Autoreferat

1. Imię i nazwisko: Radosław Czaja
2. Posiadane dyplomy

1. Dyplom doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki uzyskany 29 czerwca 2004 roku w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach. Tytuł rozprawy doktorskiej: *Liniowe i semiliniowe abstrakcyjne równania paraboliczne*, promotor: prof. dr hab. Jan Cholewa.

2. Dyplom magistra matematyki (zastosowania matematyki) uzyskany 2 czerwca 2000 roku na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach. Tytuł pracy magisterskiej: *Równania różniczkowe z operatorem sektorialnym*, promotor: prof. dr hab. Tomasz Dłotko.

3. Zatrudnienie w jednostkach naukowych

1. Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach,
   od X 2004 do chwili obecnej (w tym dwa długoterminowe urlopy naukowe), adiunkt.

2. Instituto Superior Técnico w Lizbonie, Portugalia,
   IX 2009 – VIII 2014, Investigador Auxiliar.

3. Instituto Superior Técnico w Lizbonie, Portugalia,
   IX 2005 – VIII 2007, Postdoctoral Fellow.

4. Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach,
   X 2001 – IX 2004, asystent (pół etatu).

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311)
Wskazane osiągnięcie naukowe to cykl pięciu prac zatytułowany:

Aspekty asymptotyki półgrup i procesów ewolucyjnych.

4a. Lista prac wchodzących w skład osiągnięcia

[1] Radosław Czaja, Messoud Efendiev, Pullback exponential attractors for nonautonomous equations Part I: Semilinear parabolic problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 381 (2011), 748–765.

[2] Radosław Czaja, Messoud Efendiev, Pullback exponential attractors for nonautonomous equations Part II: Applications to reaction-diffusion systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 381 (2011), 766–780.

[3] Radosław Czaja, Pullback exponential attractors with admissible exponential growth in the past, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 104 (2014), 90–108.

[4] Everaldo de Mello Bonotto, Matheus Cheque Bortolan, Alexandre Nolasco de Carvalho, Radosław Czaja, Global attractors for impulsive dynamical systems - a precompact approach, *Journal of Differential Equations* 259 (2015), 2602–2625.

[5] Radosław Czaja, Carlos Rocha, Transversality in scalar reaction-diffusion equations on a circle, *Journal of Differential Equations* 245 (2008), 692–721.

4b. Omówienie ww. prac i osiągniętych wyników

Wprowadzenie

Procesy fizyczne i biologiczne zachodzące w czasie modeluje się najczęściej przy użyciu równań i układów równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych. Jeśli zagadnienie początkowe lub początkowo-brzegowe dla równania różniczkowego jest globalnie dobrze postawione, tzn. rozwiązania istnieją, są jednoznaczne, można je przedłużyć dla wszystkich czasów oraz zależą w sposób ciągły od warunków początkowych, to w przypadku równań autonomicznych taki problem generuje układ dynamiczny lub półgrupę $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ na danej przestrzeni metrycznej (V, d), zwanej przestrzenią fazową.

Pośród wielu zagadnień dotyczących półgrup jednym z ważniejszych jest badanie zachowania się trajektorii $t \mapsto T(t)u_0$ w czasie, przy czym nie interesują nas zachowania przejściowe, ale asymptotyczne, gdy $t \to \infty$. Szczególnie interesujące są układy fizyczne, w których następuje rozpraszanie energii. Są one opisane przez półgrupy dysypatywne, dla których istnieje zbiór ograniczony B_0, który przyciąga każdy podzbiór ograniczony B przestrzeni fazowej względem półodległości Hausdorffa

$$\operatorname{dist}_V(T(t)B, B_0) = \sup_{x\in B}\inf_{y\in B_0} d(T(t)x, y) \to 0, \text{ gdy } t \to \infty.$$

Badanie asymptotyki półgrup dysypatywnych na podzbiorach nieskończenie wymiarowych przestrzeni Banacha generowanych przez autonomiczne równania różniczkowe cząstkowe można zredukować do opisu globalnego atraktora $\mathcal{A}$ będącego zwartym zbiorem niezmienniczym,

$$T(t)\mathcal{A} = \mathcal{A},\ t \geqslant 0,$$

przyciągającym wszystkie ograniczone podzbiory przestrzeni fazowej. Istotnie, każda trajektoria $t \to T(t)u_0$ posiada po dostatecznie długim czasie swój „cień” w postaci trajektorii na globalnym atraktorze ([RO, Proposition 10.14]). Dlatego tak ważnymi zagadnieniami są: istnienie globalnego atraktora, jego charakteryzacja, budowa i geometria, dynamika na atraktorze czy jego strukturalna stabilność pod wpływem zaburzenia równania do niego prowadzącego. Tematyka ta była i jest badana na całym świecie na przestrzeni wielu lat i posiada bardzo bogatą literaturę (m.in. [HE1], [HA1], [LA], [B-V], [TE], [C-D], [RO], [S-Y]).

Globalny atraktor dla półgrupy jest obiektem jednoznacznie wyznaczonym i często ma skończony wymiar (fraktalny), ale przyciąganie do niego może być dowolnie wolne lub sam obiekt może być niewidoczny w symulacjach numerycznych (por. [E-Y-Y]). Potrzeba przezwyciężenia tych niedoskonałości umotywowała pojawienie się pojęcia eksponencjalnego atraktora. Eksponencjalny atraktor $\mathcal{M}$ dla półgrupy jest zbiorem zwartym, podniezmienniczym,

$$T(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M},\ t \geqslant 0,$$

o skończonym wymiarze fraktalnym

$$\dim_f^V(\mathcal{M}) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \log_{\frac{1}{\varepsilon}} N_\varepsilon^V(\mathcal{M}) < \infty,$$

gdzie $N_\varepsilon^V(\mathcal{M})$ oznacza najmniejszą liczbę kul o promieniu ε w V potrzebnych do pokrycia $\mathcal{M}$, i przyciągającym wykładniczo każdy zbiór ograniczony B przestrzeni fazowej w jednostajnym tempie $\omega > 0$

$$\lim_{t\to\infty} e^{\omega t} \operatorname{dist}_V(T(t)B, \mathcal{M}) = 0.$$

Chociaż obiekt ten nie jest jednoznacznie wyznaczony, wciąż zawiera globalny atraktor $\mathcal{A}$, przy czym jego istnienie implikuje istnienie i skończony wymiar globalnego atraktora. Pierwsze konstrukcje eksponencjalnego atraktora pochodzą z monografii [E-F-N-T] i prac [D-N], [E-M-Z].

W ostatnich latach coraz więcej uwagi poświęca się bardziej ogólnym, nieautonomicznym równaniom i układom równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych. W tym przypadku odpowiednikiem półgrupy jest proces ewolucyjny $\{U(t,s)\colon t \geqslant s\}$ na przestrzeni fazowej V. Jednakże nie ma jednego odpowiednika globalnego atraktora. Różne podejścia prowadzą zwykle do różnych pojęć opisujących asymptotyczne zachowanie się procesów ewolucyjnych jak atraktory jednostajne, globalne atraktory typu pullback, globalne atraktory typu forward (por. [CH], [C-V], [C-L-R], [K-R]). W ujęciu monografii [C-L-R] najbardziej uniwersalnym wydaje się być pojęcie globalnego atraktora typu pullback, czyli rodziny zbiorów zwartych $\{\mathcal{A}(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$, która jest niezmiennicza względem procesu,

$$U(t,s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(t),\ t \geqslant s,$$

przyciąga w sensie pullback każdy ograniczony podzbiór B przestrzeni fazowej

$$\operatorname{dist}_V(U(t,s)B, \mathcal{A}(t)) \to 0,\ \text{gdy } s \to -\infty,\ \text{dla każdego } t \in \mathbb{R},$$

i jest minimalna w sensie inkluzji wśród rodzin zbiorów domkniętych przyciągających w sensie pullback wszystkie zbiory ograniczone (zob. [C-L-R], [C-Ł-R], [C-C-L-R]).

Eksponencjalne atraktory typu pullback dla procesów ewolucyjnych

W 2009 roku wciąż nie istniały ogólne konstrukcje odpowiednika eksponencjalnego atraktora dla procesów ewolucyjnych, poza dyskretnym odpowiednikiem i szczególnym przypadkiem dla równań reakcji-dyfuzji z pracy [E-Z-M]. Konstrukcja takiego obiektu stanowi treść mojej pracy [1], wspólnie z Messoudem Efendievem, będącej częścią osiągnięcia naukowego. Artykuł [1] był jedną z trzech pierwszych, niezależnie obok [L-M-R] i [E-Y-Y], prac poświęconych ogólnym warunkom istnienia rodziny zbiorów zwartych $\{\mathcal{M}(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ w przestrzeni Banacha V, która jest podniezmiennicza względem procesu $\{U(t,s)\colon t \geqslant s\}$, tzn.

$$U(t,s)\mathcal{M}(s) \subset \mathcal{M}(t),\ t \geqslant s,$$

ma jednostajne po $t \in \mathbb{R}$ ograniczenie w V wymiaru fraktalnego i wykładniczo przyciąga w sensie pullback ograniczone podzbiory przestrzeni V, tzn. istnieje $\omega > 0$ taka, że dla każdego zbioru ograniczonego $B \subset V$ mamy

$$\lim_{s\to\infty} e^{\omega s} \operatorname{dist}_V(U(t,t-s)B, \mathcal{M}(t)) = 0 \text{ dla każdego } t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Rodzinę $\{\mathcal{M}(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ nazywamy eksponencjalnym atraktorem typu pullback.

