Autoreferat

1. **Imię i nazwisko:** Rafał Kapica

2. **Posiadane dyplomy**

   (a) Dyplom magistra matematyki (specjalność teoretyczna) uzyskany 12 czerwca 1998 roku na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach. Tytuł pracy magisterskiej: *Reprezentacja operatorów słabo zwartych*; promotor: prof. dr hab. Karol Baron.

   (b) Dyplom doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki uzyskany 16 września 2003 roku w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach. Tytuł rozprawy doktorskiej: *Iteracje funkcji o wektorowych wartościach losowych i równanie* $\varphi(x) = \int_\Omega \varphi(f(x,\omega))P(d\omega)$ *z nimi związane*; promotor: prof. dr hab. Karol Baron.

3. **Zatrudnienie w jednostkach naukowych**

   (a) od 1.9.2004 adiunkt w Zakładzie Analizy Rzeczywistej Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach (etat)

   (b) od 1.10.2000 do 31.9.2004 asystent w Zakładzie Analizy Rzeczywistej Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach (połowa etatu)

   (c) od 1.10.1998 do 31.9.1999 asystent w Zakładzie Analizy Rzeczywistej Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach (etat)

4. **Wskazanie osiągniecia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule naukowym zakresie sztuki:** jednotematyczny cykl sześciu publikacji

   (a) Tytuł: Równania typu skalującego a inne obiekty

   (b) Publikacje stanowiące cykl

      [I] Rafał Kapica, Janusz Morawiec, *Probability distribution functions of the Grincevičjus series*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 342 (2008), 1380–1387.

      [II] Rafał Kapica, Janusz Morawiec, *On a refinement type equation*, Journal of Applied Analysis 14 (2008), 251–257.

      [III] Rafał Kapica, Janusz Morawiec, *Refinement type equations and Grincevičjus series*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 350 (2009), 393–400.

- [IV] Janusz Morawiec, Rafał Kapica, *Refinement equations and Feller operators*, Integral Equations Operator Theory 70 (2011), 323–331.
- [V] Rafał Kapica, Janusz Morawiec, *Matrix refinement type equations*, Applied Mathematics and Computation 217 (2011), 8311–8317.
- [VI] Rafał Kapica, Janusz Morawiec, *Refinement equations and distributional fixed points*, Applied Mathematics and Computation 218 (2012), 7741–7746.

(c) Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

Wprowadzenie

Centralnym przedmiotem rozważań niniejszej analizy są równania typu skalującego. Na początku przedstawimy kilka rodzajów tych równań, wskazując na ich występowanie w bogatej literaturze przedmiotu. Rozważając równania typu skalującego, już w części wstępnej będziemy starać się ukazać ich naturalne powiązania z różnego rodzaju obiektami matematycznymi. Podamy tutaj pewne szczegóły dotyczące występowania równań skalujących w kontekście baz ortonormalnych, schematów podziałowych czy funkcji specjalnych. Skoncentrujemy się przy tym na przypadkach klasycznych, które są prostsze do omówienia, a jednocześnie stanowiły klarowną motywację do badania ogólniejszych równań. Podstawowym celem było bowiem zbadanie możliwości rozwiązania równań typu skalującego poprzez uwypuklenie ich związków z innymi obiektami matematycznymi, bądź ich wykorzystanie. Niesprecyzowanie w tytule rzeczonych obiektów, tłumaczone w zarysowanej perspektywie badawczej ich wtórnym do głównego przedmiotu badań charakterem, pozwala oczekiwać na pewną ich mnogość. Istotnie, różnorodność powiązań równań typu skalującego z wybranymi obiektami matematycznymi, przedstawiona we wstępnym rozdziale, będzie miała swój dalszy ciąg w głównej części omówienia. Podamy tutaj między innymi charakteryzację rozwiązań takich równań poprzez miary niezmiennicze operatorów Markowa, punkty stałe afinicznych funkcji losowych czy zbiory blokujące. Wespół z tymi obiektami równie ważną rolę w badaniu równań skalujących odgrywać będą dystrybuanty i transformaty potencjalnych rozwiązań, którym poświęcimy części drugą i trzecią tego omówienia.

Rodzaje równań skalujących i ich występowanie

Klasycznym *równaniem skalującym*, zwanym również równaniem dylatacji lub równaniem falek, nazywamy równanie postaci

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n f(kx-n), \tag{S$_1$}$$

gdzie $k \geqslant 2$ jest ustaloną liczbą naturalną, a współczynniki c_n (najogólniej zespolone) spełniają warunek $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n = k$. Funkcję f będącą rozwiązaniem tego równania nazywa się *funkcją skalującą*. Równanie (S$_1$) występuje między innymi w teorii falek (zob. np. [7, 10, 11, 12, 66]) i funkcji giętych (zob. np. [5, 8, 17, 54]), w schematach podziałowych w teorii aproksymacji (np. [4, 18, 43, 45]), w kombinatorycznej teorii liczb (zob. [49]), w teorii falek wielowymiarowych (zob. np. [3, 22, 31]) oraz w zastosowaniach pozamatematycznych, np. w grafice komputerowej (w kompresji obrazów (zob. [27])) czy fizyce, w badaniach chaotyczności struktur amorficznych (zob. [15, 23, 53]).

Znaczenie równania skalującego ukazuje nam dobrze klasyczny już rezultat, łączący wyniki I. Daubechies [9, 10] i S. Mallata [42], wiążący falki i analizy wieloskalowe. Jego sformułowanie (które można wygodnie wydobyć z monografii I. Daubechies [10, Chapter 5], jak i z książki P. Wojtaszczyka [61, Rozdział 3]) poprzedzimy koniecznymi definicjami. Przez *falkę* rozumiemy taką funkcję $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, że rodzina funkcji (zmiennej $t \in \mathbb{R}$)

$$\{2^{j/2}\psi(2^j t - n) : j, n \in \mathbb{Z}\}$$

jest bazą ortonormalną przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$. *Analizą wieloskalową* nazywamy zaś ciąg $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ domkniętych podprzestrzeni liniowych przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$ spełniający warunki: $V_j \subset V_{j+1}$ dla każdego $j \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{cl}\operatorname{lin}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$; $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$; $f \in V_j$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(2^{-j}t) \in V_0$ dla każdego $j \in \mathbb{Z}$; istnieje funkcja $\phi \in V_0$, zwana skalującą, o tej własności, że rodzina $\{\phi(t-n) : n \in \mathbb{Z}\}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni V_0.

Załóżmy, że $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ jest takim rozwiązaniem równania (S_1) z $k = 2$, że dla pewnych liczb $0 < a \leqslant A < +\infty$ zachodzą nierówności

$$a \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(\omega + 2\pi n)\right|^2 \leqslant A \qquad \text{dla p.w. } \omega \in \mathbb{R}.$$

Wtedy ciąg przestrzeni $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ określony wzorem

$$V_j = \operatorname{cl}\operatorname{lin}\{f(2^j t - n) : n \in \mathbb{Z}\}$$

jest analizą wieloskalową. Niech ϕ oznacza (dowolną) funkcję skalującą tej analizy. Funkcja ta również spełnia klasyczne równanie skalujące (z innymi być może współczynnikami c_n niż te, które mieliśmy w równaniu (S_1)) i jeżeli

$$\psi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^{n-1}\overline{d_{-n-1}}\phi(2x - n),$$

gdzie $d_n = \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{x}{2}\right)\overline{\phi(x-n)}dx$ dla $n \in \mathbb{Z}$, to ψ jest falką.

Innym przykładem zagadnienia, w którym występują równania skalujące są tak zwane schematy podziałowe. Schematy te stanowią efektywną metodę generowania krzywych i powierzchni (zob. np. [1, 19, 52]). W pewnym przybliżeniu ideę schematu podziałowego można wyjaśnić w następujący sposób: Załóżmy, że mamy ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ zwany maską schematu podziałowego i początkową sekwencję danych w postaci ciągu $v^0 = (v_l^0)_{l\in\mathbb{Z}}$. Wówczas definiujemy rekurencyjnie nowe ciągi danych

$(v^n)_{n\in\mathbb{N}} = \Big((v_l^n)_{l\in\mathbb{Z}}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ (zgodnie z regułą zwaną *the refinement rule*) wzorem

$$v_l^n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_{l-2m} v_m^{n-1}$$

dla wszystkich $l \in \mathbb{Z}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Okazuje się, że pod pewnymi założeniami ciąg danych $(v^n)_{n\in\mathbb{N}}$ startujący z $v^0 = (\delta_{0,l})_{l\in\mathbb{Z}}$ jest zbieżny do całkowalnej funkcji gładkiej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w następującym sensie

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{l\in\mathbb{Z}} |f(2^{-l}n) - v_l^n| = 0.$$

Krzywa f będąca tą granicą jest rozwiązaniem klasycznego równania skalującego z $k = 2$. Ponadto, dla każdego początkowego układu danych $v^0 \in l^\infty(\mathbb{Z})$, ciag danych $(v^n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do krzywej f_0, którą można zapisać w postaci sumy $f_0(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} v_l^0 f(x-l)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, gdzie f jest otrzymaną wyżej krzywą gładką (zob. np. [4, 44]).

Prostym uogólnieniem klasycznego równania skalującego jest tak zwane *dwukierunkowe równanie skalujące*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n,1} f(kx-n) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n,-1} f(-kx-n), \tag{S$_2$}$$

w którym współczynniki spełniają warunek $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(c_{n,-1} + c_{n,1}) = k$, a k jest ustaloną liczbą dodatnią. Ten rodzaj równania skalującego, intensywnie badanego od poprzedniego dziesięciolecia, ma związek z konstrukcjami falek dwukierunkowych, falek biortogonalnych a także ramek falkowych (zob. np. [41, 62, 63, 65]). Równanie to (podobnie jak klasyczne) pozwala charakteryzować pewne funkcje specjalne. Mamy mianowicie następujący fakt (zob. [11, 12]):

Stwierdzenie 1. *Niech $a \in (-1,1)$, $f_{a,0}(x) = \max\{1-|x|, 0\}$ i $f_{a,n+1}(x) = f_{a,n}(3x) + \frac{1-a}{2}(f_{a,n}(-3x-1) + f_{a,n}(3x+1)) + \frac{1+a}{2}(f_{a,n}(-3x-2) + f_{a,n}(3x+2))$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Wówczas ciąg $(f_{a,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej f_a, która jest jedynym (z dokładnością do stałej multiplikatywnej) całkowalnym rozwiązaniem dwukierunkowego równania skalującego*

$$f_a(x) = f_a(3x) + \frac{1-a}{2}\Big(f_a(-3x-1) + f_a(3x+1)\Big) + \frac{1+a}{2}\Big(f_a(-3x-2) + f_a(3x+2)\Big).$$

Co więcej: $f_{\frac{1}{3}}$ jest funkcją de Rhama[1]*; f_0 jest funkcją osobliwą, zawierającą funkcję Cantora na przedziale $[-1,0]$, a na przedziale $[0,1]$ jest jej lustrzanym odbiciem; $f_{-\frac{1}{3}}$ jest funkcją giętą pierwszego rzędu*[2]*.*

---

[1] Jest to funkcja nigdzie nieróżniczkowalna, zwana również funkcją osobliwą Lebesgue'a (zob. [36, 51]).

