Recenzja

rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego

doktora Rafała Kapicy

Dr Rafał Kapica jest absolwentem Uniwersytetu Śląskiego. Dyplom magistra matematyki otrzymał w 1998 r. na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii. W roku 2003 uzyskał stopień naukowy doktora nauk matematycznych na wyżej wspomnianym wydziale. Jego rozprawa doktorska nosiła tytuł *"Iteracje funkcji o wektorowych wartościach losowych i równanie* $\varphi(x) = \int_\Omega \varphi(f(x,\omega))P(d\omega)$ *z nimi związane"*. Promotorem jego rozprawy był prof. dr hab. Karol Baron.

Habilitant opublikował dotychczas 20 prac naukowych, które w większości ukazały się w dobrych czasopismach o zasięgu międzynarodowym (12 ukazało się w czasopismach indeksowanych przez *Thomson-Reuters Web of Knowledge*, tzw *lista filadelfijska*). Jeśli chodzi o punktację (pochodzącą z części A i B wykazu czasopism Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego z 2013 r.) to 2 prace habilitanta ukazały się w czasopiśmie za 40 punktów (Journ. Math. Anal. and Appl.), 3 w czasopismach za 35 punktów (Appl. Math. and Comp., Potential Anal.), po jednym w czasopismach za 25 i 20 punktów (Int. Equat. Oper. Theory, Semigr. Forum) oraz 5 w czasopismach za 15 punktów (Coll. Math., Ann. Pol. Math., Glasnik Mat., Publ. Math. Debr.). Z pozostałych 8 artykułów autorstwa habilitanta trzy ukazały się w czasopismach za odp. 8,9, i 10 punktów.

A. Ocena rozprawy habilitacyjnej

A.1 Krótkie omówienie rozprawy. W skład rozprawy habilitacyjnej zatytułowanej "*Równania typu skalującego a inne obiekty*" wchodzi 6 prac. Ukazały się w drukiem latach 2008-2012. Prace I i III zostały opublikowane w Journal of Mathematical Analysis and Applications (40 punktów na liście M.N.i Sz.W.), II w Journal of Appl. Analysis (8 punktów), IV w Integral Equations Operator Theory (25 punktów), V i VI w Applied Mathematics and Computation (35 punktów). Wszystkie prace są współautorskie z dr hab. Januszem Morawcem. Są one dość krótkie, każda poniżej 10 stron.

Przejdę teraz do omówienia głównych wyników rozprawy. Dotyczą one równania skalującego (S_1) (str 2, zwanego także jako *refinement equation*) i jego uogólnień w postaci dwukierunkowego równania skalującego (S_2) oraz innych równań podobnego typu, patrz $(S_3) - (S_6)$. Równania te pojawiają się np w analizie harmonicznej, gdzie użyte mogą być do zdefiniowania falek.

T. K.

W pierwszej części rozprawy, Twierdzenia 2-3 i Stwierdzenie 3, habilitant przedstawia wyniki nawiązujące do Twierdzenia Daubechis (Twierdzenie 1) o istnieniu rozwiązania równania (S_1) w sytuacji, gdy jego współczynniki (c_n) są nieujemne i spełniają hipotezę (ii) z wypowiedzi Twierdzenia 1. Przy założeniu, iż istnieje "moment" rzędu $\delta > 0$ dla współczynników równanie (S_1) dopuszcza wówczas co najwyżej jedno rozwiązanie w przestrzeni L^1. Okazuje się, patrz Twierdzenie 2 pochodzące z pracy III, iż podobny wynik dla równań typu $(S_2) - (S_6)$ można sformułować przy nieco słabszym założeniu o istnieniu logarytmicznego momentu dla współczynników. Twierdzenie 3 podaje postać transformaty Fouriera rozwiązania równania (S_6), zaś Stwierdzenie 3 formułuje równania jakie spełnia dystrybuanta odpowiadająca rozwiązaniu równania (S).

W dalszej części rozprawy, patrz Twierdzenia 6, 8-10, badane jest równanie (8), które jest uogólnieniem równania skalującego (S). Równanie to spełnia dystrybuanta, zdefiniowana jako całka funkcji absolutnie sumowalnej będącej rozwiązaniem (S_5). Twierdzenie 6 zawiera charakteryzację zbioru rozwiązań ciągłych (singularnych albo absolutnie ciągłych) równania (8). W przypadku gdy rozwiązanie jest absolutnie ciągłe, a jego pochodna jest absolutnie sumowalna, jest ona rozwiązaniem równania (S_5). Dowód Twierdzenia 6 opiera się na wyniku Grincevičjusa z pracy [28]. Twierdzenie 8 dotyczy istnienia absolutnie ciągłego rozwiązania równania (S_3) w przypadku gdy rozkład zmiennej losowej M w nim występującej jest absolutnie ciągły (chociaż w sformułowaniu wyniku mówi się tylko o jego ciągłości!). Pewne warunki dostateczne dla istnienia absolutnie ciągłego rozwiązania z gęstością w $L^1(\mathbb{R})$ podane są w Twierdzeniach 9 i 10. W Twierdzeniu 9 warunkiem tym jest znikanie transformaty Fouriera ciągłego rozwiązania równania (11) w punktach będących całkowitymi krotnościami 2π poza zerem. Należy tu jednak zaznaczyć, iż jednym z podstawowych narzędzi dla otrzymania Twierdzenia 9 jest Lemat 3 z pracy V. Protasova [48], który nie został tu zacytowany. Wspomniano zaś o innym wyniku, mianowicie Lemacie 2, pochodzącym z powyższej pracy. Lematy te są cytowane w pracy III jako Lemma 4.1 i Lemma 4.2.