Aby precyzyjnie przytoczyć wyniki z [1], rozważmy proces ewolucyjny $\{U(t,s)\colon t \geqslant s\}$ na przestrzeni Banacha V z normą $\|\cdot\|_V$. Zachodzi zatem

$$U(t,s)U(s,r) = U(t,r),\ t \geqslant s \geqslant r,\ U(t,t) = Id,\ t \in \mathbb{R}.$$

Ponieważ interesuje nas to, co działo się w przeszłości, wyróżniamy $t_0 \leqslant \infty$ i zbiór $\mathcal{T} = \{t \in \mathbb{R}\colon t \leqslant t_0\}$. Nasz wynik z 2011 roku dotyczy procesów, dla których istnieje ograniczony zbiór $B_0 \subset V$, który pochłania każdy zbiór ograniczony $B \subset V$ w sensie pullback jednostajnie względem $t \in \mathcal{T}$, tzn.

$$\exists_{T_B>0}\forall_{s\geqslant T_B} \bigcup_{t\in\mathcal{T}} U(t,t-s)B \subset B_0. \tag{2}$$

Następnym założeniem, kluczowym dla dowodu, jest tzw. własność wygładzania, stosowana już wcześniej np. w [M-P] do pokazania skończonego wymiaru fraktalnego zbioru. Mianowicie, zakładamy, że przestrzeń V jest zwarto zanurzona w pewną dodatkową przestrzeń unormowaną W z normą $\|\cdot\|_W$, a proces na B_0 spełnia, jednostajnie względem $t \in \mathcal{T}$, następujący warunek z $\kappa > 0$

$$\sup_{t\in\mathcal{T}} \|U(t,t-T_{B_0})u_1 - U(t,t-T_{B_0})u_2\|_V \leqslant \kappa \|u_1-u_2\|_W,\ u_1,u_2 \in B_0, \tag{3}$$

gdzie $T_{B_0} > 0$ jest czasem pochłaniania B_0 z (2). Dalej zakładamy także, że proces jest hölderowsko ciągły względem czasu początkowego dla czasów z $[T_{B_0}, 2T_{B_0}]$ oraz że jest hölderowsko ciągły również względem przesunięcia czasowego, tzn. istnieją $0 < \xi_1, \xi_2 \leqslant 1$ i stałe $c_1, c_2 > 0$ takie, że

$$\sup_{t\in\mathcal{T}} \|U(t,t-t_1)u - U(t,t-t_2)u\|_W \leqslant c_1 |t_1-t_2|^{\xi_1},\ t_1,t_2 \in [T_{B_0}, 2T_{B_0}],\ u \in B_0, \tag{4}$$

$$\sup_{t\in\mathcal{T}} \|U(t,t-T_{B_0})u - U(t-t_1,t-t_1-T_{B_0})u\|_W \leqslant c_2 t_1^{\xi_2},\ t_1 \in [0,T_{B_0}],\ u \in B_0. \tag{5}$$

Oczywiście dla autonomicznych procesów ewolucyjnych, pochodzących od półgrupy, powyższy warunek (5) jest spełniony trywialnie. W [1, Theorem 2.1] pokazujemy, że istnieje wtedy rodzina $\{\mathcal{M}(t)\colon t \in \mathcal{T}\}$ niepustych podzbiorów B_0, które są prezwarte (tzn. zwarte po domknięciu) w V, która jest podniezmiennicza względem procesu, tzn.

$$U(t,s)\mathcal{M}(s) \subset \mathcal{M}(t),\ t \geqslant s,\ t \in \mathcal{T}.$$

Wspomniana rodzina ma jednostajne względem $t \in \mathcal{T}$ ograniczenie wymiaru fraktalnego w V wyrażone przy użyciu stałych występujących w powyższych założeniach i parametru $\nu \in (0, \frac{1}{2})$, tzn.

$$\sup_{t\in\mathcal{T}} \dim_f^V(\mathcal{M}(t)) \leqslant \max\{\xi_1^{-1}, \xi_2^{-1}\}(1+\log_{\frac{1}{2\nu}}(1+\mu\kappa)) + \log_{\frac{1}{2\nu}} N^W_{\frac{\nu}{\kappa}}(B^V(0,1)),$$

gdzie $\mu > 0$ jest stałą z włożenia V w W

$$\|u\|_W \leqslant \mu \|u\|_V,\ u \in V,$$

natomiast $N^W_{\frac{\nu}{\kappa}}(B^V(0,1))$ oznacza najmniejszą liczbę kul w W o promieniu $\frac{\nu}{\kappa}$ potrzebnych do pokrycia kuli jednostkowej w V. Ponadto, rodzina ta wykładniczo przyciąga w sensie pullback ograniczone podzbiory V. Dokładniej, istnieje $\chi > 0$ takie, że dla każdego ograniczonego $B \subset V$ istnieje $c_B > 0$ takie, że

$$\sup_{t\in\mathcal{T}} \operatorname{dist}_V(U(t,t-s)B, \mathcal{M}(t)) \leqslant c_B e^{-\chi s},\ s \geqslant T_B + 2.$$

Jeśli założyć dodatkowo, że odwzorowanie

$$\operatorname{cl}_V B_0 \ni u \mapsto U(t,s)u \in V \tag{6}$$

jest ciągłe dla $t \geqslant s$, $t \in \mathcal{T}$, to biorąc domknięcia w V powyższych zbiorów $\mathcal{M}(t)$, możemy założyć, że zbiory tworzące tę rodzinę są zwarte, zawarte w $\operatorname{cl}_V B_0$. Zwróćmy uwagę, że rodzina z konstrukcji w [1, Theorem 2.1] nie jest jednoznacznie wyznaczona, chociażby ze względu na zależność od parametru ν.

Zgodnie z [1, Proposition 2.3], pod założeniami (2)-(6), istnieje też rodzina $\{\mathcal{A}(t)\colon t \in \mathcal{T}\}$ zwartych podzbiorów V, niezmiennicza względem procesu,

$$U(t,s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(t),\ t \geqslant s,\ t \in \mathcal{T},$$

która przyciąga w sensie pullback każdy zbiór ograniczony $B \subset V$ dla każdego $t \in \mathcal{T}$

$$\lim_{s\to\infty} \operatorname{dist}_V(U(t,t-s)B, \mathcal{A}(t)) = 0$$

i gdy $\{\tilde{\mathcal{A}}(t)\colon t \in \mathcal{T}\}$ jest rodziną zbiorów domkniętych w V przyciągającą w sensie pullback wszystkie zbiory ograniczone w V dla każdego $t \in \mathcal{T}$, to $\mathcal{A}(t) \subset \tilde{\mathcal{A}}(t)$, $t \in \mathcal{T}$. Rodzina ta dana jest wzorem

$$\mathcal{A}(t) = \operatorname{cl}_V \bigcup_{B\subset V,\ \text{ogr.}} \omega(B,t),\ t \in \mathcal{T},$$

gdzie $\omega(B,t)$ jest zbiorem $\omega-$granicznym typu pullback dla podzbioru B w chwili t

$$\omega(B,t) = \bigcap_{\tau\geqslant 0} \operatorname{cl}_V \bigcup_{s\geqslant\tau} U(t,t-s)B.$$

W szczególności, gdy $t_0 = \infty$ otrzymujemy istnienie globalnego atraktora typu pullback o jednostajnie ograniczonym wymiarze fraktalnym, zawartego w eksponencjalnym atraktorze typu pullback, który jest wówczas podzbiorem $\operatorname{cl}_V B_0$. Ponadto, przyciąganie zbiorów ograniczonych przez rodzinę $\{\mathcal{M}(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ jest jednostajne, tzn. istnieje $\omega > 0$ taka, że dla każdego zbioru ograniczonego $B \subset V$ zachodzi

$$\lim_{s\to\infty} e^{\omega s} \sup_{t\in\mathbb{R}} \operatorname{dist}_V(U(t,t-s)B, \mathcal{M}(t)) = 0,$$

co z kolei jest równoważne wykładniczemu jednostajnemu przyciąganiu typu forward, tzn.

$$\lim_{s\to\infty} e^{\omega s} \sup_{t\in\mathbb{R}} \operatorname{dist}_V(U(t+s,t)B, \mathcal{M}(t+s)) = 0.$$

W [1, Corollary 2.4] zauważamy, że aby uzyskać istnienie eksponencjalnego atraktora typu pullback wcale nie potrzebujemy zakładać, że $t_0 = \infty$. W przypadku, gdy $t_0 < \infty$, wystarczy założyć lipschitzowską ciągłość procesu

$$\forall_{t>0}\exists_{k(t)>0}\forall_{u_1,u_2\in B_0}\ \|U(t+t_0,t_0)u_1 - U(t+t_0,t_0)u_2\|_V \leqslant k(t)\,\|u_1-u_2\|_V \tag{7}$$

i zdefiniować brakujące zbiory rodziny jako $\mathcal{M}(t) = U(t,t_0)\mathcal{M}(t_0)$, $t \geqslant t_0$. Co prawda stracimy wtedy jednostajność wykładniczego przyciągania, ale wciąż będzie spełnione (1). Oczywiście istnienie globalnego atraktora typu pullback zawartego w eksponencjalnym atraktorze typu pullback również będzie zachodziło w tym przypadku (zob. [1, Proposition 2.5]).

