Recenzja rozprawy habilitacyjnej nt.
"Równania typu skalującego a inne obiekty"
autorstwa dr. Rafała Kapicy

W zakresie badań nad systemami funkcyjnymi na prostej rzeczywistej dużym zainteresowaniem cieszą się systemy Gabora oraz systemy afiniczne. Popularnośc tych systemów wynika m.in. z prostoty z jaką są one zdefiniowane. Podstawową przestrzenią dla tych systemów jest zespolona przestrzeń Hilberta $L^2(\mathbb{R})$, na której rozważane są trzy elementarne odwzorowania unitarne: modulacje, translacje i dylatacje. Dla $\gamma \in \mathbb{R}$ korespondująca modulacja to operator M_γ zadany na $f \in L^2(\mathbb{R})$ jako $M_\gamma f(x) = e^{2\pi i \gamma x} f(x)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Dla $\beta \in \mathbb{R}$ korespondująca translacja to operator T_β zadany jako $T_\beta f(x) = f(x - \beta)$. Natomiast dla $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ korespondująca dylatacja to operator D_α zadany jako $D_\alpha f(x) = \sqrt{\alpha} f(\alpha x)$.

System Gabora to $\{M_{\gamma_n} T_{\beta_n} f : n \in \mathbb{Z}\}$, gdzie $\{(\gamma_n, \beta_n) : n \in \mathbb{Z}\}$ jest zbiorem różnych punktów $\mathbb{R}^2$, a f jest wybraną funkcją z $L^2(\mathbb{R})$ oraz $M_{\gamma_n} T_{\beta_n} f(x) = e^{2\pi i \gamma_n x} f(x - \beta_n)$.

System afiniczny to $\{D_{\alpha_n} T_{\beta_n} f : n \in \mathbb{Z}\}$, gdzie $\{(\alpha_n, \beta_n) : n \in \mathbb{Z}\}$ jest zbiorem różnych punktów $(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R}$, a f jest wybraną funkcją z $L^2(\mathbb{R})$ oraz $D_{\alpha_n} T_{\beta_n} f(x) = \sqrt{\alpha_n} f(\alpha_n x - \beta_n)$.

Mimo swej prostoty systemy te kryją wiele zagadek, które są źródłem intensywnych badań. Jednym z podstawowych dręczących pytań jest liniowa niezależność tych sytemów rozumiana w standardowym sensie. Dla sytemów Gabora problem ten jest znany jako hipoteza HRT o liniowej niezależności, a nazwa ta pochodzi od jej autorów (Heil, Ramanathan, Topiwala - 1996). Zgodnie z tą hipotezą dla dowolnej funkcji $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ oraz dla dowolnego skończonego zbioru $\Lambda = \{(\gamma_n, \beta_n) : n = 0, 1, \ldots, N\} \subset \mathbb{R}^2$ układ $\{M_{\gamma_n} T_{\beta_n} f : (\gamma_n, \beta_n) \in \Lambda\}$ jest liniowo niezależny, czyli że następujące równanie funkcyjne o ustalonych współczynnikach zespolonych c_n

$$\sum_{n=0}^{N} c_n e^{2\pi i \gamma_n x} f(x - \beta_n) = 0 \tag{0}$$

ma rozwiązanie $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tylko wtedy gdy $c_n = 0$ dla $n = 0, 1, \ldots, N$.

Powyższe stwierdzenie łatwo tłumaczy się na następujące stwierdzenie równoważne. Dla dowolnego zbioru $\{(\gamma_n, \beta_n) : n = 1, \ldots, N\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ równanie funkcyjne

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{2\pi i \gamma_n x} f(x - \beta_n) \tag{1}$$

ma rozwiązanie $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tylko wtedy gdy $c_n = 0$ dla $n = 1, \ldots, N$.

Hipoteza HRT rozważana jest w dwóch aspektach: w zależności od konfiguracji zbioru Λ oraz w zależności od klasy funkcji, do której należy f. W szczególności, hipoteza jest prawdziwa, jeśli f ma nośnik zwarty[1], lub jeśli liczba elementów zbioru Λ nie przekracza 3. W sytuacji gdy Λ ma cztery elementy, tylko częściowe rezultaty potwierdzają prawdziwość tej hipotezy.