[2] Funkcje gięte pierwszego rzędu to kawałkami liniowe funkcje ciągłe.

Innym rozszerzeniem klasycznego równania skalującego jest równanie postaci

$$f(x) = \int_{\Omega} |\alpha| f(\alpha x - M(\omega)) P(d\omega), \tag{S$_3$}$$

gdzie α jest ustaloną różną od zera liczbą rzeczywistą, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ jest przestrzenią probabilistyczną, a $M : \Omega \to \mathbb{R}$ jest funkcją $\mathcal{A}$-mierzalną. Rzeczywiście, zakładając że współczynniki c_n są nieujemne i sumują się do k oraz przyjmując

$$\Omega = \mathbb{Z}, \quad P(n) = \frac{c_n}{k} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{Z},$$

widzimy, że równanie (S$_3$) przyjmuje postać tak zwanego równania dwuskalującego[3)]

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n f(kx - M(n)), \tag{1}$$

które w przypadku, gdy $M(n) = n$ dla $n \in \mathbb{Z}$, jest klasycznym równaniem skalującym. Kładąc z kolei

$$\Omega = \mathbb{R}, \quad P(A) = \frac{1}{|\alpha|} \int_A c(y)dy \quad \text{dla } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad M(x) = x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

gdzie nieujemna, mierzalna funkcja c spełnia warunek $\int_{\mathbb{R}} c(y)dy = |\alpha|$, widzimy, że równanie (S$_3$) redukuje się do równania postaci

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} c(y) f(\alpha x - y) dy. \tag{S$_4$}$$

Jest to tak zwane ciągłe równanie skalujące. Równanie to ma także wiele zastosowań; badane było m.in. w [6, 26, 35] oraz [14]. Podobnie jak (S$_1$), także to równanie można wykorzystać do konstrukcji schematów podziałowych. Tutaj, analogicznie jak w przypadku konstrukcji baz falkowych, gdzie dobiera się odpowiednie współczynniki c_n, poszukuje się stosownej funkcji c. Z tej perspektywy można więc powiedzieć, że rozpatrując równanie (S$_3$) zmienną jest miara P, przy zadanym parametrze α (w zastosowaniach równym najczęściej 2). Sytuacja odmienna ma miejsce w problemie Erdősa (patrz komentarz po Uwadze 2), w którym ustalona jest miara $P = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$, a zmienia się α. Takie spojrzenia na równanie (S$_3$) dodatkowo motywują do rozważania jego naturalnych uogólnień.

Ustalmy zatem liczbę naturalną m, zupełną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ oraz $\mathcal{A}$-mierzalne funkcje $L\colon \Omega \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $M\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ i rozważmy równanie

$$f(x) = \int_{\Omega} |\det L(\omega)| f(L(\omega)x - M(\omega)) P(d\omega). \tag{S$_5$}$$

Zakładając od tej pory, że współczynniki występujące w klasycznym równaniu skalującym jak i w dwukierunkowym równaniu skalującym są nieujemne zauważamy,

3) Taka nazwa pojawia się np. w pracy [11]. Klasyczne równanie skalujące nazywane jest tam kratowo dwuskalującym; takie określenia są jednak mniej popularne.

że równanie (S_5) uogólnia równania (S_1)–(S_4). Występująca w nim funkcja losowa $\varphi\colon \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ dana wzorem $\varphi(x,\omega) = L(\omega)x - M(\omega)$ (funkcje tej postaci nazywać będę dalej *afinicznymi funkcjami losowymi*) ma następujące własności:

(i) jeżeli $\det \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\omega) \neq 0$, to $\varphi(\cdot,\omega)$ jest dyfeomorfizmem na $\mathbb{R}^m$;

(ii) $\varphi(x,\cdot)$ jest $\mathcal{A}$-mierzalna dla każdego $x \in \mathbb{R}^m$;

(iii) $(l_m \otimes P)(\varphi^{-1}(B)) = 0$ dla każdego $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ takiego, że $l_m(B) = 0$.[4)]

Powyższe własności afinicznej funkcji losowej φ pozwalają rozpatrywać rozwiązania równań skalujących postaci (S_5) w przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^m)$ funkcji całkowalnych. Dlatego też zastępując afiniczną funkcję losową dowolną funkcją $\varphi\colon \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ o własnościach (i)–(iii), możemy rozważać jeszcze ogólniejsze równanie

$$f(x) = \int_\Omega \left|\det \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\omega)\right| f(\varphi(x,\omega))P(d\omega). \tag{S}$$

(Szczegółową analizę warunków, dla których równanie (S) z $m = 1$ ma sens w $L^1(\mathbb{R})$ zawiera praca [II]). Powiemy wówczas, że element f przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^m)$ jest L^1-rozwiązaniem równania (S), gdy każdy jego reprezentant (oznaczamy go tym samym symbolem f) spełnia równanie (S) dla l_m-p.w. $x \in \mathbb{R}^m$.

Przegląd[5)] równań typu skalującego zakończymy na macierzowym równaniu skalującym, będącym odpowiednikiem równania (S_5). Jest to równanie postaci

$$f(x) = \int_\Omega |\det L(\omega)| C(\omega) f(L(\omega)x - M(\omega))P(d\omega), \tag{S_6}$$

gdzie $L : \Omega \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $M : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $C : \Omega \to \mathbb{R}^{q\times q}$ są funkcjami $\mathcal{A}$-mierzalnymi, a q jest ustaloną liczbą naturalną. Przykładem macierzowego równania skalującego z macierzowymi współczynnikami d_n jest równanie postaci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} d_n f(2x - n), \tag{3}$$

stanowiące główny przedmiot badań pracy [31]. Warto odnotować, że obok prac, w których równania macierzowe występują samodzielnie są i takie, w których specjalne wersje równania (S_6) z macierzą C stopnia 2 były wykorzystywane do badania dwukierunkowych równań skalujących (zob. [63, 64]).

Wszystkie równania (S_1)–(S_6) jak i (S) nazywać będziemy skalującymi. Rozważać będziemy L^1-rozwiązania tych równań tj. elementy przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^m)$ (a w przypadku wielowymiarowym elementy $L^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^q)$). Zauważmy, że zbiór wszystkich L^1-rozwiązań dowolnego równania skalującego jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^m)$ (odp. $L^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^q)$).

---

4) Tu i dalej l_m oznacza m-wymiarową miarę Lebesgue'a, zaś $\mathcal{B}(X)$ rodzinę wszystkich podzbiorów borelowskich danej przestrzeni metrycznej X.

5) Obok rozważanych tutaj równań jednorodnych badane są również niejednorodne równania skalujące (zob. np. prace [33, 58]).

Transformaty

Naturalnym narzędziem w analizie równań skalujących są różnego rodzaju transformaty. Wspomnimy tutaj o transformacie Fouriera-Stieltjesa[6]; głównie zaś omówimy zastosowanie transformaty Fouriera[7], która ma znaczenie zarówno dla badania L^1-rozwiązań jak również rozwiązań dystrybucyjnych[8]. W tym kontekście, jak pisze C. Heil i D. Colella w pracy [31], kluczową rolę odgrywa fakt, że transformata Fouriera przekształca równanie skalujące do równoważnej postaci. Tę równoważną formę można odczytać, jednakże nie bezpośrednio, używając również transformaty Fouriera-Stieltjesa, czego przykładem jest [I, Lemma 1]. Rezultat ten, wykorzystujący w dowodzie twierdzenie o aproksymacji dowolnych rozkładów miarami dyskretnymi oraz twierdzenie typu Helly'ego dla transformaty Fouriera-Stieltjesa, dotyczy bowiem nie samego rozwiązania równania skalującego a jego dystrybuanty (o tego rodzaju związkach traktować będzie następny rozdział). Bezpośrednie zaś zastosowanie transformaty Fouriera zawiera [V, Proposition 2.1], podające równoważną postać macierzowego równania skalującego. Dla sformułowania tego i następnego wyniku z pracy [V] oznaczmy symbolem Δ zbiór $\{\omega \in \Omega : \det L(\omega) \neq 0\}$.

Stwierdzenie 2. *Niech $f \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^q)$. Wówczas f jest L^1-rozwiązaniem równania* (S_6) *wtedy i tylko wtedy, gdy*[9]

$$\widehat{f}(x) = \int_\Delta e^{ix\cdot L(\omega)^{-1}M(\omega)} C(\omega)\widehat{f}\Big(L(\omega)^{-1^T}x\Big)P(d\omega)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}^m$.

Ze stwierdzenia tego wynika prosty fakt.

Uwaga 1. *Niech $||D||_* = \sup\{|Dx|_* : x = (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q, |x|_* := |x_1| + \cdots + |x_q| = 1\}$ dla $D \in \mathbb{R}^{q\times q}$. Jeżeli istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że*

$$\int_{\Delta^N} \Big|\Big| \prod_{n=1}^N C(\omega_n) \Big|\Big|_* (P \otimes \cdots \otimes P)(d(\omega_1, \ldots, \omega_N)) < 1,$$

to równanie (S_6) *nie ma nietrywialnych L^1-rozwiązań. W szczególności, jeżeli $q = 1$, $C(\omega) = 1$ dla $\omega \in \Omega$ i $P(\Delta) < 1$, to równanie* (S_5) *nie ma nietrywialnych L^1-rozwiązań.*

---

[6] Przez transformatę Fouriera-Stieltjesa funkcji $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o ograniczonym wahaniu rozumieć będziemy funkcję $\hat{\varphi}(x) = \int_\mathbb{R} e^{-ixt} d\varphi(t)$.

[7] Przez transformatę Fouriera elementu $f \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^q)$ rozumieć będziemy funkcję $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{ix\cdot t} f(t)dt$, gdzie $\cdot$ oznacza iloczyn skalarny.