W pracy [1] sformułowaliśmy warunki, przy których nieautonomiczne semiliniowe równanie paraboliczne generuje proces ewolucyjny spełniający założenia (2)–(7). Rozważamy następujący abstrakcyjny problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} u_t + Au = F(t,u), \ t > s, \\ u(s) = u_0, \end{cases} \tag{8}$$

gdzie A jest dodatnim operatorem sektorialnym (por. [HE1],[C-D],[6]) w przestrzeni Banacha X, mającym zwartą rezolwentę. Przez $X^\gamma = D(A^\gamma)$ oznaczamy przestrzenie potęg ułamkowych odpowiadające operatorowi A. Ustalamy $\alpha \in [0,1)$ i zakładamy, że nieliniowość $F\colon \mathbb{R} \times X^\alpha \to X$ jest hölderowsko ciągła względem czasu i lipschitzowsko ciągła na ograniczonych podzbiorach X^α. Precyzyjniej, dla każdego zbioru ograniczonego $B \subset X^\alpha$ istnieje $0 < \theta = \theta(B) < 1$ taka, że dla dowolnych $T_1, T_2 \in \mathbb{R}, T_1 < T_2$ istnieje stała Lipschitza $L = L(T_2 - T_1, B) > 0$ taka, iż

$$\|F(t_1,u_1) - F(t_2,u_2)\|_X \leqslant L(|t_1 - t_2|^\theta + \|u_1 - u_2\|_{X^\alpha}), \ t_1,t_2 \in [T_1,T_2], \ u_1,u_2 \in B. \tag{9}$$

Pod założeniem (9) dla dowolnego czasu początkowego $s \in \mathbb{R}$ i dla dowolnego warunku początkowego $u_0 \in X^\alpha$ istnieje jednoznaczne X^α rozwiązanie problemu (8), tzn.

$$u \in C([s,t_{max}), X^\alpha) \cap C((s,t_{max}), X^1) \cap C^1((s,t_{max}), X)$$

spełniające równanie różniczkowe z (8) w X i określone na maksymalnym przedziale istnienia $[s,t_{max})$ (por. [HE1], [C-D]).

Wyróżniamy zbiór $\mathcal{T} = \{t \in \mathbb{R} \colon t \leqslant t_0\}$ dla pewnego $t_0 \leqslant \infty$ i zakładamy, że dla pewnego $M > 0$

$$\sup_{t\in\mathcal{T}} \|F(t,0)\|_X \leqslant M. \tag{10}$$

Aby wykazać, że lokalne rozwiązania można przedłużyć na całą półprostą oraz otrzymać istnienie ograniczonego zbioru pochłaniającego w X^α, w zastosowaniach sprawdzamy odpowiednie oszacowanie a priori. W związku z tym zakładamy, że

$$\text{każde lokalne rozwiązanie można przedłużyć do globalnego, tzn. } t_{max} = \infty, \tag{11}$$

istnieje stała $a > 0$ i funkcja niemalejąca $Q\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ (obie niezależne od s) takie, że zachodzi

$$\|u(t)\|_{X^\alpha} \leqslant Q(\|u_0\|_{X^\alpha})e^{-a(t-s)} + R_0, \ s \leqslant t, \ t \in \mathcal{T}, \tag{12}$$

ze stałą $R_0 = R_0(t_0) > 0$ niezależną od s, t i u_0 oraz (w przypadku, gdy $t_0 < \infty$) dla każdego $T > 0$ istnieje $R_{T,s} > 0$ i funkcja niemalejąca $\widetilde{Q}_{T,s}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ takie, że

$$\|u(t)\|_{X^\alpha} \leqslant \widetilde{Q}_{T,s}(\|u_0\|_{X^\alpha}) + R_{T,s}, \ t \in [s, s+T]. \tag{13}$$

Założenia (11)–(13) można uprościć zastępując je mocniejszym warunkiem a priori, który zapewni dysypatywność w X^α. Mianowicie, niech

$$\|u(t)\|_{X^\alpha} \leqslant Q(\|u_0\|_{X^\alpha})e^{-a(t-s)} + R(t), \ t \in [s, t_{max}), \tag{14}$$

gdzie $a > 0$, $Q\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ jest funkcją niemalejącą, a $R\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną na $\mathcal{T}$.

Pod założeniami (9)–(13), X^α rozwiązania problemu (8) istnieją globalnie w czasie i generują proces ewolucyjny $\{U(t,s)\colon t \geqslant s\}$ na X^α, który spełnia założenia (2)–(7) z $V = X^\beta$ i $W = X^\alpha$ dla $\beta \in (\alpha, 1)$.

Twierdzenie 1 ([1, Theorem 3.6])**.** *Przy powyższych założeniach dla $\beta \in (\alpha, 1)$ istnieje rodzina $\{\mathcal{M}(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ niepustych zwartych podzbiorów X^β, podniezmiennicza względem procesu $\{U(t,s)\colon t \geqslant s\}$, która ma jednostajne po $t \in \mathbb{R}$ ograniczenie wymiaru fraktalnego w X^β i wykładniczo przyciąga w sensie pullback ograniczone podzbiory X^β. Dodatkowo, jeśli $t_0 = \infty$, to wykładnicze przyciąganie jest jednostajne po $t \in \mathbb{R}$. Ponadto, eksponencjalny atraktor typu pullback $\{\mathcal{M}(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ zawiera globalny atraktor typu pullback $\{\mathcal{A}(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ w przestrzeni X^β.*

Praca [2], która stanowi część osiągnięcia naukowego, jest naturalną ilustracją zagadnień poruszanych w [1] i zawiera zastosowania abstrakcyjnej teorii do nieautonomicznych równań i układów równań reakcji-dyfuzji.

W głównej części pracy [2] rozważamy, za [E-Z], nieautonomiczny układ równań reakcji-dyfuzji

$$\begin{cases} u_t + Au = f(u) + g(t),\ t > s,\ x \in \Omega, \\ u(s,x) = u_0(x),\ x \in \Omega, \quad u(t,x) = 0,\ t \geqslant s,\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{15}$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ jest obszarem ograniczonym z brzegiem $\partial\Omega$ klasy $C^{2+\eta}$. Szukaną funkcją jest $u(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_k(t,x))$, natomiast funkcje $f(u) = (f_1(u), \ldots, f_k(u))$ oraz $g(t,x) = (g_1(t,x), \ldots, g_k(t,x))$ są dane. Zakładamy, że $Au = (A_1u_1, \ldots, A_ku_k)$ jest eliptycznym operatorem drugiego rzędu, gdzie

$$A_lu_l(x) = \sum_{i,j=1}^{3} \partial_{x_i}(a^l_{ij}(x)\partial_{x_j}u_l(x)),\ x \in \Omega,\ l = 1, \ldots, k,$$

przy czym współczynniki $a^l_{ij} = a^l_{ji}$ są klasy $C^{1+\eta}(\overline{\Omega})$ i spełniają warunek jednostajnej silnej eliptyczności

$$\exists_{\nu>0}\forall_{l=1,\ldots,k}\forall_{x\in\Omega}\forall_{\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^3} \quad -\sum_{i,j=1}^{3} a^l_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \nu\,|\xi|^2 .$$

Ponadto zakładamy, że dla nieliniowości $f \in C(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ istnieją stałe $p_1, \ldots, p_k \geqslant 0$ oraz $q_1, \ldots, q_k \geqslant 0$ takie, że f spełnia warunek wzrostu

$$\exists_{c>0}\forall_{u=(u_1,\ldots,u_k),v=(v_1,\ldots,v_k)\in\mathbb{R}^k}\ |f(u)-f(v)|^2 \leqslant c\sum_{l=1}^{k}|u_l - v_l|^2\,(1 + |u_l|^{p_l} + |v_l|^{p_l}) \tag{16}$$

oraz anizotropowy warunek dysypatywności

$$\exists_{C>0}\forall_{u=(u_1,\ldots,u_k)\in\mathbb{R}^k}\ \sum_{l=1}^{k} f_l(u)u_l\,|u_l|^{q_l} \leqslant C. \tag{17}$$

Jeśli chodzi o zaburzenie zależne od czasu, to zakładamy, że

$$g\colon \mathbb{R} \to [L^2(\Omega)]^k \text{ jest globalnie hölderowsko ciągła z wykładnikiem } \theta \in (0,1] \tag{18}$$

oraz istnieje $t_0 \leqslant \infty$ takie, że

$$\sup_{t\in\mathcal{T}} \|g(t)\|_{[L^2(\Omega)]^k} < \infty, \tag{19}$$

gdzie, jak wyżej, przyjęliśmy, że $\mathcal{T} = \{t \in \mathbb{R} \colon t \leqslant t_0\}$.