Uproszczona wersja równania (1) polegająca na ustaleniu współczynników γ_n :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{2\pi i \gamma x} f(x - \beta_n) \tag{2}$$

również nie została jeszcze rozwiązana.[2]

W szczególności, nie wiadomo czy dla dla dowolnych różnych liczb $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ równanie funkcyjne

$$f(x) = e^{2\pi i x}\big(c_1 f(x) + c_2 f(x - a) + c_3 f(x - b)\big) \tag{3}$$

ma rozwiązanie $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tylko wtedy gdy $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.[3]

Równoległe zagadnienie dotyczące liniowej niezależności systemu afinicznego jest trudne z innych przyczyn. Podobnie jak w równaniu (0) możemy pytać o rozwiązania równania

[1] Benedetto i Bourouihiya w 2012 udowodnili hipotezę HRT dla dużej klasy funkcji zdefiniowanej przez Hardy'ego. Hipoteza pozostaje jednak nadal otwarta nawet dla funkcji klasy Schwartza.

[2] W równaniu tym bez utraty ogólności możemy przyjąć, że $\gamma = 1$.

[3] Demeter w 2010 wykazał, że równanie (3) nie ma nietrywialnych rozwiązań f w klasie Schwartza.

funkcyjnego

$$\sum_{n=0}^{N} c_n \sqrt{\alpha_n} f(\alpha_n x - \beta_n) = 0$$

przy ustalonych współczynnikach zespolonych c_n, gdzie f należy do wybranej klasy funkcji. Problem ten tłumaczy się na równanie funkcyjne rozważane przez habilitanta

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n f(\alpha_n x - \beta_n), \tag{4}$$

gdzie $\{(\alpha_n, \beta_n) : n = 1, \ldots, N\} \subset \big((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}\big) \setminus \{(1,0)\}$. Równanie to ma postać analogiczną do równania (1) i podobnie jak w (2) możemy je uprościć ustalając skalę $\alpha_n = \alpha$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n f(\alpha x - \beta_n). \tag{5}$$

Habilitant słusznie podkreśla, że rozwiązanie powyższego równania sprawia poważne trudności. W istocie, rozważania nad szczególnym przypadkiem tego równania, mianowicie

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} f(\alpha x - 1) + \frac{\alpha}{2} f(\alpha x + 1), \tag{6}$$

prowadzone są od pierwszej połowy ubiegłego wieku. Zgodnie z Uwagą 2 rozprawy, dla $\alpha > 1$ równanie (6) ma nietrywialne rozwiązanie w klasie $L^1(\mathbb{R})$, wtedy i tylko wtedy gdy szereg losowy $\sum_{n=1}^{\infty} \pm \frac{1}{\alpha^n}$ ma rozkład (absolutnie) ciągły, gdzie znaki "+" oraz "−" wybierane są niezależnie z równym prawdopodobieństwem. Badania w tym probabilistycznym aspekcie wykazały, że równanie (6) nie ma nietrywialnych rozwiązań w $L^1(\mathbb{R})$ dla $\alpha > 2$ oraz że takie rozwiązania istnieją, gdy $\alpha = 2^{\frac{1}{n}}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Erdős (1939) udowodnił brak takich rozwiązań gdy α jest liczbą Pisota oraz stwierdził, iż istnieje $A > 1$ takie, że dla prawie wszystkich $1 < \alpha < A$ równanie (6) ma nietrywialne rozwiązanie w $L^1(\mathbb{R})$. Długie próby zrozumienia pełni sytuacji w przypadku $1 < \alpha < 2$ zaowocowały pracą Solomyaka, który w 1995 roku opublikował w Ann. of Math. dowód hipotezy Garcii stwierdzającej, że dla prawie wszystkich $1 < \alpha < 2$ równanie (6) ma nietrywialne rozwiązanie w $L^1(\mathbb{R})$. Nadal jednak nie jest jasne, czy liczby znalezione przez Erdősa są jedynymi w przedziale $(1,2)$ dla których brak jest nietrywialnych rozwiązań równania (6).

