Opinia w postępowaniu habilitacyjnym pana dr Radosława Czai
'Aspekty asymptotyki półgrup i procesów ewolucyjnych'
(na zlecenie Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego)

Radosław Czaja urodził się 21 sierpnia 1976 roku w Siemianowicach Śląskich. Ukończył VIII Liceum Ogólnokształcące w Katowicach. Studia matematyczne na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Śląskiego ukończył w czerwcu 2000 roku. Rozprawę doktorską *Liniowe i semiliniowe abstrakcyjne równania paraboliczne*, napisaną pod kierunkiem profesora Jana Cholewy, obronił w czerwcu 2004 roku w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego. Pracując w latach 2005 do 2017 zasadniczo na Uniwersytecie Śląskim, przebywał przez 7 lat w Instituto Superior Técnico w Lizbonie. Początkowo (2005-2007) był to grant po doktoracie (Postdoctoral Fellow), później (2009-2014) etat badawczy (Investigador Auxiliar). W końcu roku 2014 doktor Czaja powrócił na etat adiunkta w Instytucie Matematyki UŚ.

Publikacje i cytowania.

Doktor Radosław Czaja jest autorem bądź współautorem 13 artykułów naukowych (praca 14 ukazała się już po złożeniu materiałów habilitacyjnych), z których pięć stanowi zawartość tzw. osiągnięcia naukowego. Te ostatnie prace, z których cztery są wsółautorskie, ukazały się w latach 2008–2015 w dobrych i bardzo dobrych czasopismach matematycznych; *Journal of Differential Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Nonlinear Analysis TMA*.

W skład osiągnięcia naukowego dr Czai wchodzą więc cztery prace napisane wspólnie z prof. Messoudem Efendievem (Helmholtz Center Munich), profesorem Carlosem Rochą (Instituto Superior Téchnico, Lisboa) oraz Brazylijczykami profesorem Alexandre Carvalho i doktorami Everaldo de Mello Bonotto i Matheusem C. Bortolan (Universidade de São Paulo, Brazil).

Baza MathSciNet Mathematical Reviews (z 08.05.2017) podaje, że prace Radosława Czai były cytowane 26 razy przez 31 autorów. Najczęściej, 9 razy, cytowano pracę: Transversality in scalar reaction-diffusion equations on a circle, *J. Differential Equations* 245 (2008), z Carlosem Rochą. Na drugim miejscu, z 6 cytowaniami, znalazła się praca: Remarks on the fractal dimension of bi-spaces global and exponential attractors, *Boll. Unione Mat. Ital.* 9 (2008) (wspólna z J.W. Cholewą i G. Molą).

Z kolei baza Web of Knowledge z 08.05.2017 mówi o 26 cytowaniach siedmiu prac w 25 artykułach. Ilość cytowań nie jest zbyt imponująca, może jednak ostatnio wydane prace nie zdążyły się jeszcze doczekać cytowań.

Omówienie 'osiągnięcia naukowego'.

Rozpocznę od sprecyzowania problematyki badawczej zawartej w pracach włączonych do 'osiągnięcia naukowego'. W przygotowanym Autoreferacie dr Czaja wymienia trzy główne kierunki badań prowadzonych w tych pracach:

- Eksponencjalne atraktory typu pullback dla procesów ewolucyjnych,
- Globalne atraktory dla impulsywnych (impulsowych?) układów dynamicznych,
- Aspekty strukturalnej stabilności.

Według dostarczonych *Oświadczeń współautorów* wkład doktora Czai w powstanie prac [1, 2] oraz [4, 5] wchodzących w skład 'osiągnięcia naukowego' był równoprawny lub nawet dominujący. Dokładniej, profesor M. Efendiev określił swój wkład w powstanie prac [1] i [2] na 30 do 40 procent, zaś współautorzy pracy [4] łącznie na 75% (co pozostawia 25% dla habilitanta). Profesor C. Rocha określił swój wkład pracy w publikację [5] na 50%.