W szczególności, jeśli $k = 2$ oraz dla $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ mamy

$$f_1(u_1, u_2) = \alpha u_1 + \beta u_1^2 - u_1^3 - \gamma u_2, \quad f_2(u_1, u_2) = \delta u_1 - \varepsilon u_2, \tag{20}$$

to układ (15) jest nieautonomicznym zaburzeniem układu FitzHugh-Nagumo modelującego transmisję impulsów nerwowych w aksonach. W tym przypadku, oba założenia (16) i (17) są spełnione z $p_1 = 4$, $p_2 = 0$ i $q_1 = q_2 = q$, gdzie $q \geqslant 0$ jest dowolne.

Innym szczególnym przypadkiem układu (15) jest model reakcji chemicznej z nieliniowością

$$f_1(u_1, u_2) = u_2 - u_1^3, \quad f_2(u_1, u_2) = u_1^3 - u_2. \tag{21}$$

Wówczas założenia (16) i (17) są spełnione z $p_1 = 4$, $p_2 = 0$ oraz $q_1 = 4$, $q_2 = \frac{2}{3}$, natomiast zwykły warunek dysypatywności ($q_1 = q_2 = 0$) nie zachodzi, ponieważ wyrażenie

$$(u_2 - u_1^3)u_1 + (u_1^3 - u_2)u_2 = (u_2 - u_1)(u_1^3 - u_2)$$

może przyjmować wartości dowolnie duże.

Rozważamy (15) jako abstrakcyjny problem Cauchy'ego (8) w przestrzeni $X = [L^2(\Omega)]^k$ z $F(t, u) = f(u) + g(t)$, przy czym A jest operatorem sektorialnym w X z dziedziną $D(A) = [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^k$ oraz ma zwartą rezolwentę.

Najpierw sprawdzamy w [2, Proposition 3.2], że $F \colon \mathbb{R} \times X^{\frac{1}{2}} \to X$, gdzie $X^{\frac{1}{2}} = [H_0^1(\Omega)]^k$ jest przestrzenią ułamkową, jest dobrze określona i spełnia warunek (9), o ile $0 \leqslant p_l \leqslant 4$, $l = 1, \ldots, k$. Założenie (10) łatwo sprawdzić, bo z (19) wynika, że

$$\sup_{t\in\mathcal{T}} \|F(t, 0)\|_{[L^2(\Omega)]^k} \leqslant \|f(0)\|_{[L^2(\Omega)]^k} + \sup_{t\in\mathcal{T}} \|g(t)\|_{[L^2(\Omega)]^k} < \infty.$$

Najtrudniejszym etapem badania układu (15) było wykazanie, że pod pewnymi warunkami na p_l i q_l spełnione są założenia (11)–(13). Kolejno wykazywaliśmy oszacowanie a priori

$$\sum_{l=1}^{k} \|u_l(t)\|_{L^{2+q_l}(\Omega)}^{2+q_l} \ \text{ i } \int_{t-h}^{t} \sum_{l=1}^{k} \left\|\left|\nabla(|u_l(\tau)|^{\frac{q_l+2}{2}})\right|\right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau$$

w [2, Proposition 3.5], oszacowanie a priori

$$\|u(t)\|_{[L^2(\Omega)]^k}^2 \ \text{ i } \int_{t-h}^{t} \sum_{l=1}^{k} \||\nabla u_l(\tau)|\|_{L^2(\Omega)}^2 \, d\tau$$

w [2, Proposition 3.7] i wreszcie oszacowanie a priori

$$\sum_{l=1}^{k} \||\nabla u_l(t)|\|_{L^2(\Omega)}^2$$

w [2, Proposition 3.8]. Prowadzą one do następującego wyniku, w którym sprawdzamy spełnienie założeń (11)–(13).

Twierdzenie 2 ([2, Corollary 3.9]). *Jeśli $p_l \leqslant q_l \leqslant 4$, $l = 1, \ldots, k$ i $u = (u_1, \ldots, u_k)$ jest $X^{\frac{1}{2}}$ rozwiązaniem (15) na $[s, t_{max})$, to $t_{max} = \infty$ i dla $t \geqslant s$, $t \in \mathcal{T}$ mamy*

$$\|u(t)\|_{[H_0^1(\Omega)]^k} \leqslant Q_1\Big(\|u(s)\|_{[H_0^1(\Omega)]^k} \Big) e^{-\frac{\lambda_1 \nu}{8}(t-s)} + Q_2\Big(\sup_{\tau \in (-\infty, t_0+2)} \|g(\tau)\|_{[L^2(\Omega)]^k} \Big),$$

gdzie Q_1, Q_2 są dodatnimi funkcjami niemalejącymi, a dla dowolnego $T > 0$ istnieją dodatnie funkcje niemalejące $\widetilde{Q}_1 = \widetilde{Q}_1(T)$, $\widetilde{Q}_2 = \widetilde{Q}_2(T)$ takie, że dla $s \leqslant t \leqslant s + T$ zachodzi

$$\|u(t)\|_{[H_0^1(\Omega)]^k} \leqslant \widetilde{Q}_1\Big(\|u(s)\|_{[H_0^1(\Omega)]^k} \Big) e^{-\frac{\lambda_1 \nu}{8}(t-s)} + \widetilde{Q}_2\Big(\sup_{\tau \in [s, s+T]} \|g(\tau)\|_{[L^2(\Omega)]^k} \Big),$$

gdzie $\lambda_1 > 0$ jest stałą z nierówności Poincaré.

Wobec powyższego możemy zastosować Twierdzenie 1. Głównym wynikiem pracy [2] jest zatem twierdzenie [2, Theorem 3.10] o istnieniu eksponencjalnego atraktora typu pullback oraz globalnego atraktora typu pullback o jednostajnie ograniczonym wymiarze fraktalnym w przestrzeni $[H_0^{2\beta}(\Omega)]^k$ z $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$ dla problemu (15), jeśli zachodzą warunki (16) i (17) z $0 \leqslant p_l \leqslant q_l \leqslant 4$, $l = 1, \ldots, k$, a nieautonomiczne zaburzenie spełnia (18) i (19). W szczególności dotyczy to zaburzenia układu FitzHugh-Nagumo (20) i nieliniowości (21).

Innym zastosowaniem teorii wprowadzonej w [1] jest zagadnienie początkowo-brzegowe typu Dirichleta dla nieautonomicznego równania Chafee-Infante postaci

$$\begin{cases} u_t = \triangle_D u + \lambda u - b(t) u^3, \ t > s, \ x \in \Omega, \\ u(s, x) = u_0(x), \ x \in \Omega, \quad u(t, x) = 0, \ t \geqslant s, \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{22}$$

w obszarze ograniczonym $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \leqslant 3$, o dostatecznie gładkim brzegu $\partial\Omega$, które było badane wcześniej m.in. w pracy [L-S]. W naszym przypadku zakładamy, że $\lambda \in \mathbb{R}$, a funkcja b jest hölderowsko ciągła na $\mathbb{R}$ z wykładnikiem $\theta \in (0, 1]$ oraz spełnia

$$0 < b(t) \leqslant M, \ t \in \mathbb{R},$$

z pewną stałą $M > 0$. Ponadto, zakładamy, że istnieją $t_0 \leqslant \infty$ i $m > 0$ takie, że

$$m \leqslant b(t), \ t \in \mathcal{T} = \{t \in \mathbb{R} \colon t \leqslant t_0\}.$$

Zauważamy, że zagadnienie (22) można rozważać jako abstrakcyjny problem Cauchy'ego (8) z $A = -\triangle_D$ w $X = L^2(\Omega)$ i dziedziną $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ oraz $F \colon \mathbb{R} \times X^{\frac{1}{2}} \to X$ daną wzorem $F(t, u) = \lambda u - b(t) u^3$, gdzie $X^{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega)$, która spełnia założenia (9) i (10). Aby sprawdzić warunek (14), wykazujemy oszacowanie a priori w przestrzeni $H_0^1(\Omega)$. Konkretnie, dostajemy

$$\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \sqrt{1 + 2|\lambda| + \lambda_1}\, \|u(s)\|_{H_0^1(\Omega)}\, e^{-\frac{\lambda_1}{2}(t-s)} + R(t),$$

gdzie

$$R(t) = R_0 \left(\lambda_1 m \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{-\lambda_1 (t-\tau)}}{b(\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}}, \ t \in \mathbb{R},$$

przy czym

$$R_0 = \sqrt{\frac{(1 + 2|\lambda| + \lambda_1)\lambda^2 |\Omega|}{2\lambda_1 m}},$$

a $\lambda_1 > 0$ jest pierwszą wartością własną rozważanego tu operatora Laplace'a.

Zatem możemy zastosować Twierdzenie 1 i otrzymać dla (22) istnienie eksponencjalnego atraktora typu pullback oraz globalnego atraktora typu pullback o jednostajnie ograniczonym wymiarze fraktalnym w przestrzeni $H_0^{2\beta}(\Omega)$ dla $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$, co stanowi treść [2, Corollary 2.1].