[8] Przez rozwiązanie dystrybucyjne rozumie się dystrybucję temperowaną. Taka dystrybucja Υ jest rozwiązaniem równania (3), gdy $\Upsilon\varphi = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^N d_n \Upsilon\varphi(\frac{x+n}{2})$ dla każdej funkcji próbnej φ. Dla przykładu: jedynym rozwiązaniem dystrybucyjnym równania $f(x) = 2f(2x)$ (które nie ma nietrywialnych L^1-rozwiązań) jest delta Diraca skupiona w zerze.

[9] Symbolem A^T oznaczamy macierz transponowaną do A.

Badając zatem istnienie L^1-rozwiązań równań skalujących zakładać będziemy, że macierz $L(\omega)$ jest nieosobliwa (albo ogólniej $\varphi(\cdot, \omega)$ jest dyfeomorfizmem na $\mathbb{R}^m$) dla każdego $\omega \in \Omega$. Fakt ten nawiązuje m. in. do [11, Theorem 2.1.(a)] (dotyczącego równania (1) z zespolonymi współczynnikami c_n), które w odniesieniu do klasycznego równania skalującego i po uwzględnieniu [11, Remark (1)] podaje następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 1. *Niech $k \in (1, \infty)$ i załóżmy, że*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n |n|^\delta < \infty \tag{3}$$

dla pewnego $\delta \in (0, +\infty)$.

(i) *Jeżeli $\frac{1}{k} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_n < 1$, to równanie* ($S_1$) *nie ma nietrywialnych L^1-rozwiązań.*

(ii) *Jeżeli $\frac{1}{k} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_n = 1$, to przestrzeń rozwiązań równania* (S_1) *jest co najwyżej jednowymiarowa.*

Rozszerzeniem drugiej części powyższego wyniku jest następujący rezultat, w którym zbieżność szeregu (3) zastąpiono słabszym warunkiem z momentem logarytmicznym.

TWIERDZENIE 2 [III, Corollary 2.2]. *Jeżeli*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (c_{n,-1} + c_{n,1}) \log |n| < \infty, \tag{4}$$

to przestrzeń rozwiązań dwukierunkowego równania skalującego (S_2) *jest co najwyżej jednowymiarowa. Ponadto, każde L^1-rozwiązanie tego równania jest stałego znaku (p.w.).*

Analogiczne twierdzenie zachodzi również, po odpowiednim przeformułowaniu założeń, dla ogólniejszych od (1) równań postaci

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{n,1} f(kx - M(n)) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{n,-1} f(-kx - M(n)).$$

Znacznie ogólniejszy rezultat dla macierzowych równań skalujących głosi, że wymiar przestrzeni rozwiązań równania (S_6) nie przekracza liczby q (zob. [V, Corollary 3.4]). Wymaga on jednak, jak zobaczymy, przyjęcia bardziej skomplikowanych założeń, pozwalających otrzymać postać transformaty Fouriera potencjalnych rozwiązań. Niech zatem Ψ będzie funkcją daną wzorem[10)]

$$\Psi(y) = \int_0^y P(\{\omega \in \Omega : -\log \sup\{||L(\omega)^{-1} z|| : z \in \mathbb{R}^m, ||z|| = 1\} > x\}) dx \quad \text{dla } y \geqslant 0$$

i niech $L(\omega)^{-1} = [a_{ij}(\omega)]_{i,j=1,\ldots,m}$, a $P_{L^{-1}M}$ niech oznacza rozkład zmiennej losowej $||L(\omega)^{-1} M(\omega)||$. Rozważmy następujące założenia:

[10)] Występująca tu i dalej norma $||\cdot||$ oznacza normę euklidesową.

$$(\mathbf{H}_1)\quad P(||L^{-1}M||=0)<1,\quad \int_1^\infty \frac{\log x}{\Psi(\log x)} P_{L^{-1}M}(dx)<\infty,$$

$$-\infty<\int_\Omega \max_{i,j=1,\dots,m}|a_{ij}(\omega)|P(d\omega)\quad \text{oraz}\quad \int_\Omega \log\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m |a_{ij}(\omega)|^2 P(d\omega)<0.$$

($\mathbf{H}_2$) wszystkie macierze $C(\omega)$ są kolumnowo stochastyczne i spełniają jednostajny warunek Doeblina w Ω, tj. istnieje taka stała dodatnia c, że

$$\sum_{i=1}^q \min\{C_{i1}(\omega),\dots,C_{iq}(\omega)\}\geqslant c\quad \text{dla } \omega\in\Omega.$$

Założenie **($\mathbf{H}_1$)** gwarantuje zbieżność stosownego szeregu zmiennych losowych (omówionych dalej w rozdziale pt. "Perpetuity"). Warunek **($\mathbf{H}_2$)** zapewnia z kolei (zob. [57, Theorem 1]) zbieżność ciągu iloczynu $(C(\omega_1)\cdot\ldots\cdot C(\omega_n))_{n\in\mathbb{N}}$ macierzy dla każdego parametru $\omega=(\omega_1,\omega_2,\dots)\in\Omega^\infty:=\Omega\times\Omega\times\dots$ Można go zastąpić innym, zapewniającym np. zbieżność według rozkładu (którą zakładamy w [V, Theorem 3.3]).

Twierdzenie 3 [V, Theorem 3.1]. *Przyjmijmy* **($\mathbf{H}_1$)** *i* **($\mathbf{H}_2$)**. *Załóżmy dalej, że* $f\in L^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^q)$ *i niech*

$$L_k^{-1}(\omega)=L(\omega_k)^{-1},\quad M_n(\omega)=M(\omega_n),\quad C_n(\omega)=C(\omega_n)$$

dla $\omega=(\omega_1,\omega_2,\dots)\in\Omega^\infty$. *Wówczas ciąg*

$$\left(\exp\left\{ix\cdot\sum_{n=1}^N\Big(\prod_{k=1}^n L_k^{-1}\Big)M_n\right\}\prod_{n=1}^N C_n\widehat{f}\bigg(\Big(\prod_{n=1}^N L_n^{-1}\Big)^T x\bigg)\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

jest zbieżny p.n. i w $L^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^q)$. *Ponadto* f *jest* L^1*-rozwiązaniem równania* (S_6) *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\widehat{f}(x)=\int_{\Omega^\infty}\exp\left\{ix\cdot\sum_{n=1}^\infty\Big(\prod_{k=1}^n L_k^{-1}\Big)M_n\right\}\prod_{n=1}^\infty C_n\widehat{f}(0)\,dP^\infty \tag{5}$$

dla każdego $x\in\mathbb{R}^m$.

Otrzymana tutaj formuła (5) stanowi uogólnienie znanej reprezentacji (zob. np. [9, 11, 16, 48]) rozwiązań równania (S_1) postaci

$$\widehat{f}(x)=\widehat{f}(0)\prod_{n=1}^\infty h\Big(\frac{x}{k^n}\Big),$$

gdzie $h(x)=\frac{1}{k}\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{inx}$.

Dystrybuanty

Załóżmy, że $m=1$, ustalmy $x_0\in\mathbb{R}$ i niech $\Omega_+=\{\omega\in\Omega:\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,\omega)>0\}$. Wobec przyjętych założeń o funkcji φ, zbiór Ω_+ nie zależy od wyboru x_0. Następujący fakt jest użytecznym narzędziem badania istnienia L^1-rozwiązań równania (S).

Stwierdzenie 3 [II, Proposition 3.1]. *Równanie* (S) *ma nietrywialne* L^1-*rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy równanie*

$$F(t) = \int_{\Omega_+} F(\varphi(t,\omega))P(d\omega) + \int_{\Omega\setminus\Omega_+} [1 - F(\varphi(t,\omega))]P(d\omega) \tag{6}$$

ma rozwiązanie będące absolutnie ciągłą dystrybuantą.

Występujące tu równanie (6) na użytek opracowania nazywać będziemy *równaniem dystrybuant*. Absolutna ciągłość rozwiązań ciągłych szczególnego rodzaju równań dystrybuant badana była w kontekście L^1-rozwiązań klasycznego równania skalującego między innymi w pracach [13, 48] (por. [60]). Powyższe stwierdzenie wpisuje się w te badania, pozwalając uzyskać np. taki oto wynik natury negatywnej.

Twierdzenie 4 [II, Theorem 3.3]. *Załóżmy, że* $|\varphi(x,\omega) - \varphi(y,\omega)| \leqslant \xi(\omega)|x-y|$ *dla* $x, y \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$. *Jeżeli* $\xi\colon \Omega \to (0,+\infty)$ *jest funkcją* $\mathcal{A}$-*mierzalną oraz*

$$-\infty < \int_\Omega \log \xi(\omega)P(d\omega) < 0,$$

to jedynym L^1-*rozwiązaniem równania* (S) *jest funkcja zerowa.*

Z powyższego twierdzenia wynika w szczególności, że jeżeli $-\infty < \int_\Omega \log|L(\omega)|P(d\omega) < 0$, to równanie ($\mathrm{S}_5$) nie ma nietrywialnych L^1-rozwiązań. Podobny rezultat można otrzymać w przypadku wielowymiarowym (zob. komentarz do równania (24) na str. 26).

Przedstawiony tutaj związek równań skalujących z równaniami dystrybuant dostarcza również wyników pozytywnych, o czym będzie mowa w kolejnych dwóch częściach tego omówienia.

Perpetuity

Załóżmy, że $(\xi_n, \eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, $P(\xi_1 = 0) = 0$, $-\infty < \int_\Omega \log|\xi_1(\omega)|P(d\omega) < 0$, $\int_\Omega \log\max\{|\eta_1(\omega)|, 1\}P(d\omega) < +\infty$. Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \prod_{k=1}^{n-1} \xi_k, \tag{7}$$

zwany *perpetuitą*, jest zbieżny p.n. (zob. [28, 37] oraz [59]). Dystrybuanta F sumy S tego szeregu jest albo absolutnie ciągła albo ciągła i osobliwa (względem miary Lebesgue'a) albo $S = c$ p.w. dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ (co jest równoważne warunkowi $P(\eta_1 + c\xi_1 = c) = 1$)). Co więcej, spełnia ona, jak udowodnił A.K. Grincevičjus w [28], równanie dystrybuant postaci

$$F(x) = \int_{L>0} F(L(\omega)x - M(\omega))P(d\omega) + \int_{L<0} [1 - F(L(\omega)x - M(\omega))]P(d\omega), \tag{8}$$

gdzie $L = \xi_1^{-1}$, $M = \xi_1^{-1}\eta_1$.