Innym szczególnym przypadkiem równania (5), który należy odnotować, jest równanie Schillinga

$$f(x) = \frac{\alpha}{4} f(\alpha x - 1) + \frac{\alpha}{2} f(\alpha x) + \frac{\alpha}{4} f(\alpha x + 1)$$

studiowane m.in. przez Barona.

W większej ogólności badania nad istnieniem nietrywialnych rozwiązań w $L^1(\mathbb{R})$ równania (5) zostały podjęte przez Daubechies i Lagariasa (1991).[4] Stwierdzili oni, że istnienie takich rozwiązań równania (5) przy $\alpha > 1$ zależy od współczynnika

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{N} c_n$$

i wykazali co następuje. Jeśli $|\Delta| \leq 1$ i $\Delta \neq 1$, to (5) nie ma nietrywialnych rozwiązań w $L^1(\mathbb{R})$. Jeśli $\Delta = 1$, to (5) ma co najwyżej jedno (z dokładnością do stałej) rozwiązanie w $L^1(\mathbb{R})$. Jeśli $|\Delta| > 1$, to przestrzeń rozwiązań równania (5) w $L^1(\mathbb{R})$ może być skończenie wymiarowa (np. trywialna), lub nieskończenie wymiarowa. Praca tych autorów zawiera również stwierdzenie (bez dowodu), że powyższy wynik można uogólnić do sytuacji, gdy rozważane równanie funkcyjne ma postać

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n f(\alpha x - \beta_n), \tag{7}$$

przy założeniu, że $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| |\beta_n|^{\delta} < \infty$ dla pewnego $\delta > 0$ (por. Twierdzenie 1 rozprawy).

[4] W zakresie klasy $L^2(\mathbb{R})$ liniowa niezależność systemów afinicznych oraz systemów Gabora była poruszona przez Christensena i Lindnera w 2001.

Rozprawa habilitanta dotyczy jego badań nad naturalnymi uogólnieniami równania (5).[5] Zgodnie z klasycznym podejściem, które rzuciło światło na równanie (6), habilitant stosuje metody probabilistyczne dla stwierdzenia rozwiązywalności badanych równań. Tego typu podejście wymusza szukanie rozwiązań rzeczywistych w klasie $L^1(\mathbb{R})$.

Wyniki habilitanta nie wnoszą wiele nowego w zakresie równania (4), które można interpretować jako pytanie o liniową niezależność systemów afinicznych.[6] Habilitant bada natomiast ogólniejsze równania typu

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n f(\alpha_n x - \beta_n), \tag{8}$$

które można interpretować jako pytanie o ω-liniową niezależność systemów afinicznych.

Najprostrzym uogólnieniem równania (5) rozważanym przez habilitanta jest równanie (7) wspomniane przez Daubechies i Lagariasa. W pracy [III] habilitant wykazuje, że równanie (7) ma co najwyżej jednowymiarową przestrzeń rozwiązań w $L^1(\mathbb{R})$ przy nastepujących założeniach: $1 < \alpha \in \mathbb{N}$, $\beta_n = n$, $c_n \geq 0$ dla $n \in \mathbb{Z}$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n = \alpha$ oraz $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_n \log|n| < \infty$. W rozprawie wspomina jednak, że bardziej ogólny wynik znajduje się jako Corollary 3.4 w pracy [V]. Naturalne staje się więc następujące

Pytanie 1. *Czy jeśli $1 < \alpha \in \mathbb{R}$, $\beta_n \in \mathbb{R}$, $\beta_{n+1} - \beta_n \geq \beta > 0$, $c_n \in \mathbb{C}$ dla $n \in \mathbb{Z}$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n = \alpha$ oraz $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |c_n| log|\beta_n| < \infty$, to równanie (7) ma co najwyżej jednowymiarową przestrzeń rozwiązań w $L^1(\mathbb{R})$?*