Wyniki omówionej wcześniej pracy [1] zaprezentowałem m.in. podczas ICMC Summer Meeting on Differential Equations Chapter 2011 w São Carlos w Brazylii w 2011 roku. Właśnie tam nasza konstrukcja wzbudziła zainteresowanie Alexandre Nolasco de Carvalho i Stefanie Sonner, którzy w 2013 roku w pracy [C-S1] uprościli ją i uogólnili. Po pierwsze, pozwolili, aby proces $\{U(t,s)\colon t \geqslant s\}$ na V był asymptotycznie zwarty jako suma $U = S + C$, gdzie rodzina operatorów S ma własność wygładzania względem przestrzeni V i dodatkowej przestrzeni W takiej, że V jest w nią zwarto włożona, natomiast C jest rodziną kontrakcji w przestrzeni V. Drugim ważnym aspektem było dopuszczenie zależności zbioru pochłaniającego B_0 od czasu, a tym samym możliwa nieograniczoność eksponencjalnego atraktora typu pullback również w przeszłości. Jednakże wspomniana zależność od czasu rodziny pochłaniającej $\{B(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ w pracy [C-S1] nie mogła być wykładnicza, ponieważ zbiory $B(t)$ mogły rosnąć w przeszłości jedynie podwykładniczo. Usunięcie tego założenia stanowi główny wynik mojej pracy [3], która stanowi część osiągnięcia naukowego.

W [3] zakładam, że

($\mathcal{A}_1$) istnieje rodzina niepustych domkniętych i ograniczonych podzbiorów $B(t)$, $t \in \mathbb{R}$, przestrzeni Banacha V, która jest podniezmiennicza względem procesu ewolucyjnego $\{U(t,s)\colon t \geqslant s\}$ na V, tzn. $U(t,s)B(s) \subset B(t)$, $t \geqslant s$,

($\mathcal{A}_2$) istnieją $t_0 \in \mathbb{R}$, $\gamma_0 \geqslant 0$ i $M > 0$ takie, że

$$\mathrm{diam}_V(B(t)) < Me^{-\gamma_0 t},\ t \leqslant t_0,$$

($\mathcal{A}_3$) w przeszłości rodzina $\{B(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ pochłania w sensie pullback wszystkie podzbiory ograniczone V, tzn. dla każdego zbioru ograniczonego D w V i $t \leqslant t_0$ istnieje $T_{D,t} \geqslant 0$ takie, że

$$U(t, t-r)D \subset B(t),\ r \geqslant T_{D,t},$$

a ponadto funkcja $(-\infty, t_0] \ni t \mapsto T_{D,t} \in [0,\infty)$ jest niemalejąca dla każdego takiego D, więc, w istocie mamy dla każdego D ograniczonego w V i $t \leqslant t_0$, że

$$U(s, s-r)D \subset B(s),\ s \leqslant t,\ r \geqslant T_{D,t}.$$

Zauważmy, że ($\mathcal{A}_2$) implikuje, iż dla każdego $\gamma > \gamma_0$

$$\mathrm{diam}_V(B(t))e^{\gamma t} \to 0,\ \text{gdy } t \to -\infty,$$

co uogólnia założenie użyte w [C-S1, Definition 3.1]. W szczególności, powyższe założenia dopuszczają wykładniczy wzrost w przeszłości zbiorów tworzących rodzinę pochłaniającą w sensie pullback.

Następnie zakładam, że rodzinę operatorów $\{U(t,s)\colon t_0 \geqslant t \geqslant s\}$ można przedstawić jako sumę

$$U(t,s) = C(t,s) + S(t,s),$$

gdzie $\{C(t,s)\colon t_0 \geqslant t \geqslant s\}$ i $\{S(t,s)\colon t_0 \geqslant t \geqslant s\}$ są rodzinami operatorów spełniających następujące własności:

($\mathcal{H}_1$) istnieje $\tilde{t} > 0$ takie, że $C(t, t-\tilde{t})$ są kontrakcjami na rodzinie pochłaniającej ze stałą kontrakcji niezależną od czasu, tzn.

$$\left\|C(t,t-\tilde{t})u - C(t,t-\tilde{t})v\right\|_V \leqslant \lambda \left\|u-v\right\|_V, \ t \leqslant t_0, \ u,v \in B(t-\tilde{t}),$$

gdzie $0 \leqslant \lambda < \frac{1}{2}e^{-\gamma_0 \tilde{t}}$ z $\gamma_0 \geqslant 0$ pochodzącą z założenia ($\mathcal{A}_2$),

($\mathcal{H}_2$) istnieje dodatkowa przestrzeń unormowana $(W, \|\cdot\|_W)$ taka, że V jest zanurzona w sposób zwarty w W, przy czym $\mu > 0$ spełnia

$$\|u\|_W \leqslant \mu \|u\|_V, \ u \in V,$$

natomiast operatory $S(t, t-\tilde{t})$ mają własność wygładzania na rodzinie pochłaniającej ze stałą $\kappa > 0$, czyli

$$\left\|S(t,t-\tilde{t})u - S(t,t-\tilde{t})v\right\|_V \leqslant \kappa \left\|u-v\right\|_W, \ t \leqslant t_0, \ u,v \in B(t-\tilde{t}).$$

W końcu zakładam również, że

($\mathcal{H}_3$) proces jest lipschitzowsko ciągły na rodzinie pochłaniającej, tzn. dla każdych $t \in \mathbb{R}$ i $s \in [t, t+\tilde{t}]$ istnieje stała $L_{t,s} > 0$ taka, że

$$\|U(s,t)u - U(s,t)v\|_V \leqslant L_{t,s} \|u-v\|_V, \ u,v \in B(t).$$

Założenie ($\mathcal{H}_3$) w istocie implikuje, że dla każdych $s \geqslant t$ istnieje stała $L_{t,s} > 0$ taka, że

$$\|U(s,t)u - U(s,t)v\|_V \leqslant L_{t,s} \|u-v\|_V, \ u,v \in B(t).$$

Zwróćmy uwagę, że założenia ($\mathcal{A}_1$) i ($\mathcal{H}_3$) zachodzą dla każdego $t \in \mathbb{R}$, podczas, gdy reszta założeń spełniona jest tylko w przeszłości, tzn. dla $t \leqslant t_0$.

Głównym wynikiem pracy [3] jest twierdzenie o istnieniu eksponencjalnego atraktora typu pullback przy powyższych założeniach, które dopuszczają w przeszłości wykładniczy wzrost rodziny pochłaniającej.

Twierdzenie 3 ([3, Theorem 2.2])**.** *Jeśli proces $\{U(t,s) \colon t \geqslant s\}$ na przestrzeni Banacha V spełnia ($\mathcal{A}_1$)-($\mathcal{A}_3$) i ($\mathcal{H}_1$)-($\mathcal{H}_3$), to dla każdego $\nu \in (0, \frac{1}{2}e^{-\gamma_0\tilde{t}} - \lambda)$ istnieje eksponencjalny atraktor typu pullback $\{\mathcal{M}(t) = \mathcal{M}^\nu(t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ w V o następujących własnościach:*

(a) $\mathcal{M}(t)$ jest niepustym i zwartym podzbiorem $B(t)$ dla $t \in \mathbb{R}$,

(b) $U(t,s)\mathcal{M}(s) \subset \mathcal{M}(t)$, $t \geqslant s$,

(c) wymiar fraktalny zbioru $\mathcal{M}(t)$ jest jednostajnie ograniczony po $t \in \mathbb{R}$, a mianowicie

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \dim_f^V(\mathcal{M}(t)) \leqslant \frac{-\ln N^W_{\frac{\nu}{\kappa}}(B_1^V(0))}{\ln(2(\nu+\lambda)) + \gamma_0 \tilde{t}},$$

gdzie $N^W_{\frac{\nu}{\kappa}}(B_1^V(0))$ oznacza najmniejszą liczbę kul w W o promieniu $\frac{\nu}{\kappa}$ i środkach w $B_1^V(0)$ potrzebną do pokrycia kuli jednostkowej $B_1^V(0)$ w V, *(d) dla każdego $t \in \mathbb{R}$ istnieje $c_t > 0$ takie, że dla każdego $s \geqslant \max\{t - t_0, 0\} + 2\tilde{t}$*

$$\mathrm{dist}_V(U(t, t-s)B(t-s), \mathcal{M}(t)) \leqslant c_t e^{-\omega_0 s},$$

gdzie $\omega_0 = -\frac{1}{\tilde{t}}\left(\ln\left(2(\nu + \lambda)\right) + \gamma_0 \tilde{t}\right) > 0$,

(e) dla każdego $0 < \omega < \omega_0$ i każdego zbioru ograniczonego $D \subset V$ mamy

$$\lim_{s\to\infty} e^{\omega s}\,\mathrm{dist}_V(U(t, t-s)D, \mathcal{M}(t)) = 0, \ t \in \mathbb{R}.$$