Ponieważ rozwiązania nieciągłe równania dystrybuant nie mogą dać nietrywialnych rozwiązań równań skalujących, więc bez straty ogólności milcząco zakładać będziemy od tej pory tak zwany warunek niezdegenenerowania:

$$P(M + cL = c) < 1 \quad \text{dla każdego} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dla przykładu warunek ten dla równania dwukierunkowego oznacza, że $c_{-(k+1)\alpha,-1} + c_{(k-1)\alpha,1} < k$ dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{R}$ takich, że $(k+1)\alpha \in \mathbb{Z}$ i $(k-1)\alpha \in \mathbb{Z}$; w przypadku równania (S_1) przekłada się to na założenie, że co najmniej dwa występujące w nim współczynniki c_n są niezerowe.

Równanie (8) ma bogatą literaturę (zob. pracę przeglądową K. Barona i W. Jarczyka [2]). Specjalna postać równania (8) posłużyła W. Sierpińskiemu [55] do charakteryzacji funkcji Cantora. W kontekście równań skalujących, szczególny przypadek równania dystrybuant rozpatrywał V. Protasov, dowodząc bezpośrednio następującego twierdzenia (zob. [48, Proposition 1]):

Twierdzenie 5. *Załóżmy, że $k \geqslant 2$ jest ustaloną liczbą naturalną, a nieujemne liczby p_n, $n \in \mathbb{Z}$, z których co najmniej dwie są dodatnie, spełniają warunki:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n| p_n < +\infty \quad \text{oraz} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} p_n = 1.$$

Wówczas równanie

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p_n F(kx - n)$$

ma dokładnie jedno (z dokładnością do stałych: multiplikatywnej i addytywnej) rozwiązanie w klasie funkcji o ograniczonym wahaniu. Co więcej, rozwiązanie to jest ciągłą dystrybuantą, albo absolutnie ciągłą albo osobliwą.

Wykorzystując teorię perpetuit, można uzyskać rezultat następujący[11]):

Twierdzenie 6 [I, Theorem 2, Corollary 1]. *Załóżmy, że*

$$0 < \int_\Omega \log |L(\omega)| P(d\omega) < +\infty, \quad \int_\Omega \log \max\left\{\frac{|M(\omega)|}{|L(\omega)|}, 1\right\} P(d\omega) < +\infty.$$

Niech $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ będzie jedynym rozwiązaniem równania (8) w klasie ciągłych dystrybuant i niech $\mathcal{S}$ oznacza zbiór wszystkich ciągłych rozwiązań $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ równania (8) o ograniczonym wahaniu. Wówczas:

(i) *Jeżeli $P(L < 0) = 0$, to $\mathcal{S} = \{aF + b : a, b \in \mathbb{C}\}$.*

---

[11]) Występująca w Twierdzeniu 6 dystrybuanta F jest oczywiście albo absolutnie ciągła albo osobliwa. W przypadku, gdy P jest miarą skoncentrowaną na zbiorze skończonym, założenie ciągłości elementów zbioru S można pominąć, gdyż równość (9) z pracy [I] wówczas zachodzi.

(ii) *Jeżeli* $P(L<0)>0$, *to* $\mathcal{S}=\{aF+b:\ a,b\in\mathbb{C}, a+2b=1\}$.

Uwzględniając wyjściowe w tej części rozważania, związek równania skalującego (S_5) z równaniem dystrybuant (8), widoczny w Stwierdzeniu 3, można ująć nieco inaczej. Mianowicie, jeżeli dystrybuanta F perpetuity (7), będąca rozwiązaniem równania (8) ma gęstość $f\in L^1(\mathbb{R})$, to f jest L^1-rozwiązaniem równania (S_5) i na odwrót: jeżeli $f\in L^1(\mathbb{R})$ jest nietrywialnym rozwiązaniem równania (S_5), to $F(x)=\frac{1}{\|f\|_{L^1}}\int_{-\infty}^{x}|f(t)|dt$ jest (absolutnie ciągłą) dystrybuantą spełniającą równanie (8). Stąd mamy natychmiast prostą uwagę dotyczącą bardzo specjalnej wersji równania skalującego.

Uwaga 2. *Niech* $\alpha\in(1,+\infty)$. *Wówczas równanie*

$$f(x)=\frac{\alpha}{2}f(\alpha x-1)+\frac{\alpha}{2}f(\alpha x+1) \tag{9}$$

ma nietrywialne L^1*-rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy perpetuita*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^n}X_n \tag{10}$$

ma rozkład ciągły, gdzie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ciągiem Bernoulliego, tzn. zmienne* X_n, $n\in\mathbb{N}$, *są niezależne i maja ten sam rozkład dwupunktowy* $P(X_n=-1)=P(X_n=1)$.

Zadanie wyznaczenia tych parametrów α dla których suma szeregu (10) ma rozkład ciągły stanowi istotę problemu Erdősa. Zauważmy, że dla $\alpha=2$ równanie (9) jest przykładem klasycznego równania skalującego, którego jedynym rozwiązaniem jest funkcja gęstości rozkładu jednostajnego na przedziale $[-1,1]$ (por. [60, Theorem 1]). Prace takich matematyków jak P. Erdős, A. Garsia, B. Jessen, R. Kersher, Y. Peres, W. Schlag, B. Solomyak i A. Wintner przyniosły następujące informacje (zob. np. [20, 56] oraz [47]): suma S_α szeregu (10) ma rozkład czystego typu[12)]; jeżeli $\alpha>2$, to S_α ma rozkład osobliwy; jeżeli $\alpha\in\{2^{\frac{1}{n}}:n\in\mathbb{N}\}$, to S_α ma rozkład ciągły; jeżeli α jest liczbą Pisota[13)], to S_α ma rozkład osobliwy; jeżeli α jest liczbą Garsii[14)], to S_α ma rozkład ciągły; dla p.w. $\alpha\leqslant 2$ rozkład zmiennej S_α jest ciągły.

Ukazany związek równań skalujących z problemem Erdősa rodzi przekonanie, że rozwiązanie równań skalujących w całej rozciągłości parametrów jest bardzo trudne. Tym niemniej analizowane w literaturze przedmiotu równania skalujące, badane w związku z zamierzonymi zastosowaniami, posiadają często nietrywialne rozwiązania. Przykładem takiego równania jest ciągłe równanie skalujące, dla którego R.Q. Jia, S.L. Lee i A. Sharma udowodnili taki oto rezultat:

12) Rozkładem czystego typu nazywać będziemy rozkład który jest albo ciągły albo osobliwy.

13) Liczbę algebraiczną $\lambda>1$ nazywamy liczbą Pisota, jeżeli wszystkie pozostałe pierwiastki jej wielomianu minimalnego są wewnątrz koła jednostkowego.

14) Liczbę algebraiczną $\lambda\in(1,2)$ nazywamy liczbą Garsii, jeżeli wszystkie pierwiastki jej wielomianu minimalnego są na zewnątrz koła jednostkowego, a wyraz wolny tego wielomianu jest równy 2 lub -2.

TWIERDZENIE 7 [35, Corollary 3.2]. *Załóżmy, że funkcja* $c \in L^1(\mathbb{R})$ *ma zwarty nośnik oraz* $\alpha = \int_{\mathbb{R}} c(y)dy > 1$. *Wówczas istnieje nietrywialne* L^1*-rozwiązanie o zwartym nośniku ciągłego równania skalującego* (S_4).

Zauważmy, że dla nieujemnej funkcji c spełniającej założenia powyższego twierdzenia i dla miary P określonej wzorem (2), zmienna $M = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ma rozkład ciągły z gęstością c/α oraz

$$\int_{\mathbb{R}} \log \max\{|M(x)|, 1\} P(dx) = \int_{\{x\in\mathbb{R}:\, |x|>1\}} \log|x| \frac{c(x)}{\alpha} dx < +\infty.$$

Wynika stąd, że następujący rezultat, wykorzystujący absolutną ciągłość dystrybuanty stosownej perpetuity, rozszerza Twierdzenie 7.

TWIERDZENIE 8 [I, Proposition 2, Corollary 3, Corollary 4]. *Załóżmy, że zmienna* $M\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *ma ciągły rozkład oraz*

$$\int_{\Omega} \log \max\{|M(\omega)|, 1\} P(d\omega) < +\infty.$$

Jeżeli $|\alpha| > 1$, *to przestrzeń* L^1*-rozwiązań ciągłego równania skalującego* (S_3) *jest jednowymiarowa.*

Należy odnotować, że w ogólnym przypadku rozwiązania równań skalujących nie muszą mieć zwartego nośnika. Warunki dostateczne na zwartość nośnika rozwiązania równania skalującego podaje Twierdzenie 12, będące jednym z dwóch rozszerzeń Twierdzeń 7 i 8.

Absolutnie ciągłe dystrybuanty i zbiory blokujące

W poprzednich dwóch częściach zaakcentowaliśmy fakt, że poszukiwanie nietrywialnych rozwiązań równań skalujących wiąże się z badaniem absolutnej ciągłości stosownego równania dystrybuant. W pracy [III] takiemu badaniu poddane zostało równanie dwukierunkowe (S_2). Transformata Fouriera-Stieltjesa dystrybuanty F, spełniającej odpowiadające równaniu (S_2) (zgodnie ze Stwierdzeniem 3) równanie dystrybuant, spełnia zależność:

$$\widehat{F}(x) = \sum_{\varepsilon=\pm1} m_\varepsilon\Big(\frac{\varepsilon x}{k}\Big)\widehat{F}\Big(\frac{x}{k}\Big), \tag{11}$$

gdzie $m_{-1}, m_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ są funkcjami charakterystycznymi danymi wzorem

$$m_\varepsilon(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_{n,\varepsilon}}{k} e^{-inx}.$$

Podstawowym kryterium absolutnej ciągłości dystrybuanty F wypracowanym w pracy [III] jest następujące twierdzenie [III, Lemma 4.1, 4.3, 4.4 oraz Corollary 2.2]:

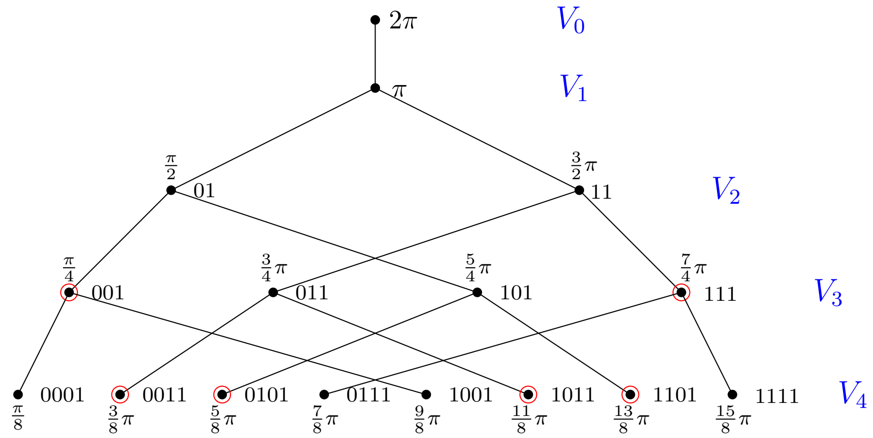
Twierdzenie 9. *Załóżmy* (4) *i niech F oznacza (jedyną) ciągłą dystrybuantę, której transformata Fouriera-Stieltjesa $\widehat{F}$ spełnia równanie* (11).