Praca [III] dotyczy dwukierunkowego równania skalującego postaci

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{n,1} f(kx - n) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{n,-1} f(-kx - n),$$

w którym współczynniki $c_{n,1}$, $c_{n,-1}$ są nieujemne oraz sumują się do liczby całkowitej $k > 1$. Przy założeniu, że $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (c_{n,1} + c_{n,-1}) \log|n| < \infty$ wykazane zostaje, że powyższe dwukierunkowe równanie skalujące ma co najwyżej jednowymiarową przestrzeń rozwiązań w $L^1(\mathbb{R})$ (Twierdzenie 2 w autoreferacie). Ponadto w oparciu o idee Protasova pokazana jest charakteryzacja istnienia nietrywialnych rozwiązań równania dwukierunkowego w terminach zbiorów słabo blokujących. (Protasov uzyskał swój wynik dla klasycznego równania skalującego postaci $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n f(kx - n)$ zakładając, że nieujemne współczynniki c_n sumują się do liczby całkowitej $k > 1$ oraz $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n |n| < \infty$.)

Innym uogólnieniem równania (5), którym zajmuje się habilitant, jest ciągłe równanie skalujące

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} c(y) f(\alpha x - y) dy. \tag{9}$$

W przypadku gdy funkcja zespolona c ma nośnik zwarty oraz $\alpha > 1$, równanie to zostało dokładnie zbadane w pracy Jia, Lee i Sharmy, o której wspomina habilitant. W szczególności praca tych trzech autorów wykazuje, że jeśli nośnik funkcji c zawiera się przedziale $[-a, a]$ oraz $K \geq \frac{a}{\alpha - 1}$, to równanie (9) ma jedyne[7] nietrywialne rozwiązanie w przestrzeni $L^1([-K, K])$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_{\mathbb{R}} c(y) dy = \alpha$. Habilitant słusznie wnioskuje, że w takim razie jeśli c ma nośnik zwarty oraz $\int_{\mathbb{R}} c(y) dy = \alpha > 1$, to równanie (9) ma jednowymiarową przestrzeń rozwiązań w $L^1(\mathbb{R})$ (Twierdzenie 7 w rozprawie). Jednakże Twierdzenie 8 z rozprawy, a co gorsza Corollary 3 i 4 z pracy [I] trudno uznać za rozszerzenie oryginalnego wyniku charakteryzacyjnego Jia, Lee i Sharmy. W istocie, w zakresie badanym przez tych trzech autorów habilitant wykazuje jedynie, że jeśli c jest funkcją nieujemną spełniającą $\int_{\mathbb{R}} c(y) dy = \alpha > 1$ oraz $\int_{|x|>1} c(x) \log|x| < \infty$, to równanie (9) ma jednowymiarową przestrzeń rozwiązań w $L^1(\mathbb{R})$. Tak więc za cenę założenia nieujemności funkcji c habilitant jest w stanie zastąpić warunek zwartego nośnika wskazanym warunkiem całkowym i w ten sposób wykazać połowę twierdzenia charakteryzacyjnego Jia, Lee i Sharmy.

[5] Badania zostały opublikowane w pracach [I]–[VI] wspólnych z Morawcem i wyszczególnionych w rozprawie.

[6] Wyjątkiem tutaj są Corollary 6.2, 6.4 oraz 6.6 z pracy [III] wspomniane w autoreferacie w Twierdzeniu 10 (ii) dotyczące charakteryzacji istnienia nietrywialnych rozwiązań równania dwukierunkowego w terminach zbiorów silnie blokujących. A także Twierdzenie 5.2 z pracy [IV] będące wnioskiem z badań Ngai i Wanga.

[7] Z dokładnością do stałej.