W [3, Corollary 2.6] sformułowałem ogólniejszy warunek, który może zastąpić własność wygładzania $(\mathcal{H}_2)$ w Twierdzeniu 3. Mianowicie,

(H_2) istnieje $N = N_\nu \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $t \leqslant t_0$, każdego $R > 0$ i każdego $u \in B(t - \tilde{t})$ istnieją $v_1, \ldots, v_N \in V$ takie, że

$$S(t, t-\tilde{t})(B(t-\tilde{t}) \cap B_R^V(u)) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\nu R}^V(v_i).$$

Oczywiście istnienie eksponencjalnego atraktora typu pullback pociąga istnienie globalnego atraktora typu pullback o jednostajnie ograniczonym wymiarze fraktalnym. Dokładniej, na podstawie [3, Corollary 2.8] mamy, że

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \dim_f^V(\mathcal{A}(t)) \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \dim_f^V(\omega_V(\hat{B}, t)) \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \dim_f^V(\mathcal{M}(t)) \leqslant \frac{-\ln N_\nu}{\ln\left(2(\nu+\lambda)\right) + \gamma_0 \tilde{t}},$$

gdzie $N_\nu = N^W_{\frac{\nu}{\kappa}}(B_1^V(0))$, o ile zachodzi $(\mathcal{H}_2)$, lub N_ν pochodzi z (H_2). Tutaj zbiór $\omega_V(\hat{B}, t)$ z $\hat{B} = \{B(t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ oznacza zbiór $\omega-$graniczny typu pullback dla rodziny $\hat{B}$ w chwili t, tj.

$$\omega_V(\hat{B}, t) = \bigcap_{s\leqslant t} \mathrm{cl}_V \bigcup_{r\leqslant s} U(t, r)B(r).$$

Ilustrację powyższych wyników teoretycznych stanowi między innymi nieautonomiczne równanie Chafee-Infante rozważane już w (22), lecz tym razem z warunkiem brzegowym typu Neumanna

$$\begin{cases} u_t = \triangle_N u + \lambda u - b(t)u^3, \ t > s, \ x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t, x) = 0, \ t > s, \ x \in \partial\Omega, \\ u(s, x) = u_0(x), \ x \in \Omega, \end{cases} \tag{23}$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest obszarem ograniczonym o gładkim brzegu $\partial\Omega$ oraz $s \in \mathbb{R}$, $\lambda \geqslant 0$, a $\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ oznacza pochodną normalną względem wersora zewnętrznego $\vec{n}$ na brzegu $\partial\Omega$.

Kluczowymi dla naszej teorii są własności czynnika nieautonomicznego, czyli funkcji $b \colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ klasy C^1 takiej, że

(i) $\lim_{t\to-\infty} b(t) = 0$,

(ii) istnieje $\beta_1 \in \mathbb{R}$ taka, że $\frac{b'(t)}{b(t)} \leqslant \beta_1, \ t \in \mathbb{R}$,

(iii) istnieją $\gamma_0 > 0$, $K > 0$ i $t_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $b(t) \geqslant K e^{\gamma_0 t}$ dla $t \leqslant t_0$.

Zwróćmy uwagę, że nasze założenie jest mniej restrykcyjne niż warunek z [C-S2], tj.

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{e^{\gamma t}}{b(t)}=0 \text{ dla każdego } \gamma>0.$$

W szczególności, w roli funkcji b można wziąć $b(t)=Ke^{\gamma_0 t}$ z pewnymi $K,\gamma_0>0$ dla bardzo ujemnych t i przedłużyć b na prawo tak, by zachodziło (ii).

Aby uzasadnić istnienie procesu ewolucyjnego $\{U(t,s)\colon t\geqslant s\}$ na przestrzeni

$$V=X^\alpha\subset\{u\in C^{2\alpha}(\overline{\Omega})\colon \frac{\partial u}{\partial\vec{n}}=0 \text{ na } \partial\Omega\} \text{ z } \frac{1}{2}<\alpha<1,$$

będącej przestrzenią ułamkową odpowiadającą operatorowi $-\triangle_N$ rozważanemu w $C(\overline{\Omega})$, wykazujemy oszacowanie a priori w przestrzeni $W=C(\overline{\Omega})$. Natomiast do uzyskania rodziny pochłaniającej w sensie pullback stosujemy metodę podrozwiązań i nadrozwiązań. Sprawdzamy założenia Twierdzenia 3 i otrzymujemy

Twierdzenie 4 ([3, Theorem 3.3])**.** *Proces $\{U(t,s)\colon t\geqslant s\}$ na przestrzeni V generowany przez (23) ma eksponencjalny atraktor typu pullback $\{\mathcal{M}(t)\colon t\in\mathbb{R}\}$ w V. W szczególności, istnieje globalny atraktor typu pullback $\{\mathcal{A}(t)\colon t\in\mathbb{R}\}$ w V taki, że dla każdego $\nu\in(0,\frac{1}{2}e^{-\frac{\gamma_0}{2}})$ mamy*

$$\mathcal{A}(t)\subset\mathcal{M}(t)=\mathcal{M}^\nu(t)\subset B(t)\subset\widetilde{B}(t),\ t\in\mathbb{R},$$

gdzie

$$\widetilde{B}(t)=\left\{u\in V\colon\ \|u\|_W\leqslant\frac{a}{\sqrt{b(t)}}\right\},\ t\in\mathbb{R},$$

z $a>0$ takim, że $a^2\geqslant\lambda+\frac{\beta_1}{2}$, natomiast

$$B(t)=\mathrm{cl}_V\, U(t,t-1)\widetilde{B}(t-1),\ t\in\mathbb{R},$$

przy czym

$$\mathrm{diam}_V(B(t))\leqslant\frac{2a\kappa(t)}{\sqrt{b(t-1)}},\ t\in\mathbb{R}\ i\ \mathrm{diam}_V(B(t))\leqslant\frac{2a\kappa(t_0)}{\sqrt{K}}e^{\frac{\gamma_0}{2}}e^{-\frac{\gamma_0}{2}t},\ t\leqslant t_0, \tag{24}$$

gdzie $\kappa\colon\mathbb{R}\to(0,\infty)$ jest pewną funkcją niemalejącą. Ponadto zachodzi oszacowanie

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\dim_f^V(\mathcal{A}(t))\leqslant\sup_{t\in\mathbb{R}}\dim_f^V(\mathcal{M}^\nu(t))\leqslant\frac{-\ln N^{W}_{\frac{\nu}{\kappa(t_0)}}(B_1^V(0))}{\ln(2\nu)+\frac{\gamma_0}{2}}.$$

Zauważmy, że jeśli warunek początkowy u_0 jest dodatnią funkcją stałą, to następująca funkcja niezależna od x

$$(U(t,s)u_0)(x)=\frac{e^{\lambda t}}{\sqrt{e^{2\lambda s}u_0^{-2}+2\int_s^t e^{2\lambda\tau}b(\tau)d\tau}},\ t\geqslant s,\ x\in\overline{\Omega},$$

jest rozwiązaniem problemu (23). Ponieważ $\mathcal{A}(t)$ przyciąga w sensie pullback singleton $\{u_0\}$ dla każdego $t\in\mathbb{R}$ oraz $U(t,s)u_0\to\xi(t)$ w V, gdy $s\to-\infty$, gdzie

$$\xi(t)(x)=\frac{e^{\lambda t}}{\sqrt{2\int_{-\infty}^t e^{2\lambda\tau}b(\tau)d\tau}},\ x\in\overline{\Omega},$$

więc mamy $\xi(t) \in \mathcal{A}(t)$. Rozwiązanie zerowe problemu (23) również należy do $\mathcal{A}(t)$, stąd

$$\frac{e^{\lambda t}}{\sqrt{2\int_{-\infty}^{t} e^{2\lambda\tau} b(\tau) d\tau}} \leqslant \operatorname{diam}_V(\mathcal{A}(t)) \leqslant \operatorname{diam}_V(\mathcal{M}(t)).$$

Jeśli $\lambda > 0$, to z (i) wynika, że

$$\operatorname{diam}_V(\mathcal{A}(t)) \to \infty \text{ i } \operatorname{diam}_V(\mathcal{M}(t)) \to \infty, \text{ gdy } t \to -\infty.$$

W szczególnym przypadku, gdy $b(t) = Ke^{\gamma_0 t}$, $t \leqslant t_0$, ze stałymi $\gamma_0, K > 0$, mamy z (24)

$$\sqrt{\frac{2\lambda + \gamma_0}{2K}} e^{-\frac{\gamma_0}{2}t} \leqslant \operatorname{diam}_V(\mathcal{A}(t)) \leqslant \operatorname{diam}_V(\mathcal{M}(t)) \leqslant \frac{2a\kappa(t_0)}{\sqrt{K}} e^{\frac{\gamma_0}{2}} e^{-\frac{\gamma_0}{2}t}, \ t \leqslant t_0,$$

co pokazuje, że $\mathcal{A}(t)$ i $\mathcal{M}(t)$ rosną wykładniczo w przeszłości.