(i) *Jeżeli*
$$\hat{F}(2n\pi) = 0 \quad \text{dla } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tag{12}$$
to F jest absolutnie ciągła i przestrzeń L^1-rozwiązań równania (S_2) *jest jednowymiarowa, a ponadto wszystkie L^1-rozwiązania są stałego znaku (p.w.). Na odwrót, jeżeli F jest absolutnie ciągła, to $\Re\mathrm{e}\,\hat{F}(2n\pi) = 0$ dla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

(ii) *Załóżmy dodatkowo, że $m_{-1}(0) = 0$ albo $m_1(0) = 0$. Wówczas dystrybuanta F jest absolutnie ciągła (lub równoważanie: przestrzeń L^1-rozwiązań równania* (S_2) *jest jednowymiarowa) wtedy i tylko wtedy spełniony jest warunek* (12).

Podobna do warunku (12) własność znana jest w odniesieniu do wspomnianego na początku tego omówienia pojęcia analizy wieloskalowej. Mianowicie (zob. np. [9], [10, Chapter 6.2] oraz [61, Stwierdzenie 3.17]), jeżeli $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ jest funkcją skalującą pewnej analizy wieloskalowej, to jej transformata Fouriera $\hat{\phi}$ znika w punktach $2n\pi$ dla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Charakteryzacje istnienia nietrywialnych L^1-rozwiązań (klasycznego) równania skalującego zajmowały wielu matematyków. Uzyskiwane warunki równoważne istnieniu rozwiązań są jednakże na ogół wyjątkowo trudne do sprawdzania (zob. np. [34, 40, 50]). Pewnym wyjątkiem są prace [13, 48], w których to A. Deliu i M.C. Spruill oraz niezależnie V. Protasov podali charakteryzacje istnienia L^1-rozwiązań klasycznego równania skalującego z nieujemnymi współczynnikami oparte na tak zwanych zbiorach blokujących. Zbiory te w pracy [III] zostały wykorzystane do charakteryzacji rozwiązań równań dwukierunkowych. Podłożem dla tych charakteryzacji było Twierdzenie 9, w którym znikanie transformaty zastąpione zostało istnieniem stosownego zbioru blokującego. Poniżej przedstawimy otrzymane w ten sposób wybrane rezultaty, ograniczając się do zarysowania pojęcia zbioru blokującego na następującym przykładzie.



Powyższy rysunek przedstawia fragment drzewa skierowanego $T = (V, E)$ (rzędu 2), w którym poziomy $V_0, V_1, \ldots$ tworzą zbiór odpowiednio zakodowanych wierzchołków $v \in V$, zaś krawędzie (v, w) spełniają warunek: $(v, w) \in E$, gdy $v \in V_N$, $w \in V_{N+1}, w = \frac{v+j}{2}$ dla $j = 0$ lub $j = 1$. Podzbiór Γ zbioru wierzchołków drzewa T nazywamy *silnie blokującym*, gdy nie zawiera on wierzchołka 2π, stanowiącego korzeń drzewa T; zachodzi relacja: $v \in \Gamma$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2\pi - v \in \Gamma$; każda nieskończona ścieżka wychodząca z korzenia zawiera dokładnie jeden element zbioru Γ. Stosowne osłabienie ostatniego warunku prowadzi do pojęcia zbioru słabo blokującego. Ma ono tę własność, że każdy skończony zbiór słabo blokujący jest silnie blokujący. Wyróżniony w naszym przykładzie zbiór $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi, \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi\right\}$ jest (silnie) blokujący. Zbiory blokujące drzewa rzędu 2 odnoszą się do równań (S_1), (S_2) z $k = 2$. W podanym niżej twierdzeniu liczba naturalna $k \geqslant 2$ jest dowolna i jednocześnie tożsama z rzędem występującego w nim drzewa.

TWIERDZENIE 10 [III, Theorem 6.1, Corollary 6.2]. *Załóżmy* (4), *ustalmy* $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ *i niech* $m_\varepsilon(0) = 0$. *Wówczas:*

(i) *Równanie* (S_2) *ma nietrywialne* L^1*-rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje słabo blokujący zbiór drzewa* T *składający sie z pierwiastków równania*

$$m_\varepsilon(t) = 0. \tag{13}$$

(ii) *Jeżeli dodatkowo dla pewnego* $N \in \mathbb{N}$, $c_{0,-\varepsilon} \neq 0, c_{N,-\varepsilon} \neq 0$ *oraz* $c_{n,\varepsilon} = 0$ *dla* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, N\}$, *to równanie* (S_2) *ma nietrywialne* L^1*-rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje silnie blokujący zbiór drzewa* T *składający się z co najwyżej* N *pierwiastków równania* (13).

Zauważmy, że jeżeli $m_{-1}(0) = 0$, to równanie (S_2) redukuje się do równania (S_1). Z tego powodu Twierdzenie 10(ii) zawiera [48, Theorem 4b] i [13, Theorem 4.3] - twierdzenia dotyczące klasycznego równania skalującego skończonego rzędu. Podobnie Twierdzenie 10(i) uogólnia [48, Theorem 4a], w którym $\varepsilon = -1$ i zakłada się silniejszy niż (4) warunek (3) z liczbą δ równą 1.

Iterowane układy funkcyjne i operatory Markowa-Foiasa

Rozważany w części pt. "Perpetuity" problem Erdősa można ująć nieco inaczej. Ustalmy mianowicie $\beta \in (0, 1)$ i określmy funkcje $S_{-1}, S_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $S_k(x) = \beta x - k$. Wówczas (zob. np. [32]) istnieje dokładnie jedna taka probabilistyczna miara borelowska μ_β na prostej, że

$$\mu_\beta(A) = \frac{\mu_\beta(S_{-1} \in A) + \mu_\beta(S_1 \in A)}{2} \quad \text{dla} \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Miarę μ_β nazywamy *splotem Bernoulliego*, gdyż $\mu_\beta = * \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_{-\beta^n} + \delta_{\beta^n}}{2}$. Jest to rozkład szeregu zmiennych losowych postaci (10) z $\alpha = \frac{1}{\beta}$, gdzie $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem

Bernoulliego. Ponadto, miara μ_β ma rozkład ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy równanie (9) z $\alpha = \frac{1}{\beta}$ ma nietrywialne L^1-rozwiązanie. Związek takiego charakteru i jego konsekwencje, które za chwilę ukażemy, mają również miejsce dla równania (S_5). Z równaniem tym wiążemy iterowany układ funkcyjny[15)] $\{S_\omega : \omega \in \Omega\}$ składający się z odwzorowań $S_\omega \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ danych wzorem

$$S_\omega(x) = L(\omega)^{-1}(x + M(\omega)). \tag{14}$$

Niech $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^m)$ oznacza rodzinę wszystkich borelowskich miar probabilistycznych na $\mathbb{R}^m$. Rozważmy operator Markowa $\mathcal{P} \colon \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^m)$ określony wzorem

$$\mathcal{P}\mu(A) = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{1}_A(S_\omega(x))\mu(dx)P(d\omega). \tag{15}$$

Jest to operator fellerowski z operatorem dualnym $\mathcal{P}^* \colon C(\mathbb{R}^m) \to C(\mathbb{R}^m)$ postaci

$$\mathcal{P}^*g(x) = \int_\Omega g(S_\omega(x))P(d\omega).$$

Miarę $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^m)$ nazywamy *stacjonarną* lub *niezmienniczą* dla operatora Markowa $\mathcal{P}$, gdy $\mathcal{P}\mu = \mu$. Jeżeli operator $\mathcal{P}$ ma miarę stacjonarną μ, to

$$\mu(A) = \int_\Omega \mu(S_\omega \in A)P(d\omega) \quad \text{dla} \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{16}$$

Miara μ spełniająca (16) nazywa się też *samopodobną*. (Taką miarą jest rozważana wyżej μ_β). Jest ona czystego typu i jeżeli ma ona gęstość, to gęstość ta jest L^1-rozwiązaniem równania (S_5) i na odwrót: jeżeli f jest nietrywialnym i nieujemnym L^1-rozwiązaniem równania (S_5), to miara $\mu(B) = \frac{1}{\|f\|_{L^1}} \int_B f(t)dt, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, jest miarą samopodobną. Tego typu zależność była wykorzystywana w wielu szczególnych przypadkach równania (S_5) (zob. [30]; por. też [39]). Ma ona też ścisły związek z konstrukcją falek typu Haara (zob. np. [21, 29, 40]).

Zanim sformułujemy twierdzenie charakteryzujące L^1-rozwiązania równania (S_5) poprzez miary niezmiennicze operatorów Markowa, rozważmy następujące warunki:

$$\sup_{\omega\in\Omega} \|S_\omega(0)\| < +\infty \qquad \text{oraz} \qquad \sup_{\omega\in\Omega} \sup_{\|x\|=1} \|L(\omega)^{-1}x\| < 1. \tag{17}$$

Są to warunki dostateczne na asymptotyczną stabilność rozważanego tutaj IFS-u $\{S_\omega : \omega \in \Omega\}$ (14) (fakt ten jest treścią [IV, Theorem 3.2]). Dokładniej, gwarantują one, że istnieje jedyny, niepusty i zwarty zbiór $A_* \subset \mathbb{R}^m$, zwany *atraktorem*, taki, że $H(A_*) = A_*$ oraz $\lim_{n\to\infty} H^n(A) = A_*$ dla każdego zwartego i niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}^m$, gdzie $H \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ jest operatorem Hutchinsona danym wzorem $H(A) = \mathrm{cl} \bigcup_{\omega\in\Omega} S_\omega(A)$, a zbieżność zachodzi w metryce Hausdorffa. Zawarta w tym twierdzeniu informacja o istnieniu atraktora przekłada się na zwartość nośnika L^1-rozwiązania równania (S_5), którą ujmuje druga część zapowiadanej charakteryzacji.