W Twierdzeniu 10 scharakteryzowano istnienie L^1 rozwiązania równania (11) w terminach własności drzewa, którego wierzchołkami są punkty postaci $2\pi \sum_{n=1}^{N} d_n/k^n$, gdzie k jest parametrem występującym w równaniu skalującym (jest on liczbą naturalną), zaś $d_1, \dots, d_N \in \{0, \dots, k-1\}$. Załóżmy, iż $\mathcal{V}$ jest podzbiorem wierzchołków drzewa jaki tworzą zera funkcji m_ε, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

T.K.

W pracy [48] pokazano, iż istnienie rozwiązania w L^1 dla równania odpowiadającego (11) w przypadku jednokierunkowym może być scharakteryzowane poprzez własność blokowania zbioru $\mathcal{V}$, patrz warunek (B) w [48]. Twierdzenie 10 formułuje odpowiedni wynik dla równania dwukierunkowego. W tym przypadku warunkiem charakteryzującym istnienie L^1 rozwiązań dla równania dwukierunkowego jest własność słabego blokowania zbioru zer funkcji $m_\varepsilon, \varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Pozostała część rozprawy Twierdzenia 11-15 dotyczy związków pomiędzy rozpatrywanymi wcześniej równaniami funkcyjnymi, a zagadnieniem asymptotycznej stabilności iterowanych układów funkcyjnych oraz problemem punktu stałego dla afinicznej funkcji losowej. Istnieje dość naturalny związek pomiędzy problemem znalezienia rozwiązania równania (S_5), lub też jego uogólnienia w terminach dystrybuant, a zagadnieniem miar niezmienniczych dla iterowanych układów funkcyjnych. Ten ostatni problem badany był przez wielu autorów. W tym kontekście wspomnieć należy o wynikach M. Barnsleya, S. Demko, A. Lasoty, M. Mackeya, J. Myjaka, R. Rudnickiego oraz T. Szarka. Używając technik właściwych dla teorii iterowanych układów funkcyjnych, a pochodzących głównie z prac profesorów A. Lasoty, J. Myjaka i T. Szarka, habilitant podaje warunki dostateczne dla istnienia rozwiązania równania (S_5), patrz Twierdzenia 11 i 12 pochodzące z pracy IV. W pracy VI autor formułuje szereg wyników, Twierdzenia 13-15, które pokazują, iż rozwiązanie równania (S_5) równoważne jest istnieniu punktu stałego, w sensie rozkładu, dla pewnej afinicznej transformacji wektora losowego.

A.2 Podsumowanie.

Podsumowując, muszę przyznać, iż po lekturze rozprawy habilitacyjnej mam nieco mieszane odczucia. Tematyka, którą zajmuje się habilitant, związana z problemem istnienia rozwiązania równania skalującego, jest ciekawa i może stanowić przedmiot zastosowania technik pochodzących z różnych dziedzin matematyki. Habilitant jest z pewnością osobą o dużej kulturze matematycznej. W swoich pracach stosuje metody wywodzące się z analizy harmonicznej (teoria falek), teorii fraktali i operatorów Markowa, a także z klasycznej teorii prawdopodobieństwa (teoria perpetuit). Habilitant zna te techniki i potrafi je zastosować co wzbudza mój podziw.

Słabszą stroną habilitacji jest fakt, iż na ogół stosowane są wyniki wywodzące się z prac innych autorów bez ich znaczniejszego pogłębienia. Znajduje to odzwierciedlenie w długości prac

T.K.

wchodzących w skład rozprawy. Żadna z nich nie przekracza 10 stron. Pewnym mankamentem jest też fakt, iż habilitant nie włączył do rozprawy ani jednej pracy samodzielnej. Ułatwiałoby mi to ocenę jego samodzielności naukowej. Komentując styl redakcji rozprawy habilitacyjnej muszę też przyznać, iż pozostawia on sporo do życzenia. Mam wrażenie, iż niektóre wypowiedzi wyników z rozprawy odbiegają nieco od sformułowań z publikacji, z których pochodzą, a inne nie są precyzyjnie podane. Np w Twierdzeniu 2 autor nie wspomina o założeniu (1.4) z publikacji (III), które, o ile się nie mylę, pełni jednak rolę w dowodzie cytowanego w tym miejscu Corollary 2.2 na str 395. Wypowiedź Twierdzenia 3 jest nieprecyzyjna. Ze sformułowania podanego w autoreferacie wydaje się wynikać, iż habilitant twierdzi, że zachodzić będzie zbieżność odpowiedniego szeregu funkcyjnego prawie na pewno, w topologii $L^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^q)$, podczas gdy chodzi o zbieżność w sensie L^1 względem losowego parametru ω (dr Kapica wyjaśnił mi to podczas rozmowy z nim przeprowadzonej). Z kolei w Twierdzeniu 8 autor ma na myśli (wiem to z rozmowy z habilitantem), iż zmienna losowa M tam występująca ma rozkład absolutnie ciągły, a nie tylko ciągły jak to jest napisane w wypowiedzi wyniku. Zmienia to istotnie siłę tego rezultatu (wynik dla singularnych rozkładów byłby o wiele bardziej interesujący).