W pracy [3] rozważam także ogólne równania reakcji-dyfuzji postaci

$$\begin{cases} u_t - \triangle u + f(t,u) = g(t), \ t > s, \ x \in \Omega, \\ u(s,x) = u_0(x), \ x \in \Omega, \quad u(t,x) = 0, \ t > s, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{25}$$

w obszarze ograniczonym $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o gładkim brzegu $\partial\Omega$. Zakładam przy tym, że $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ i istnieją stałe $p \geqslant 2$, $C_i > 0$, $i = 1, \ldots, 5$ takie, że zachodzi warunek wzrostu

$$C_1 |u|^p - C_2 \leqslant f(t,u)u \leqslant C_3 |u|^p + C_4, \ u \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R}, \tag{26}$$

a pochodna nieliniowości względem u jest ograniczona z dołu

$$f_u(t,u) \geqslant -C_5, \ u \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R}, \quad f(t,0) = 0, \ t \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Problem ten był badany w wielu pracach w różnych aspektach. Jeśli chodzi o istnienie globalnego atraktora typu pullback, to zostało ono uzyskane w przestrzeni $H^1_0(\Omega)$ w pracy [L-Z], gdy f nie zależy od czasu, a g ma wykładnicze oszacowanie postaci

$$\|g(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant M_0 e^{\alpha|t|}, \ t \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

z wykładnikiem $0 \leqslant \alpha < \lambda_1$ i $M_0 > 0$, gdzie $\lambda_1 > 0$ jest pierwszą wartością własną rozważanego operatora Laplace'a z warunkiem Dirichleta. Później ten sam rezultat został otrzymany w pracy [ŁU] (por. też [SO]) pod ogólniejszym założeniem niż (28):

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_1 s} \|g(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds < \infty, \ t \in \mathbb{R}.$$

Jeśli chodzi o jednostajne ograniczenie wymiaru fraktalnego globalnego atraktora typu pullback, to zostało ono wykazane w przestrzeni $L^2(\Omega)$ w pracy [C-L-V], ale jedynie pod dodatkowym założeniem o spełnieniu przez f globalnego warunku Lipschitza ze stałą zależną od czasu, tzn. gdy istnieje dodatnia i niemalejąca funkcja $\xi \colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ taka, że

$$|f(\tau,u) - f(\tau,v)| \leqslant \xi(t) |u - v|, \ \tau \leqslant t, \ u, v \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

oraz pod założeniem potęgowego wzrostu perturbacji g, tzn. gdy istnieją stałe $a, b > 0$ i $r \geqslant 0$ takie, że

$$\|g(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant a\,|t|^r + b,\ t \in \mathbb{R}.$$

W swojej pracy [3] jako założenia o f przyjąłem (26), (27) oraz (29). Dla funkcji g dopuściłem jednak nawet wzrost wykładniczy poprzez założenie (28).

Pod przyjętymi założeniami sprawdziłem założenia abstrakcyjnej teorii z [3, Corollary 2.6], w tym warunek (H_2), i wykazałem w [3, Theorem 4.3], że rozważany problem (25) generuje proces ewolucyjny w przestrzeni $H_0^1(\Omega)$ (oraz w $L^2(\Omega)$), który posiada eksponencjalny atraktor typu pullback $\{\mathcal{M}(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ w $H_0^1(\Omega)$, którego sekcje są niepustymi zwartymi podzbiorami $H_0^1(\Omega)$ i ich średnice są ograniczone przez funkcję wykładniczą z wykładnikiem $\frac{\alpha}{2}\,|t|$. Jeśli wybrać $\tilde{t} > 0$ i $t_0 \leqslant 0$, a przez λ_n oznaczyć ciąg wartości własnych rozważanego tutaj operatora Laplace'a, to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że zachodzi nierówność

$$\lambda := \left(e^{-\lambda_{n+1}\tilde{t}} + \lambda_{n+1}^{-1}\lambda_1^{-1}\xi^2(t_0)e^{2C_5\tilde{t}}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}e^{-\frac{\alpha}{2}\tilde{t}}. \tag{30}$$

Wówczas otrzymujemy explicite oszacowanie wymiaru fraktalnego $\mathcal{M}(t) = \mathcal{M}^\nu(t)$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \dim_f^{H_0^1(\Omega)}(\mathcal{M}^\nu(t)) \leqslant \frac{-n \ln\left(1 + 2\nu^{-1}e^{\frac{1}{2}\lambda_1^{-1}\xi^2(t_0)\tilde{t}}\right)}{\ln(2(\nu+\lambda)) + \frac{\alpha}{2}\tilde{t}} \tag{31}$$

dla wszystkich dostatecznie małych ν. Rodzina $\{\mathcal{M}(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ w tempie wykładniczym przyciąga w sensie pullback każdy zbiór ograniczony w $L^2(\Omega)$ względem półodległości Hausdorffa w $H_0^1(\Omega)$. Ponadto, proces ma globalny atraktor typu pullback $\{\mathcal{A}(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ w $H_0^1(\Omega)$ o jednostajnie ograniczonym wymiarze fraktalnym przez oszacowanie z (31), co, w szczególności, poprzez użyte założenie (28) stanowi uogólnienie wyników z pracy [C-L-V]. Warto na koniec zauważyć, że z nierówności (31) wynika po dalszym szacowaniu i przejściu w granicy z ν do 0, że

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \dim_f^{H_0^1(\Omega)}(\mathcal{A}(t)) \leqslant n,$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ spełnia (30).

Wyniki badań dotyczących eksponencjalnych atraktorów typu pullback, a zwłaszcza rezultaty swojej pracy [3], prezentowałem podczas odczytów na międzynarodowych konferencjach naukowych w Brazylii, Niemczech i Hiszpanii w 2014 roku. Zaanonsowałem je również podczas odczytu na zaproszenie Centro de Matemática da Universidade do Porto w Portugalii w 2013 roku.

Globalne atraktory dla impulsywnych układów dynamicznych

W 2014 roku w ramach programu Brazilian-European Partnership in Dynamical Systems (BREUDS) odbyłem miesięczny staż w Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação Uniwersytetu São Paulo w São Carlos, gdzie wspólnie z Alexandre Nolasco de Carvalho i Matheusem Bortolanem zajęliśmy się badaniem asymptotyki impulsywnych układów dynamicznych. Wspólnie stworzyliśmy nowe pojęcie globalnego atraktora dla takich układów i wraz z Everaldo de Mello Bonotto przygotowaliśmy artykuł [4], który jest częścią osiągnięcia naukowego.

Teoria impulsywnych układów dynamicznych opisuje zjawiska, w których ciągła ewolucja układu jest przerwana nagłą zmianą stanu. W układach, którymi się zajmowaliśmy, zmiany te zależą od stanu układu, a nie zachodzą w jawnie zdefiniowanych momentach. Możliwymi zastosowaniami są na przykład modele typu Lotki-Volterry z odławianiem (odstrzałem) w zależności od stanu populacji. Inspiracją do naszych badań była praca [B-D], w której autorzy starali się użyć standardowej definicji globalnego atraktora do problemów z impulsami, pomijając przy tym ogromną klasę impulsywnych układów dynamicznych.

Matematyczne podstawy wspomnianej teorii pochodzą z prac K. Ciesielskiego (np. [CI1]) i S. Kaula (np. [KA]), z których zaczerpnęliśmy używane przez nas pojęcia sekcji i tuby. Impulsywny układ dynamiczny składa się z ciągłej półgrupy $\{\pi(t)\colon t \geqslant 0\}$ na przestrzeni metrycznej (X, d), niepustego domkniętego podzbioru $M \subset X$, zwanego zbiorem impulsywnym, takiego, że dla każdego $x \in M$ istnieje $\varepsilon_x > 0$ taki, że

$$F(x, (0, \varepsilon_x)) \cap M = \emptyset \quad \text{i} \quad \bigcup_{t \in (0, \varepsilon_x)} \{\pi(t)x\} \cap M = \emptyset, \tag{32}$$

gdzie

$$F(D, J) = \bigcup_{t \in J} \pi(t)^{-1}(D), \ D \subset X, \ J \subset [0, \infty),$$

oraz z ciągłej funkcji $I\colon M \to X$, zwanej funkcją impulsywną. Warunek (32) oznacza pewnego rodzaju transwersalność półgrupy względem zbioru M.

Definiuje się funkcję $\phi\colon X \to (0, \infty]$ najmniejszego dodatniego czasu dotarcia punktu $x \in X$ do zbioru M wzorem

$$\phi(x) = \begin{cases} s, & \text{jeśli } \pi(s)x \in M \text{ i } \pi(t)x \notin M \text{ dla } 0 < t < s, \\ \infty, & \text{jeśli } \bigcup_{t>0} \{\pi(t)x\} \cap M = \emptyset. \end{cases} \tag{33}$$

Funkcji impulsywnej I używa się do konstrukcji półgrupy impulsywnej $\{\tilde{\pi}(t)\colon t \geqslant 0\}$ na X, która poza spełnieniem warunków

$$\tilde{\pi}(t+s) = \tilde{\pi}(t)\tilde{\pi}(s), \ t, s \geqslant 0, \ \tilde{\pi}(0) = Id,$$

zwykle nie jest ciągła. Trajektoria impulsywna $t \mapsto \tilde{\pi}(t)x$ punktu $x \in X$ pokrywa się z trajektorią $t \mapsto \pi(t)x$ aż do pierwszego dotarcia do zbioru M, po czym następuje skok przy użyciu funkcji $I\colon M \to X$ i z nowego punktu ewolucja przebiega znów zgodnie z półgrupą $\{\pi(t)\colon t \geqslant 0\}$ aż do ponownego dotarcia do zbioru M, itd. (por. szczegóły w [4]). W pracy zakładamy, że półgrupa $\{\tilde{\pi}(t)\colon t \geqslant 0\}$ jest dobrze zdefiniowana, co zachodzi na przykład, gdy $\phi(z) \geqslant \xi > 0$ dla każdego $z \in I(M)$.