Charakteryzując zbiorczo problematykę prac zaliczonych do 'osiągnięcia naukowego' muszę stwierdzić, że jest to mocno abstrakcyjna teoria układów dynamicznych w przestrzeniach Banacha, z zastosowaniem do ewolucyjnych równań różniczkowych cząstkowych. Jest to również problematyka stosunkowo nowa, przykładowo teoria 'pullback atraktorów' procesów ewolucyjnych jest badana dopiero od około 20 lat.

Przejdę obecnie do bliższego omówienia rezultatów zawartych w 'osiągnięciu naukowym'. Wchodzące w skład pierwszego z kierunków badawczych prace [1, 2], wspólne z M. Efendievem, dotyczą pojęcia 'pullback exponential attractor' będącego uogólnieniem pojęcia globalnego atraktora na przypadek *procesów ewolucyjnych* zadawanych m. in. przez równania paraboliczne ze współczynnikami zależnymi od czasu. Tego typu uogólnienia pojęcia atraktora półgrupy są intensywnie badane przez ostatnie 20 lat, a wymagało to zbudowania odpowiedniej teorii, od kewstii definicji 'pullback' atraktora po twierdzenia o jego istnieniu i własnościach. Z kolei pojęcie 'eksponencjalnego atraktora' (do którego trajektorie są przyciągane podwykładniczo) jest nieco starsze i wywodzi się z rozważań C. Foiasa, G.R. Sella i R. Temama z końca lat osiemdziesiątych XX wieku. Chodziło o takie poprawienie pojęcia atraktora półgrupy, aby można było prowadzić rozważania numeryczne (w przypadku wielu atraktorów trajektorie zbiorów ograniczonych zmierzają do nich bardzo wolno, czego nie da się badać numerycznie).

Prace [1, 2] dotyczą teoretycznego podejścia oraz przykładów 'pullback exponential attractors' *procesu ewolucyjnego*. Przypomnijmy, że pod tym pojęciem rozumiemy rodzinę zbiorów niepustych, zwartych i dodatnio niezmienniczych względem procesu ewolucyjnego, które mają ograniczony wymiar fraktalny dla wszystkich czasów i przyciągają w sensie 'pullback' ograniczone podzbiory przestrzeni fazowej w tempie podwykładniczym. Twierdzenie 2.1 pracy [1] podaje warunek wystarczający dla istnienia takich atraktorów, zaś jego dowód jest mocno technicznie złożony. W Corollary 2.6 autorzy konkretyzują rezultat omawianego twierdzenia w przypadku *półgrup* na przestrzeni unormowanej. Końcowa część pracy [1] poświęcona jest wyprecyzowaniu poczynionych w Twierdzeniu 2.1 założeń w przypadku nieautonomicznych semiliniowych równań parabolicznych, czyli podaniu przykładu do wspomnianego abstrakcyjnego twierdzenia. Stanowi to treść Twierdzenia 3.6.

W pracy [2] autorzy podają bardziej konkretne przykłady nieautonomicznych równań parabolicznych posiadających atraktory w sensie [1]. Są to; równanie logistyczne

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\partial_\tau u = \Delta u + \lambda u - b(\tau)u^3,\ \tau > \sigma, x \in \Omega \subset R^N, N \leq 3,\\ &u(\sigma, x) = u_0(x),\ x \in \Omega,\ u(\tau, x) = 0,\ \tau \geq \sigma,\ x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

w ograniczonym obszarze $\Omega \subset R^N$, z warunkiem brzegowym Dirichleta, oraz układ k równań parabolicznych nieautonomicznych z dywergencyjną częścią główną (obejmujący układ Fitz-Hugh-Nagumo). Sprawdzenie spełnienia założeń poczynionych w pracy [1] jest technicznie złożone.

Ostatnia w tym kierunku badań, praca [3], poświęcona jest kwestii istnienia atraktora typu 'pullback exponential' a dokładniej rozpatrzeniu sytuacji gdy dopuszcza się możliwość iż rodzina zbiorów składająca się na 'pullback exponential' atraktor rośnie podwykładniczo w przeszłości zachowując jednak własność jednostajnej ograniczoności wymiaru fraktalnego.

