorobek naukowy habilitanta składa się jeszcze szesnaście prac ([P1]–[P16], zgodnie z numeracją w Autoreferacie). Dziewięć z nich ([P8]–[P16]) to artykuły z dziedziny fizyki matematycznej i chemii fizycznej (habilitant jest doktorem fizyki).

Wszystkie prace czysto matematyczne ([P1]–[P7]) są współautorskie, przy czym jednym ze współautorów sześciu z nich jest Sz. Żeberski.

Prace [P1]–[P3] dotyczą, podobnie jak Rozprawa, problematyki podzbiorów specjalnych, w tym zbiorów Bernsteina i zbiorów niemierzalnych, mających różne dodatkowe własności.

Moją szczególną uwagę zwrócił cykl interesujących prac [P4]–[P6], opublikowanych w bardzo dobrych czasopismach (odpowiednio: Israel Journal of Math., Fund. Math. i Proc. Amer. Math. Soc.) w latach 2015–16, którego współautorami byli, oprócz Sz. Żeberskiego, T. Banakh (wszystkich trzech) i M. Morayne (pierwszych dwóch). Prace te dotyczą własności i klasyfikacji σ-ideałów niezmienniczych ze względu na pewne klasy homeomorfizmów różnych przestrzeni polskich.

Liczba artykułów, cytujących publikacje habilitanta, według bazy Web of Science wynosi 22 (bez autocytowań - 13).

Na pozostałą aktywność naukową habilitanta składa się udział w dwustronnych projektach badawczych (z Austrią i Republiką Czeską), bycie wykonawcą grantu NCN oraz czynne uczestnictwo (referaty, sesje plakatowe) w ponad dwudziestu konferencjach tematycznych. Habilitant od dwóch lat współprowadzi też (wraz z Sz. Żeberskim) seminarium z teorii mnogości na Politechnice Wrocławskiej, które skupia pewną grupę matematyków wrocławskich, związanych z tą dziedziną. Dr Rałowski jest jej aktywnym i cenionym przez swoje środowisko członkiem.

Spełnienie ustawowego warunku wykazania się przez habilitanta istotną aktywnością naukową nie budzi moich wątpliwości.

4. Konkluzja.

Reasumując, uważam, że wniosek habilitacyjny dra Roberta Rałowskiego spełnia wymogi ustawowe i uzasadnia nadanie mu stopnia naukowego doktora habilitowanego.

Jelonowski