15) Dalej będziemy używać skrótu IFS.

Twierdzenie 11 [IV, Theorem 4.3, Theorem 4.4, Corollary 4.5]. *Jeżeli*

$$\int_\Omega \|S_\omega(0)\| P(d\omega) < +\infty \qquad \textit{oraz} \qquad \int_\Omega \sup_{\|x\|=1} \|L(\omega)^{-1}x\| P(d\omega) < 1, \tag{18}$$

to operator Markowa $\mathcal{P}\colon \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^m)$ *dany wzorem* (15) *jest asymptotycznie stabilny, tzn. istnieje dokładnie jedna miara niezmiennicza* $\mu_* \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^m)$ *spełniająca warunek* $\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}^n\mu = \mu_*$ *dla każdej miary* $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^m)$*, gdzie występująca tu zbieżność zachodzi w normie Fortet-Mouriera, lub równoważnie, w słabym sensie. Ta jedyna miara niezmienicza* μ_* *operatora* $\mathcal{P}$ *jest czystego typu i jest ona absolutnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jedna gęstość* $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ *spełniająca równanie* (S_5). *W szczególności, jeżeli zachodzi* (17) *oraz* μ_* *ma gęstość* f*, to ta gęstość jest* L^1*-rozwiązaniem równania* (S_5) *oraz*

$$\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} \mu_* \subset A_*,$$

gdzie A_* *jest atraktorem IFS-u* $\{S_\omega : \omega \in \Omega\}$.

Zauważmy, że jeżeli $P(\{\omega_0\}) = 1$ dla pewnego $\omega_0 \in \Omega$, a x_0 jest jedynym punktem stałym odwzorowania S_{ω_0}, to $\operatorname{supp}\mu_* = \{x_0\}$. Tymczasem atraktor A_* IFS-u $\{S_\omega : \omega \in \Omega\}$ zawiera wszystkie punkty stałe odwzorowań S_ω. Przykładem równania skalującego, dla którego nośnik rozwiązania może pokrywać się z atraktorem stosownego IFS-u jest równanie postaci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n a_n^m f(a_n R_n x - b_n),$$

gdzie $N \in \mathbb{N}$, $c_n > 0$, $\sum_{n=1}^N c_n = 1$, $a_n > 1$, $c_n a_n^m = 1$, $b_n \in \mathbb{R}^m$ a R_n jest macierzą ortogonalną (tzn. $R_n^{-1} = R_n^T$) dla każdego $n \in \{1, ..., N\}$. Jeśli bowiem takie równanie ma nietrywialne L^1-rozwiązanie, to (zob. [IV, Theorem 5.2]) z dokładnością do stałej multiplikatywnej jest ono indykatorem atraktora IFS-u $\{S_1, ..., S_N\}$ odwzorowań postaci $S_n(x) = a_n^{-1} R_n^T (x + b_n)$ dla $n \in \{1, ..., N\}$.

Wykorzystanie operatorów Markowa, przynoszące nietrywialne rozwiązania równań skalujących znane jest w przypadku klasycznego równania skalującego skończonego rzędu dla $m = 1$ (zob. np. [24]). W sytuacji ogólnej, w świetle Twierdzenia 11, pożądane są warunki gwarantujące absolutną ciągłość miary niezmienniczej[16)]. Poniższy przykład dotyczy przypadku, gdy macierz L nie zależy od ω. Definiujemy

$$S(x) = L^{-1}x, \quad \nu(B) = P(\{\omega \in \Omega :\ L^{-1}M(\omega) \in B\}).$$

Wówczas operator S zachowuje zbiory miary zero, a operator Markowa związany z $S_\omega(x) = L^{-1}(x + M(\omega))$ jest operatorem Foiasa:

$$\mathcal{P}^* g(x) = \int_\Omega g(S_\omega(x)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^m} g(S(x) + y)\nu(dy).$$

16) Według [46, Theorem 1], pod stosownymi założeniami, typową w sensie kategorii jest sytuacja, gdy miara niezmiennicza jest osobliwa.

Operator ten ma tę oczekiwaną przez nas własność, że jeśli jest on asymptotycznie stabilny i rozkład ν nie jest rozkładem osobliwym, to miara niezmiennicza jest absolutnie ciągła [38, Theorem 12.7.2]. Pozwala to uzyskać następujący rezultat, rozszerzający Twierdzenia 7[17)] i 8.

TWIERDZENIE 12 [IV, Theorem 5.1]. *Załóżmy, że macierz L nie zależy od ω i spełniony jest warunek*

$$\sup_{\|x\|=1} \|L^{-1}x\| < 1 \quad \text{oraz} \quad \int_\Omega \|M(\omega)\| P(d\omega) < +\infty.$$

Jeżeli część absolutnie ciągła w rozkładzie Lebesgue'a rozkładu zmiennej M jest niezerowa, to równanie (S_5) *ma nietrywialne i nieujemne L^1-rozwiązanie f. Ponadto, jeżeli zmienna M jest ograniczona, to*

$$\operatorname{supp} f \subset A_*,$$

gdzie A_* jest atraktorem IFS-u $\{S_\omega : \omega \in \Omega\}$ funkcji postaci (14).

Punkty stałe afinicznych funkcji losowych

Bezpośrednie badanie równań dystrybuant (6) lub (8) poprzez ich iterowanie, już w tym jednowymiarowym przypadku ($m = 1$) nastręcza trudności ze względu na ich dwuczłonowość. Stąd też narodził się pomysł, aby rozwiązania równań skalujących, które z dokładnością do normalizacji są gęstościami, opisywać przez rozkłady (por. [3, 60]). Oznaczając symbolem $\stackrel{d}{=}$ równość rozkładów, rozważmy równanie postaci

$$\Phi \stackrel{d}{=} \kappa(\Lambda, \Phi), \tag{19}$$

zakładając, że

(H) X jest ośrodkową przestrzenią metryczną, $\Lambda\colon \Omega \to X$ jest funkcją $\mathcal{A}$-mierzalną, a $\kappa\colon X \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ jest taką funkcja borelowską, że $\kappa(\Lambda(\omega), \varphi(x, \omega)) = x$ dla każdych $x \in \mathbb{R}^m$, $\omega \in \Omega$.

Poniższe twierdzenie charakteryzuje L^1-rozwiązania równania (S) poprzez rozwiązania równania (19).

TWIERDZENIE 13 [VI, Proposition 4.1]. *Załóżmy* **(H)**. *Niech $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ będzie absolutnie ciągłą zmienną losową z gęstością f i załóżmy, że wektory losowe Φ, Λ są niezależne. Wówczas f jest L^1-rozwiązaniem równania* (S) *wtedy i tylko wtedy, gdy Φ jest rozwiązaniem równania* (19).

[17)] Ponieważ miarę P i zmienną M dane wzorem (2) wystarczy rozpatrywać na nośniku funkcji c, więc jeżeli ta ma zwarty nośnik, to i zmienna M też ma zwarty nośnik i w konsekwencji jest ograniczona.

Wynik tego typu dla równania (S_5) podamy w nieco innej formie, ukrywając występujące w Twierdzeniu 13 założenie niezależności w pojęciu punktu stałego funkcji losowej. W tym celu ustalmy $\mathcal{A}$-mierzalne funkcje $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}^{m\times m}$ i $\eta\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$. Niech Ψ będzie afiniczną funkcją losową daną wzorem

$$\Psi(t,\omega) = \eta(\omega) + \xi(\omega)t \qquad \text{dla} \;\; t \in \mathbb{R}^m, \omega \in \Omega.$$

Punktem stałym afinicznej funkcji losowej Ψ nazywać będziemy taki rozkład wektora losowego $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^m$, niezależnego od (η,ξ), że zachodzi

$$\Phi \stackrel{d}{=} \xi\Phi + \eta.$$

Definicję tę wprowadzili C.M. Goldie i R.A. Maller (dla $m = 1$) w pracy [25], podając przejrzyste warunki równoważne istnienia punktów stałych i rozwiązując ostatecznie problem zbieżności perpetuit. Znaczenie niezależności w definicji punktu stałego uwidacznia na przykład Lemma 1.1 z pracy [59].

W kolejnym twierdzeniu poprzez takie punkty stałe scharakteryzujemy sytuację, gdy gęstość zmiennej losowej określonej na odcinku $(0,1)$ z miarą Lebesgue'a jest L^1-rozwiązaniem równania skalującego (S_5). Niech $\Pi : \Omega \times (0,1) \to (0,1)$ oznacza rzutowanie.

Twierdzenie 14 [VI, Theorem 4.2]. *Załóżmy, że $\Phi\colon (0,1) \to \mathbb{R}^m$ jest zmienną losową z gęstością f. Wówczas f jest L^1-rozwiązaniem równania skalującego* (S_5) *wtedy i tylko wtedy, gdy rozkład $\Phi\circ\Pi$ jest dystrybucyjnym punktem stałym afinicznej funkcji losowej $\Psi : \mathbb{R}^m \times \Omega \times (0,1) \to \mathbb{R}^m$ danej wzorem*

$$\Psi(t,\omega,x) = L^{-1}(\omega)M(\omega) + L^{-1}(\omega)\,t \quad \text{dla}\, t \in \mathbb{R}^m, \omega \in \Omega, x \in (0,1). \tag{20}$$

Wykorzystując powyższą charakteryzację w przypadku jednowymiarowym otrzymujemy kolejne rozszerzenie Twierdzeń 7 i 8.