W pracy [3] omówiony jest przyklad nieautonomicznego równania Chafee-Infante z warunkiem brzegowym typu Neumanna

$$(2)\qquad \begin{aligned} &u_t = \Delta u + \lambda u - b(t)u^3,\ t > s,\ x \in \Omega,\\ &\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad x \in \partial\Omega, \quad u(s, x) = u_0(x),\ x \in \Omega, \end{aligned}$$

w ograniczonym, gładkim obszarze $\Omega \subset R^N$ oraz przy założeniach odnośnie funkcji $b : R \to (0, \infty)$ obejmujących przypadek gdy $b(t)$ zachowuje się jak $Ke^{\gamma_0 t}$ z pewnymi $K, \gamma_0 > 0$ dla mocno ujemnych czasów t. W pracy tej rozpatrzony był również przykład zadania Dirichleta w obszarze ograniczonym dla równania

$$u_t - \Delta u + f(t,u) = g(t), \; t > s, x \in \Omega,$$

przy założeniu warunków wzrostu nieliniowości postaci

$$C_1|u|^p - C_2 \leq f(t,u)u \leq C_3|u|^p + C_4,$$
$$f_u(t,x) \geq -C_5, \quad f(t,0) = 0,$$

z dodatnimi stałymi C_i, $p \geq 2$, oraz gdy $g \in L^2_{loc}(R, L^2(\Omega))$. Wyniki pracy [3] uogólniają (co zilustrowano przykładami podanymi w pracy) rezultaty uzyskane przez A.N. Carvalho i S. Sonner we wcześniejszej publikacji: Pullback exponential attractors for evolution processes in Banach spaces: properties and applications, *Commun. Pure. Appl. Anal.* 13 (2014), 1141-1165.

Wspólna z matematykami brazylijskimi praca [4] poświęcona jest istnieniu globalnego atraktora dla 'impulsowych układów dynamicznych', to znaczy układów dla których ciągły przebieg procesu może być przerwany przez nagłą, impulsową zmianę stanu. Tematyka ta pojawiła się w początku lat siedemdziesiątych XX wieku a od lat dziewięćdziesiątych stała się popularna. Zajmowali się nią wtedy w szczególności Krzysztof Ciesielski i Saroop Kaul. Szereg procesów biologicznych, medycznych czy fizycznych realnego świata wydaje się być opisanych tego typu impulsowymi układami (przykładowo, proces Volterry-Lotki z okresowym odławianiem jednej z populacji). Dla zdefiniowania impulsowego układu dynamicznego wychodzimy od klasycznej ciągłej półgrupy $\{\pi(t); t \geq 0\}$ na przestrzeni metrycznej (X,d), dla której zadajemy niepusty i domknięty podzbiór $\mathcal{M}$ przestrzeni fazowej X. Zakładamy, że trajektorie docierają do zbioru $\mathcal{M}$ transwersalnie. Po ewentualnym dotarciu do $\mathcal{M}$ trajektoria półgrupy zostaje rozerwana i następuje skok, opisany funkcją $I : \mathcal{M} \to X$, do nowego punktu z którego ewolucję opisuje półgrupa. Sytuacja może się powtarzać. Tego typu zjawisko nie może być opisane przez ciągłą półgrupę i zadaniem pracy [4] było zaproponowanie takiego uogólnienia pojęcia globalnego atraktora półgrupy, które pozwoliłoby objąć opisaną sytuację. Autorzy pracy [4] poszerzają klasyczne pojęcia znane z teorii półgrup (pochłanianie, dyssypatywność, globalny atraktor, ...) w taki sposób, aby pasowały do nowej ogólniejszej sytuacji. Różnice w stosunku do klasycznej teorii półgrup są istotne, co zostało w pracy zilustrowane przykładami. W szczególności uogólniony globalny atraktor układów impulsowych nie musi być zbiorem spójnym.