W pełnej ogólności wspomniany wynik habilitanta z pracy [I] stwierdza, że jeśli zmienna losowa $M : \Omega \to \mathbb{R}$ określona na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ma ciągły rozkład oraz $\int_\Omega \log \max\{|M(\omega)|, 1\} P(d\omega) < \infty$, to dla $|\alpha| > 1$ równanie

$$f(x) = \int_\Omega |\alpha| f(\alpha x - M(\omega)) P(d\omega)$$

ma jednowymiarową przestrzeń rozwiązań w $L^1(\mathbb{R})$. Jest to więc rezultat ogólny, ale rozszerzający charakteryzację Jia, Lee i Sharmy połowicznie i jedynie w niektórych kierunkach.

Kolejne uogólnienie równania (5) badane przez habilitanta ma postać

$$f(x) = \int_\Omega |\det L(\omega)| f(L(\omega)x - M(\omega)) P(d\omega), \tag{10}$$

gdzie zmienne losowe $L : \Omega \to \mathbb{R}^{m \times m}$ oraz $M : \Omega \to \mathbb{R}^m$ określone są na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, a rozwiązanie $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ należy do $L^1(\mathbb{R}^m)$, gdzie m jest ustaloną liczbą naturalną.

W przypadku jednowymiarowym (czyli dla $m = 1$) równanie (10) upraszcza się do

$$f(x) = \int_\Omega |L(\omega)| f(L(\omega)x - M(\omega)) P(d\omega), \tag{11}$$

i jest studiowane przez habilitanta w pracy [VI]. Używając przestrzeni probabilistycznej $(\Omega^\infty, \mathcal{A}^\infty, \mathcal{P}^\infty)$ będacej nieskończonym produktem przestrzeni $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ habilitant wykazuje w Theorem 5.4, że jeśli $P(M = 0) < 1$ oraz $\lim_{n\to\infty} \frac{M(\omega_n)}{L(\omega_1)\dots L(\omega_n)} = 0$ dla prawie wszystkich $(\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega^\infty$, to równanie (11) ma co najwyżej jednowymiarową przestrzeń rozwiązań w $L^1(\mathbb{R})$. W Proposition 5.6 tej pracy poprawiony zostaje wymieniony powyżej wynik habilitanta z publikacji [I] dotyczący połowicznego rozszerzenia charakteryzacji Jia, Lee i Sharmy. W Theorem 4.2 pracy [VI] oferowana jest własna charakteryzacja istnienia nietrywialnych rozwiązań równania (11) w terminach punktów stałych afinicznej funkcji losowej. Te wyniki przedstawione są w rozprawie jako Twierdzenia 14 i 15 zachodzące dla równania (10) z dowolnym $m \in \mathbb{N}$. Praca [VI] sugeruje jedynie, że zakłada $m = 1$ dla uproszczenia pisowni.

Równanie (10) jest tematem pracy [IV]. W oparciu o teorię operatorów Markowa praca ta charakteryzuje istnienie nietrywialnych rozwiązań równania (10) w klasie $L^1(\mathbb{R}^m)$. W szczególności w Theorem 5.1 (Twierdzenie 12 rozprawy) przy założeniu, że funkcja L jest stała, poprawiony zostaje wymieniony już powyżej wynik habilitanta z publikacji [I] dotyczący połowicznego rozszerzenia charakteryzacji Jia, Lee i Sharmy. Twierdzenie 12 rozprawy składa się z dwóch części. Pierwsza dotyczy istnienia rozwiązań równania (10), a druga podaje informację na temat nośnika rozwiązania pod warunkiem, że zmienna losowa M jest ograniczona. Ze względu na to, że praca [VI] nie zawiera referencji do pracy [IV] (i vice versa) trudno jest ocenić czy wspomniany uprzednio wynik habilitanta (Twierdzenie 15 rozprawy, Proposition 5.6 [VI]) pozwala na wywnioskowanie pierwszej części Twierdzenia 12 rozprawy.