Twierdzenie 15 [VI, Theorem 5.4, Proposition 5.6]. *Jeżeli $P(M = 0) < 1$ oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(\omega_n)}{L(\omega_1)\dots L(\omega_n)} = 0 \quad p.n.,$$

to przestrzeń rozwiązań równania (S_5) *jest co najwyżej jednowymiarowa. Ponadto, jeżeli zmienne L i M są niezależne, μ jest punktem stałym afinicznej funkcji losowej* (20) *oraz M ma rozkład ciągły lub*

$$L \textit{ ma rozkład ciągły} \quad i \quad P(M + y = 0) = 0 \textit{ dla } \mu - p.w.\ y \in \mathbb{R},$$

to równanie (S_5) *ma (dokładnie jedno, z dokładnością do stałej multiplikatywnej) nietrywialne L^1-rozwiązanie.*

Literatura

1. L.E. Andersson, N.F. Stewart, *Introduction to the mathematics of subdivision surfaces*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2010.
2. K. Baron, W. Jarczyk, *Recent results on functional equations in a single variable, perspectives and open problems*, Aequationes Math. 61 (2001), 1–48.
3. J. Belock, V. Dobric, *Random variable dilation equation and multidimensional prescale functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 4779–4800.
4. D. Cavaretta, W. Dahmen, C.A. Micchelli, *Stationary subdivision*, Mem. Amer. Math. Soc., Vol. 453, (1991).
5. C.K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, New York, 1992.
6. C.K. Chui, X. Shi, *Continuous two-scale equations and dyadic wavelets*, Adv. Comput. Math. 2 (1994), 185–213.
7. A. Cohen, I. Daubechies, *A stability criterion for biorthogonal wavelet bases and their related subband coding scheme*, Duke Math. J. 68 (1992), 313–335.
8. X.R. Dai, D.J. Feng, Y. Wang, *Classification of refinable splines*, Constr. Approx. 24 (2006), 187–200.
9. I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), 909–996.
10. I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Series in Applied Mathematics, Vol. 61, SIAM Publ., Philadelphia, 1992.
11. I. Daubechies, J.C. Lagarias, *Two-scale difference equations I. Existence and global regularity of solutions*, SIAM J. Math. Anal. 22 (1991), 1388–1410.
12. I. Daubechies, J.C. Lagarias, *Two-scale difference equations II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals*, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992) 1031–1079.
13. A. Deliu, M.C. Spruill, *Existence results for refinement equations*, Aequationes Math. 59 (2000), 20–37.
14. G. Derfel, N. Dyn, D. Levin, *Generalized refinement equations and subdivision processes*, J. Approx. Theory 80 (1995), 272–297.
15. G. Derfel, R. Schilling, *Spatially chaotic configurations and functional equations with rescaling*, J. Phys. A. 29 (1996), 4537–4547.
16. G. Deslauriers, S. Dubuc, *Symmetric iterative interpolation processes*, Constr. Approx. 5 (1989), 49–68.
17. A. Dubickas, Z. Xu, *Refinement equations and spline functions*, Adv. Comput. Math. 32 (2010), 1–23.
18. N. Dyn, J.A. Gregory, D. Levin, *A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design*, Comput. Aided Geom. Design 4 (1987), 257–268.
19. N. Dyn, D. Levin, *Subdivision Schemes in Geometric Modelling*, Acta Numerica, 11 (2002), 73–144.

20. P. Erdős, *On a family of symmetric Bernoulli convolutions*, Amer. J. Math. 61, (1939), 974–976.
21. T. Flaherty, Y. Wang, *Haar-type multiwavelet bases and self-affine multi-tiles*, Asian J. Math. 3 (1999), 387–400.
22. J.S. Geronimo, D.P. Hardin, P.R. Massopust, *Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions*, J. Approx. Theor. 78 (1994), 373–401.
23. R. Girgensohn, *A survey of results and open problems on the Schilling equation*, in: Functional Equations – Results and Advances, Z. Daroczy and Z. Páles (eds.), Kluwer Acad. Publ. (2002), 159–174.
24. R. Girgensohn, J. Morawiec, *Positivity of Schilling functions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 48 (2000), 407–412.
25. C.M. Goldie, R.A. Maller, *Stability of Perpetuities*, Ann. Probab. 28 (2000), 1195–1218.
26. T.N.T. Goodman, S.L. Lee, *Wavelets of multiplicity* r, Trans. Amer. Math. Soc. 342 (1994), 307–324.
27. J.C. Goswami, A.K. Chan, *Fundamentals of wavelets. Theory, algorithms, and applications.*, 2nd ed. (English), Wiley Series in Microwave and Optical Engineering. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. 359 p., 2011.
28. A.K. Grincevičjus, *On the continuity of the distribution of a sum of dependent variables connected with independent walks on lines*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. 19 (1974), 163–168 (in Russian); English transl.: Theory Probab. Appl. 19 (1974), 163–168.
29. K. Gröchenig, W.R. Madych, *Multiresolution analysis, Haar bases, and self-similar tilings of* $\mathbb{R}^n$, IEEE Trans. Inform. Theory 38 (1992), 556–568.
30. X.G. He, Z.Y. Wen, *On the* L^1*-solutions of refinement equations with positive coefficients*, Nonlinearity 19 (2006), 1553–1563.
31. C. Heil, D. Colella, *Matrix refinement equations: existence and uniqueness*, J. Fourier Anal. Appl. 2 (1996), 363–377.
32. J.E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Math. J. 30 (1981), 713–743.
33. R.Q. Jia, Q.T. Jiang, Z.W. Shen, *Distributional solutions of nonhomogeneous discrete and continuous refinement equations*, SIAM J. Math. Anal. 32 (2000), 420–434.
34. R. Q. Jia, K. S. Lau and D. X. Zhou, L_p *solutions of refinement equations*, J. Fourier Anal. Appl. 7 (2001), 143–167.
35. R.Q. Jia, S.L. Lee, A. Sharma, *Spectral properties of continuous refinement operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 729–737.
36. H.H. Kairies, *Functional equations for peculiar functions*, Aequationes Math. 53 (1997), 207–241.
37. H. Kesten, *Random difference equations and renewal theory for products of random matrices*, Acta Math. 131 (1973), 207–248.
38. A. Lasota, M.C. Mackey, *Chaos, Fractals and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1994.

39. K.S. Lau, S.N. Ngai, H. Rao, *Iterated function systems with overlaps and self-similar measures*, J. Lond. Math. Soc. 63 (2001), 99–116.

40. K.S. Lau, J. Wang, *Characterization of L^p-solutions for two-scale dilation equations*, SIAM J. Math. Anal. 26 (1995), 1018–1046.

41. Y. Li, S.Z. Yang, *Dual multiwavelet frames with symmetry from two-direction refinable functions*, Bull. Iranian Math. Soc. 37 (2011), 199–214.

42. S. Mallat, *Multiresolution approximation and wavelets orthonormal bases of L^2*, Trans. Amer. Math. Soc. 315 (1989), 69–88.

43. C.A. Micchelli, *Mathematical Aspects of Geometric Modeling*, CBMS-NSF Series in Applied Mathematics, Vol. 65, SIAM Publ., Philadelphia, 1995.

44. C.A. Micchelli, *Subdivision algorithms for curves and surfaces*, Proc. Siggraph, Dallas, Texas, 1986.

45. C.A. Micchelli, H. Prautzsch, *Uniform refinement of curves*, Linear Alg. Appl. 114/115 (1989), 841–870.

46. J. Myjak, T. Szarek, *Generic properties of Markov operators*, IV International Conference in "Stochastic Geometry, Convex Bodies, Empirical Measures & Applications to Engineering Science", Vol. II (Tropea, 2001). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 70, part II (2002), 191–200.

47. Y. Peres, W. Schlag, B. Solomyak, *Sixty years of Bernoulli convolutions*, Fractals and Stochastics II, Progress in Probability 46 (2000), 39–65.

48. V. Protasov, *Refinement equations with nonnegative coefficients*, J. Fourier Anal. Appl. 6 (2000), 55–78.

49. V. Protasov, *On the problem of the asymptotics of the partition function*, Mat. Zametki 76 (2004), 151–156 (in Russian); English transl.: Math. Notes 76 (2004), 144–149.

50. V. Protasov, *Extremal L_p-norms of linear operators and self-similar functions*, Linear Algebra Appl. 428 (2008), 2339–2356.

51. G. de Rham, *Sur un example de fonction continue sans dérivée*, Enseign. Math. 3 (1957), 71–72.

52. M. Sabin, *Analysis and design of univariate subdivision schemes. Geometry and Computing*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

53. R. Schilling, *Spatially chaotic structures*; in Nonlinear Dynamics in Solids, H. Thomas (ed.), Springer, Berlin, 1992, 213–241.

54. L.L. Schumaker, *Spline functions: basic theory*, Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, New York, 1981.

55. W. Sierpiński, *Sur un système d'équations fonctionnelles définissant une fonction avec un ensemble dense d'intervalles d'invariabilité*, Bull. Inter. Acad. Sci. Cracovie, Cl. Sci. Math. Nat. Ser. A (1911), 577–582.

56. B. Solomyak, *On the random series $\sum \pm\lambda^i$ (an Erdős problem)*, Ann. of Math. 142 (1995), 611–625.

57. Ö. Stenflo, *Perfect sampling from the limit of deterministic products of stochastic matrices*, Elect. Commun. Probab 13 (2008) 474–481.
58. G. Strang, D.X. Zhou, *Inhomogeneous refinement equations*, J. Fourier Anal. Appl. 4 (1998), 733–747.
59. W. Vervaat, *On a stochastic difference equation and a representation of non-negative infinitely divisible random variables*, Adv. Appl. Prob. 11 (1979), 750–783.
60. J. Wesołowski, *Sketches on dilation probability distributions*, Demonstratio Math. 34 (2001), 385–402.
61. P. Wojtaszczyk, *Teoria falek*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2000.
62. C. Xie, *Construction of biorthogonal two-direction refinable function and two-direction wavelet with dilation factor m*, Comput. Math. Appl. 56 (2008), 1845–1851.
63. S.Z. Yang, Y. Li, *Two-direction refinable functions and two-direction wavelets with dilation factor m*, Appl. Math. Comput. 188 (2007), 1908–1920.
64. S. Z. Yang and Y. Li, *Two-direction refinable functions and two-direction wavelets with high approximation order and regularity*, Sci. China Ser. A 50 (2007), 1687–1704.
65. S.Z. Yang, Y. Li, *Construction of multiwavelets with high approximation order and symmetry*, Sci. China Ser. A 52 (2009), 1607–1616.
66. *Wavelets: mathematics and applications.* Edited by J.J. Benedetto and M.W. Frazier. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.

5. **Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze**

   (a) Wykaz opublikowanych prac naukowych nie wchodzących w skład osiągnięcia wymienionego w punkcie 4

   [1] Rafał Kapica, *Sequences of iterates of random-valued vector functions and continuous solutions of a linear functional equation of infinite order*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics 50 (2002), 447–455.

   [2] Rafał Kapica, *Convergence of sequences of iterates of random-valued vector functions*, Colloquium Mathematicum 97 (2003), 1–6.

   [3] Rafał Kapica, *Sequences of iterates of random-valued vector functions and solutions of related equations*, Österreichische Akademie der Wissenschaften Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. Sitzungsberichte. Abteilung II. Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften 213 (2004), 113–118.

   [4] Rafał Kapica, *Theorems of Thron's type for random-valued vector functions and the Krein-Rutman theorem*, Annales Polonici Mathematici 85 (2005), 13–24.