Ostatnia z pięciu prac włączonych do 'osiągnięcia naukowego', wspólna z Carlosem Rochą, *Transversality in scalar reaction-diffusion equations on a circle*, J. Differential Equations z 2008 roku, poświęcona jest badaniu transwersalności przecięcia rozmaitości stabilnej i niestabilnej hiperbolicznej orbity okresowej dla równania reakcji z dyfuzją;

$$u_t = u_{xx} + f(x,u,u_x), \tag{3}$$

na okręgu (z okresowymi warunkami brzegowymi). Własność transwersalności przecięcia rozmaitości niezmienniczych jest jednym ze składników potrzebnych dla zachodzenia tzw. *własności generycznych* (twierdzenie Kupki-Smalea) oraz *strukturalnej stabilności* w teorii układów dynamicznych. Dlatego tego typu badania, trudne i mocno abstrakcyjne, mają duże znaczenie i wzbudzały zainteresowanie specjalistów. Prekursorami takich badań w latach osiemdziesiątych XX wieku byli D. Henry, J.K. Hale czy S. Angenent. Omawiana tu praca jest kontynuacją rozważań G. Fusco i W.M. Olivy z 1990 roku (*J. Dynam. Differential Equations* 2). W omawianej pracy takie własności jak 'dobre postawienie' problemu w ułamkowych przestrzeniach Sobolewa $X^\alpha = [L^2(S^1), H^2(S^1)]_\alpha, \alpha \in (\frac{3}{4}, 1)$, istnienie globalnego w czasie rozwiązania (przy rozsądnych warunkach wzrostu nieliniowości) czy istnienie globalnego atraktora w X^α stanowią dopiero wstępne informacje w badaniach. Zawsze imponowała mi możliwość matematycznego badania obiektów, typu właśnie rozmaitości niezmienniczych orbity okresowej Π, skonstruowanych w sposób bardzo abstrakcyjny, których w żaden sposób nie możemy wypisać jawnie ('dotknąć'). Zasadniczym wynikiem pracy jest Twierdzenie 8.2 stanowiące, że *'Stabilna i niestabilna rozmaitości hiperbolicznej orbity okresowej* $\Pi^{\pm}$ *dla problemu* (3) *przecinają się transwersalnie, to* *znaczy:*

$$
\text{(4)} \qquad \begin{gathered} \textit{jeżeli } u_0 \in S(\tau)W^u_{loc}(\Pi^-) \cap W^s_{loc}(\Pi^+) \quad \textit{dla pewnego } \tau \geq 0, \textit{ to} \\ T_{u_0}S(\tau)W^u_{loc}(\Pi^-) + T_{u_0}W^s_{loc}(\Pi^+) = X^\alpha. \end{gathered}
$$

Praca jest ciekawa, trudna i bardzo abstrakcyjna.

Ocena pozostałej działalności naukowej dr Radsława Czai.

Poza pracami wchodzącymi w skład 'osiągnięcia naukowego' Radosław Czaja jest autorem lub współautorem 8 prac naukowych (oraz współautorem kolejnej, w *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, doi:10.3934/dcds.2017155, która ukazała elektronicznie w kwietniu 2017). Chciałbym tu również wymienić niewielką monografię (związaną z pracą doktorską R. Czai): "Differential Equations with Sectorial Operator" wydaną w 2002 roku przez Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, stanowiącą wstęp i podstawę do jego dalszych badań naukowych.

Wobec obszerności przedstawionej opinii omówię szerzej jedynie jedną z należących tu ośmiu prac, mianowicie tę napisaną wspólnie z Messoudem Efendievem: A note on attractors with finite fractal dimension, *Bull. London Math. Soc.* 40 (2008), 651-658. Nawiązuje ona do wcześniejszej publikacji M. Efendieva, A. Miranville i S. Zelika (*C.R. Acad. Sci. Paris* 330 (2000)) dotyczącej problemu istnienia eksponencjalnych atraktorów w równaniach reakcji z dyfuzją w R^3. W tej ostatniej publikacji zaproponowano konstrukcję eksponencjalnego atraktora, która działa w przestrzeniach Banacha (a nie w przestrzeniach Hilberta, co było znane z wcześniejszych badań). Praca Czai i Efendieva zawiera oszacowania wymiaru fraktalnego takich właśnie eksponencjalnych atraktorów.

Zagraniczne staże naukowe, wyjazdy zagraniczne oraz udział w projektach badawczych.