Opisane wyniki prac [I],[III] oraz [VI] opierają się na zastosowaniu szeregu Grincevičjusa zwanego perpetuitą. Szereg ten wykorzystany jest również w pracy [V] do zbadania równania

$$f(x) = \int_\Omega |\det L(\omega)| C(\omega) f(L(\omega)x - M(\omega)) P(d\omega), \tag{12}$$

gdzie zmienne losowe $L : \Omega \to \mathbb{R}^{m \times m}$, $M : \Omega \to \mathbb{R}^m$ oraz $C : \Omega \to \mathbb{R}^{q \times q}$ określone są na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, a rozwiązanie $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ należy do $L^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^q)$, gdzie m, q są ustalonymi liczbami naturalnymi. W tej pracy najciekawszy wydaje się wynik zawarty w Corollary 3.4, o którym habilitant wspomina na str. 8 rozprawy. Wynik ten głosi, że przy pewnych założeniach wymiar przestrzeni rozwiązań równania (12) nie przekracza liczby q. Dla ułatwienia dalszej analizy tematu rozważmy $m = q = 1$ i zapiszmy ten rezultat jako

Wynik [V]. *Przy pewnych założeniach przestrzeń rozwiązań równania (12) jest co najwyżej jednowymiarowa.*

oraz przypomnijmy wspomniany rezultat z pracy [VI]

Wynik [VI]. *Jeśli $P(M = 0) < 1$ oraz $\lim_{n\to\infty} \frac{M(\omega_n)}{L(\omega_1)\dots L(\omega_n)} = 0$ dla prawie wszystkich $(\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega^\infty$, to równanie (11) ma co najwyżej jednowymiarową przestrzeń rozwiązań.*

Ze względu na to, że praca [VI] nie wspomina o pracy [V] (i vice versa), ponownie trudno jest ocenić jak powyższe wyniki mają się do siebie, w przypadku gdy funkcja C z równania (12) jest równa jeden. Wracając zaś do prostrzych pojęć możemy zadać następujące

Pytanie 2. *Czy Wynik [V] lub Wynik [VI] wnoszą coś nowego w zakresie podstawowych równań (8) i (9)? W szczególności, czy Wynik [V] pozwala odpowiedzieć na Pytanie 1 (np. w przypadku, gdy $c_n \in \mathbb{R}$)?*

Ostatnim uogólnieniem równania (5) przedstawionym w rozprawie jest równanie

$$f(x) = \int_\Omega \left| \det \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \omega) \right| f(\varphi(x, \omega)) P(d\omega) \tag{13}$$

badane w pracach [II] i [VI]. Twierdzenie 4 rozprawy mówi o tym, że w pewnych warunkach równanie (13) nie ma nietrywialnych rozwiązań w L^1. Warto przypomnieć, że tego typu negatywny wynik w przypadku równań (1), (2) i (3) byłby dużym sukcesem.

Wyniki habilitanta przedstawione w rozprawie ciężko uznać za wybitne. Dotyczą jednak trudnego tematu równań skalujących, który jest na tyle atrakcyjny, że znalazł się w kręgu zainteresowań renomowanych matematyków. Metody habilitanta pozwalają na zbadanie przestrzeni rozwiązań zarówno dyskretnych jak i ciągłych równań skalujących przy ograniczeniach wynikających z zastosowania metod probabilistycznych. Ogólny wynik habilitanta pozwala wywnioskować brak takich rozwiązań w obu tych przypadkach (ciągłym i dyskretnym). Kilka ogólnych, lecz trudnych do porównania rezultatów habilitanta gwarantuje, że w obu przypadkach przestrzeń rozwiązań jest co najwyżej jednowymiarowa. Ponadto kilka ogólnych i również trudnych do porównania rezultatów habilitanta gwarantuje, że w ciągłym przypadku przestrzeń rozwiązań jest jednowymiarowa. Prace habilitanta podobnie jak rozprawa nie wyjaśniają jednak, jak te ogólne rezultaty rzutują na najprostsze równania skalujące.

W mojej ocenie mankamenty rozprawy nie są poważne i dlatego wnoszę o dopuszczenie pana Rafała Kapicy do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Ponadto z nieśmiałą dozą nadziei można sądzić, że obecne badania habilitanta nad stabilnością procesów Markowa prowadzone we współpracy z Szarkiem i Ślęczką przyniosą rezultaty naświetlające rozwiązywalność równań Naviera-Stokesa.

Ziemowit Rzeszotnik