   [5] Rafał Kapica, *Asymptotic behaviour of trajectories of some discrete random dynamical systems*, Iteration Theory (ECIT '06), Grazer Mathematische Berichte 351 (2007), 79–90.

[6] Rafał Kapica, *Sequences of iterates of random-valued vector functions and continuous solutions of related equations*, Glasnik Matematički. Serija III 42 (2007), 389–399.

[7] Rafał Kapica, *On the convergence of sequences of iterates of random-valued vector functions*, Annales Polonici Mathematici 90 (2007), 193–201.

[8] Rafał Kapica, *On the submartingale characterization of Banach lattices*, Communications in Applied Analysis 12 (2008), 41–45.

[9] Rafał Kapica, Janusz Morawiec, *Limits of random iterates*, Publicationes Mathematicae Debrecen 75 (2009), 137–148.

[10] Karol Baron, Rafał Kapica, *A uniqueness-type problem for linear iterative equations*, Analysis (Munich) 29 (2009), 95–101.

[11] Rafał Kapica, Janusz Morawiec, *Continuous solutions of iterative equations of infinite order*, Opuscula Mathematica 29 (2009), 147–155.

[12] Rafał Kapica, Tomasz Szarek, Maciej Ślęczka, *On a unique ergodicity of some Markov processes*, Potential Analysis 36 (2012), 589–606.

[13] Rafał Kapica, Janusz Morawiec, *Refinement type equations: sources and results*, Banach Center Publications 99 (2013), 87–109, DOI: 10.4064/bc99-0-7.

[14] Hakima Bessaih, Rafał Kapica, Tomasz Szarek, *Criterion on stability for Markov processes applied to a model with jumps*, Semigroup Forum, DOI 10.1007/s00233-013-9503-x.

(b) Omówienie tematyki prac ujętych w punkcie 5(a)

Najstarsze trzy prace [1, 2, 3] wraz z [6], składające się na rozprawę doktorską, dotyczą iteracji funkcji $f : X \times \Omega \to X$ o wektorowych wartościach losowych i ich zastosowań do równań postaci

$$\varphi(x) = \int_\Omega \varphi(f(x,\omega))P(d\omega). \tag{21}$$

Przez iteracje funkcji losowej f rozumiemy funkcje $f^n : X \times \Omega^\infty \to X$ dane wzorem

$$f^1(x,\omega) = f(x,\omega_1), \quad f^{n+1}(x,\omega) = f(f^n(x,\omega),\omega_{n+1})$$

dla $x \in X$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega^\infty$ i $n \in \mathbb{N}$.

W pracach [4, 5, 7] badane jest tempo zbieżności zdefiniowanych wyżej ciągów iteracji różnego rodzaju funkcji losowych. Dokładniej, w [4] rozważane są funkcje losowe o wartościach w podzbiorze X zbioru elementów dodatnich kraty Banacha E. Pokazujemy, że tempo zbieżności ciągu iteracji takich funkcji istotnie zależy od promienia spektralnego zwartego operatora liniowego $L : E \to E$ (będącego, z grubsza mówiąc, pochodną funkcji f) i otrzymanego z twierdzenia Kreina-Rutmana wektora własnego. W drugiej pracy z tej grupy analizujemy dyskretne losowe układy dynamiczne, badając szybkość zbieżności trajektorii i stosując otrzymane wyniki do ciągów iteracji funkcji losowych, będących w istocie prototypem losowych układów dynamicznych. Ostatnia praca dotyczy z kolei funkcji losowych postaci $f(x,\omega) = \Phi(\omega)x + H(x)G(x,\omega)$ o wartościach w ośrodkowych przestrzeniach unormowanych, gdzie Φ jest zmienną losową, H jest rzeczywistą funkcją borelowską, a G jest funkcją losową. Pokazujemy w niej między innymi, że jeżeli Φ jest funkcją dodatnią, to ciąg iteracji $(f^n(x,\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ zachowuje się w pewnym sensie tak jak ciąg iloczynów $\left(\prod_{k=1}^n \Phi(\omega_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Pod pewnymi założeniami mamy bowiem na przykład taki oto wynik (zob. [7, Corollary 1]): jeżeli X jest podzbiorem zbioru elementów dodatnich kraty l_1 (z porządkiem naturalnym), to dla każdego $x \in X$ ciąg $\left(\frac{f^n(x,\cdot)}{\prod_{k=1}^n \Phi(\omega_k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny p.n. do zmiennej losowej o wartościach dodatnich w l_1. Jeżeli dodatkowo $\mathbb{E}|\log\Phi| < +\infty$, to $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{||f^n(x,\cdot)||} = \exp\{\mathbb{E}\log\Phi\}$ p.n.

Badaniom różnego rodzaju regularności iteracji funkcji losowych i ich granic poświęcona jest praca [9]. W szczególności analizujemy przypadek, gdy funkcja losowa f o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha X jest P-ciągła (tzn. gdy $\lim_{j\to\infty} f(x_j,\cdot) = f(x,\cdot)$ według prawdopodobieństwa P dla każdego ciągu $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ zbieżnego do x) i podajemy warunki dostateczne P^∞-ciągłości granicy ciągu iteracji $(f^n(x,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$. Uzyskaną w ten sposób ciągłość (ze względu na zmienną x) rozkładu granicznego $\pi : X \times \mathcal{B}(X) \to [0,1]$ danego wzorem

$$\pi(x,B) = P(\{\omega \in \Omega^\infty : \text{granica ciągu } (f^n(x,\omega))_{n\in\mathbb{N}} \text{ istnieje i należy do } B\}) \quad (22)$$

stosujemy do równania (21) wykazując istnienie ciągłego i ograniczonego rozwiązania $\varphi : X \to \mathbb{R}$.

Praca [8] zawiera dwie charakteryzacje krat Banacha wykorzystujące rozkład Dooba i warunki typu Dooba dla martyngałów o wartościach wektorowych. Pierwsza dotyczy AL-przestrzeni, tj. takich krat, w których norma jest addytywna na zbiorze wszystkich elementów dodatnich. Druga obejmuje KB-przestrzenie, a więc kraty o tej własności, że każdy rosnący i ograniczony w normie ciąg elementów tej kraty jest zbieżny.

Problem jednoznaczności rozwiązań równania (21), jak również nierówności

$$\varphi(x) \leqslant \int_\Omega \varphi(f(x,\omega))P(d\omega), \quad (23)$$

badamy w pracy [10]. Dowodzimy między innymi, że pod stosownymi założeniami każde borelowskie i ograniczone rozwiązanie $\varphi : X \to \mathbb{R}$ nierówności (23) spełnia dla każdego $x \in X$ nierówność

$$\varphi(x) \leqslant \int_B \lim_{r\to 0^+} \sup \varphi(B(x,r))\pi(x,dy),$$

gdzie B jest zbiorem punktów stałych odwzorowania $x \mapsto \int_\Omega f(x,\omega)P(d\omega)$, a π jest funkcja daną wzorem (22). Wynika stąd w szczególności, że jeżeli $\varphi : X \to \mathbb{R}$

jest borelowskim i ograniczonym rozwiązaniem równania (21), ciągłym w każdym punkcie zbioru B, to

$$\varphi(x) = \int_B \varphi(y)\pi(x, dy) \quad \text{dla } x \in X.$$

Docelowym przedmiotem badań pracy [11] jest równanie skalujące postaci

$$f(x) = \int_\Omega |\det A(\omega)\Phi'(x)| f(A(\omega)\Phi(x) - B(\omega))P(d\omega). \tag{24}$$

A jest tutaj macierzą diagonalną ze zmiennymi losowymi $a_1, \ldots, a_m : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ na przekątnej, $B : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ zmienną losową, a $\Phi(x) = (\Phi_1(x_1), \ldots, \Phi_m(x_m))$, gdzie $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ są nierozszerzającymi dyfeomorfizmami przestrzeni $\mathbb{R}$ na siebie, znikającymi w zerze. Pokazujemy, że jeżeli funkcje $a_1, \ldots, a_m$ są dodatnie, $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ są rosnące oraz

$$-\infty < \int_\Omega \log \max_{k=1,\ldots,m} |a_k(\omega)| P(d\omega) < 0,$$

to funkcja zerowa jest jedynym L^1-rozwiązaniem równania (24).

Praca [13] ma charakter przeglądowy i niejako wieńczy prowadzone wspólnie z Januszem Morawcem badania (jednorodnych) równań typu skalującego. Wskazujemy w niej problemy i zagadnienia prowadzące do tych równań. Prezentujemy również wybrane wyniki dotyczące równań typu skalującego ogólniejszych niż klasyczne.

Moje najnowsze zainteresowania badawcze koncentrują się wokół teorii operatorów Markowa[18)]. Przedmiotem badań prac [12, 14] są półgrupy takich operatorów w przestrzeniach polskich, posiadające e-własność. Wymieniona cecha półgrupy $(P_t)_{t\geqslant 0}$ operatorów Markowa oznacza, że dla każdej lipschitzowskiej i ograniczonej funkcji φ rodzina $\{P_t\varphi : t \geqslant 0\}$ jest jednakowo ciągła w każdym punkcie. W pracy [12] dowodzimy, że topologicznie nieredukowalna półgrupa $(P_t)_{t\geqslant 0}$ z e-własnością może mieć co najwyżej jedną miarę niezmienniczą. Jest to odpowiednik twierdzenia M. Hairera i J. Mattingly'ego z pracy [Ann. Math. 164 (2006), 993–1032], w której autorzy rozważają półgrupy z asymptotycznie silną fellerowskością, cechą od e-własności mocniejszą. Nowe kryterium asymptotycznej stabilności podajemy w [14]. Pokazujemy mianowicie, że każda półgrupa $(P_t)_{t\geqslant 0}$ z e-własnością, ograniczona w średniej i skoncentrowana w pewnym punkcie jest asymptotycznie stabilna. Wynik ten, dający możliwość uzyskania nowych parametrów dla stabilności modelów GOY i Sabra (są to modele typu *shell* przepływów hydrodynamicznych), został zastosowany w pracy do zbadania stabilności półgrupy pewnego procesu ze skokami.

[18)] Tematyki tej dotyczy również nieopublikowana jeszcze praca [http://arxiv.org/abs/1107.0707], napisana wspólnie z Maciejem Ślęczką. Dowodzimy w niej wykładniczego tempa zbieżności iteracji operatora przejścia dla ciągu funkcji losowych z prawdopodobieństwami zależnymi od położenia i uogólniamy pojęcie perpetuity.

 Rafał Kapica