Kończąc tą część mojej recenzji wydaje mi się, że pomimo słów krytyki, które zmuszony byłem wyrazić pod adresem rozprawy habilitacyjnej dr R. Kapicy, wyniki w niej uzyskane wystarczają do sformułowania pozytywnej oceny tej rozprawy.

B. Ocena pozostałego dorobku naukowego.

W skład dorobku habilitacyjnego dr R. Kapicy, nie będącego częścią rozprawy, wchodzi 14 prac. Prace [2], [4], [6], [7], [9], [12], [14] ukazały się w czasopismach indeksowanych przez Thomson Reuters w SCIENCE CITATION INDEX. Artykuły [1] – [8] są samodzielnymi pracami habilitanta, w trzech pracach występuje on z 1 współautorem, a w pozostałych trzech z dwoma współautorami.

Dorobek naukowy dr R. Kapicy podzielić można na 4 części odpowiadające dość znacznie różniącym się tematom badawczym. Większość, bo aż 11 prac dotyczy dynamiki zadanej iterowanym

T. K.

układem funkcyjnym, lub też przez losowy układ dynamiczny na ośrodkowych przestrzeniach metrycznych. Trzy prace dotyczą teorii równań funkcyjnych, co stanowi kontynuację tematyki badawczej rozprawy habilitacyjnej, dwie ergodycznej teorii procesów Markowa, zaś jedna teorii martyngałów na kratach Banacha. Moją szczególną uwagę przyciągnęła praca [12] habilitanta z prof. T. Szarkiem i dr M. Ślęczką. Dotyczy ona półgrup operatorów Markowa na przestrzeniach polskich posiadających e-własność, t.j. trajektoria półgrupy dla danej funkcji lipschitzowskiej jest równociągła w otoczeniu dowolnego punktu przestrzeni fazowej. Pojęcie to pojawiło się w pracy profesorów A. Lasoty i T. Szarka [LS06]. W mojej wspólnej pracy z profesorami S. Peszatem i T. Szarkiem [KPS10] pokazaliśmy, iż jeśli taka własność zachodzi i półgrupa "nie wymiata" z dowolnego otoczenia pewnego punktu to dopuszcza ona jedyną probabilistyczną miarę niezmienniczą. Wynik jaki uzyskano w pracy [12], patrz Theorem 1, str 596, mówi o tym, że przy założeniu e-wlasności, ale bez założenia o niewymiataniu, każde dwie probabilistyczne miary niezmiennicze muszą mieć rozłączne nośniki. Jeśli dodamy jeszcze pewne założenie nieredukowalności (*weak irreducibility*) to otrzymujemy Theorem 2, str 596, o tym, iż istnieje co najwyżej jedna taka miara. Jest to eleganckie uogólnienie klasycznego wyniku Hasminskiego dla mocno fellerowskich, nieredukowlanych półgrup operatorów Markowa [H60].

Oceniając dorobek naukowy dr R. Kapicy zwraca uwagę jego szeroki zakres. Jak już to podkreśliłem w ocenie rozprawy habilitanta znaczne wrażenie zrobiła na mnie duża kultura matematyczna habilitanta. Podsumowując, uważam, iż dorobek ten jest więcej niż wystarczający do nadania mu stopnia doktora habilitowanego.

C. Konkluzja.

Podsumowując, uważam, iż mimo pewnych uwag krytycznych, zwłaszcza dotyczących rozprawy habilitacyjnej, zarówno ta rozprawa jak i pozostały dorobek naukowy dr Rafała Kapicy wystarczają do tego by nadać mu stopień doktora habilitowanego.

T. Komorowski

Lublin, 6 luty, 2014 r. Tomasz Komorowski

Bibliografia

[H60] Khasminski, R.Z.: *Ergodic properties of recurrent diffusion processes and stabilization of the solutions to the Cauchy problem for parabolic equations*. Theory Probab. Appl. 5, 179–196 (1960)

[KPS10] Komorowski, T., Peszat, S., Szarek, T.: *On ergodicity of some Markov processes*. Ann. Probab. 38(4), 1401–1443 (2010)

[LS06] Lasota, A., Szarek, T.: *Lower bound technique in the theory of a stochastic differential equation*. J. Differ. Equ. 231, 513–533 (2006)

Tik.