Przez większość czasu po uzyskaniu doktoratu w 2004 roku R. Czaja pracował naukowo w Instituto Superior Téchnico w Lizbonie; od września 2005 do sierpnia 2007 na stażu po doktoracie, od września 2009 do sierpnia 2014 na etacie badawczym. Dr Czaja odwiedził również w 2014 roku Universidade de São Paulo (1 miesiąc), w 2011 roku Helmholtz Center w Monachium (dwa tygodnie). Brał także udział w kilkunastu konferencjach zagranicznych, w tym w Lizbonie, Saõ Carlos (Brazylia), Madrycie, Casalmaggiore (Włochy) i Cortonie (Włochy).

Był także wykonawcą w trzech programach międzynarodowych:

- Brazilian-European Partnership in Dynamical Systems, w latach 2013-2016, Marie Curie Action IRSES, kierownik Jeroen S.W. Lamb (Imperial College),
- Cieñcia 2008, w latach 2009-2014, Portugalia, kierownik Carlos Rocha,
- Projccto Estratégico - LA 9, w latach 2013-2014, Portugalia, kierownik João José dos Santos Sentieiro.

PODSUMOWANIE OCENY.

Pan doktor Radosław Czaja jest autorem bądź współautorem 13 (14) prac naukowych opublikowanych w latach 2002 do 2016 (2017) w dobrych i bardzo dobrych czasopismach matematycznych (trzy prace ukazały się w prestiżowym *Journal of Differential Equations*). Potrafił przy tym współpracować z wysokiej klasy matematykami; Messoudem Efendievem, Carlosem Rochą, Valdyrem Olivą i Alexandre Carvalho. Doktor R. Czaja jest matematykiem samodzielnym, o szerokich międzynarodowych kontaktach naukowych. Wiele lat pracował w Instituto Superior Técnico w Lizbonie. Uprawiana przez doktora Czaję problematyka, wchodząca w skład teorii układów dynamicznych zadawanych przez równania różniczkowe cząstkowe, jest niewątpliwie nowoczesna, trudna i bardzo abstrakcyjna. Zdecydowanie uważam więc, że pan doktor Radosław Czaja zasługuje na przyznanie mu stopnia doktora habilitowanego nauk matematycznych.

KONKLUZJA.

Uważam, że *osiągnięcie naukowe* **pana doktora Radosława Czai 'Aspekty asymptotyki półgrup i procesów ewolucyjnych' spełnia wszelkie wymogi formalne stawiane w** *'Ustawie o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki'* **z dnia 14 marca 2003 roku (wraz z późniejszymi zmianami) w postępowaniach habilitacyjnych. Popieram wniosek o nadanie panu Radosławowi Czai stopnia naukowego doktora habilitowanego nauk matematycznych.**

T. Dłotko.

prof. dr hab. Tomasz Dłotko

Instytut Matematyczny
Polskiej Akademii Nauk
14 maja 2017 roku

Prace wchodzące w skład 'osiągnięcia naukowego' pt. *Aspekty asymptotyki półgrup i procesów ewolucyjnych.*

[1] R. Czaja, M. Efendiev, Pullback exponential attractors for nonautonomous equations. Part I: Semilinear parabolic problems, *J. Math. Anal. Appl.* 381 (2011), 748-765.
[2] R. Czaja, M. Efendiev, Pullback exponential attractors for nonautonomous equations. Part II: Applications to reaction-diffusion systems, *J. Math. Anal. Appl.* 381 (2011), 766-780.
[3] R. Czaja, Pullback exponential attractors with admissible exponential growth in the past, *Nonlinear Anal. TMA* 104 (2014), 90-108.
[4] E.M. Bonotto, M.C. Bortolan, A.N. Carvalho, R. Czaja, Global attractors for impulsive dynamical systems - a precompact approach, *J. Differential Equations* 259 (2015), 2602-2625.
[5]R. Czaja, C. Rocha, Transversality in scalar reaction-diffusion equations on a circle, *J. Differential Equations* 245 (2008), 692-721.

(Numeracja prac jest zgodna z *Listą prac wchodzących w skład osiągnięcia* zamieszczoną w *Autoreferacie.*)