Już prosty przykład [4, Example 1.5] pokazuje, że wymagania odnośnie atraktora z pracy [B-D] są zbyt restrykcyjne. Wprowadzamy nową definicję globalnego atraktora dla impulsywnego układu dynamicznego (X, π, M, I).

Definicja 5 ([4, Definition 1.6])**.** Podzbiór $\mathcal{A} \subset X$ nazywamy globalnym atraktorem dla impulsywnego układu dynamicznego (X, π, M, I), jeśli spełnia on następujące warunki:

(i) $\mathcal{A}$ jest prezwarty (tzn. zwarty po domknięciu w X) i $\mathcal{A} = \mathrm{cl}_X \mathcal{A} \setminus M$,

(ii) $\mathcal{A}$ jest $\tilde{\pi}-$niezmienniczy, tzn. $\tilde{\pi}(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, $t \geqslant 0$,

(iii) $\mathcal{A}$ $\tilde{\pi}-$przyciąga każdy zbiór ograniczony B w X, tj.

$$\mathrm{dist}_X(\tilde{\pi}(t)B, \mathcal{A}) = \sup_{x\in B} \inf_{y\in\mathcal{A}} d(\tilde{\pi}(t)x, y) \to 0, \text{ gdy } t \to \infty.$$

Łatwo widać, że tak określony obiekt jest jednoznacznie wyznaczony. Ponadto, przy tak postawionej definicji układ z [4, Example 1.5] posiada globalny atraktor o niespotykanych własnościach w przypadku ciągłych półgrup: atraktor nie jest spójny, składa się z dwóch izolowanych zbiorów niezmienniczych - orbity okresowej i punktu stacjonarnego, bez orbity łączącej je w atraktorze, a orbity osiągają orbitę okresową w skończonym czasie. To sprawia, że takie obiekty warto dokładniej badać.

Celem pracy [4] było stworzenie odpowiedników znanych klasycznych twierdzeń dla globalnych atraktorów z Definicji 5 dla impulsywnych układów dynamicznych.

Pokazaliśmy w [4, Proposition 4.3], że atraktor składa się z punktów, przez które przechodzi ograniczona pełna $\tilde{\pi}-$orbita, co odpowiada [C-D, Corollary 1.1.1 (iii)].

Podobnie w [4, Proposition 4.4] wykazaliśmy, że globalny atraktor jest sumą impulsywnych zbiorów $\omega-$granicznych (por. [4, Definition 3.1 i Lemma 3.2]) podzbiorów ograniczonych w X z wyrzuconymi punktami z M. Jest to odpowiednik rezultatu [C-D, Corollary 1.1.1 (i)].

W [4, Proposition 4.5] zaobserwowaliśmy, że globalny atraktor dla impulsywnego układu dynamicznego jest minimalny wśród wszystkich podzbiorów $K \subset X$ spełniających $K = \mathrm{cl}_X K \setminus M$, które $\tilde{\pi}-$przyciągają wszystkie ograniczone podzbiory X, co przypomina obserwację [C-D, Observation 1.1.3].

Głównym wynikiem pracy jest twierdzenie [4, Theorem 4.7], w którym dowodzimy istnienia globalnego atraktora dla silnie dysypatywnych impulsywnych układów dynamicznych. Stanowi ono odpowiednik twierdzenia [RO, Theorem 10.5].

Definicja 6 ([4, Definition 4.6])**.** Impulsywny układ dynamiczny (X, π, M, I) nazywamy silnie dysypatywnym, jeśli istnieje niepusty prezwarty zbiór K w X taki, że $K \cap M = \emptyset$, który $\tilde{\pi}$-pochłania wszystkie zbiory ograniczone w X, tzn., dla każdego zbioru ograniczonego B w X istnieje $t_B \geqslant 0$ takie, że $\tilde{\pi}(t)B \subset K$ dla wszystkich $t \geqslant t_B$.

Twierdzenie 7 ([4, Theorem 4.7])**.** *Niech (X, π, M, I) będzie silnie dysypatywnym impulsywnym układem dynamicznym z $\tilde{\pi}-$pochłaniającym zbiorem prezwartym K, spełniającym $I(M) \cap M = \emptyset$ oraz takim, że każdy punkt z M spełnia warunek (SSTC) (zob. szczegóły w [4, Definition 2.3]) i zachodzi $\phi(z) \geqslant \xi > 0$ dla wszystkich $z \in I(M)$. Wówczas (X, π, M, I) posiada globalny atraktor $\mathcal{A}$ i zachodzi*

$$\mathcal{A} = \tilde{\omega}(K) \setminus M. \tag{34}$$

Dowód Twierdzenia 7 sprowadza się do zweryfikowania własności z Definicji 5 dla zbioru określonego w (34). Nie jest to bynajmniej zadanie łatwe i wymaga rozbudowania teorii impulsywnych zbiorów $\omega-$granicznych, co czynimy w trzeciej zasadniczej części pracy [4]. Pierwszym krokiem jest wykazanie podniezmienniczości zbiorów postaci $\tilde{\omega}(B) \setminus M$, co robimy w [4, Proposition 3.7] pod założeniem spełnienia przez punkty z M tzw. silnego warunku tuby (STC), pochodzącego z prac K. Ciesielskiego i S. Kaula (por. [4, Definition 2.3]). Warunek ten gwarantuje między innymi półciągłość z góry funkcji ϕ w X i jej ciągłość w $X \setminus M$ (por. [CI2, Theorem 3.8]). Dużo trudniej jest wykazać nadniezmienniczość zbiorów postaci $\tilde{\omega}(B) \setminus M$. W tym celu zasugerowałem wprowadzenie specjalnego silnego warunku tuby (SSTC) z [4, Definition 2.3], co pozwoliło udowodnić nadniezmienniczość ([4, Proposition 3.12]) jak i $\tilde{\pi}-$przyciąganie przez zbiory postaci $\tilde{\omega}(B)\backslash M$ ([4, Proposition 3.14]).

Ostatnia czwarta część pracy [4] została napisana wraz z Everaldo de Mello Bonotto i zawiera ilustrację przedstawionej teorii dla układów równań różniczkowych zwyczajnych na płaszczyźnie, układów autonomicznych w $\mathbb{R}^N$ oraz dla nieliniowych równań reakcji-dyfuzji z warunkiem brzegowym Dirichleta. Zagadnienie dla układów planarnych, choć bardzo proste, pokazuje, że nasze abstrakcyjne założenia można zweryfikować w konkretnych przypadkach. Dla układów równań zwyczajnych w $\mathbb{R}^N$ jak i zagadnień początkowo-brzegowych dla równań reakcji-dyfuzji postaci

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u), \ t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \ t > 0, \quad u(0) = u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

z funkcją impulsywną, formułujemy warunki wystarczające na to, aby generowane impulsywne układy dynamiczne były silnie dysypatywne i w myśl Twierdzenia 7 posiadały globalne atraktory w sensie Definicji 5.

Omówione powyżej wyniki pracy [4] zaprezentowałem podczas odczytów na VII Symposium on Nonlinear Analysis na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu w 2015 roku oraz na 6th IST-IME Meeting w Lizbonie w 2016 roku. Przedstawiłem je również podczas odczytu na zaproszenie Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego w 2015 roku.

Praca [4] stanowi podstawę do badania strukturalnej stabilności dla impulsywnych układów dynamicznych. W pracy [12] wykazujemy, że, pod pewnymi kolektywnymi warunkami tuby, globalne atraktory $\mathcal{A}_\eta$, $\eta \in [0,1]$, dla rodziny impulsywnych układów dynamicznych $(X, \pi_\eta, M_\eta, I_\eta)$, $\eta \in [0,1]$, zachowują się w sposób półciągły z góry w $\eta = 0$, tzn.

$$\lim_{\eta\to 0} \operatorname{dist}_X(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) = 0. \tag{35}$$

Aspekty strukturalnej stabilności

Praca [5], która stanowi część osiągnięcia naukowego, została napisana przeze mnie wspólnie z Carlosem Rochą podczas mojego stażu postdoktorskiego w Instituto Superior Técnico w Lizbonie w latach 2005-2007. Dotyczy ona transwersalności rozmaitości stabilnych i niestabilnych hiperbolicznych orbit okresowych dla skalarnych równań reakcji-dyfuzji z okresowym warunkiem brzegowym.

Pojęcie transwersalności rozmaitości niezmienniczych elementów krytycznych odgrywa ważną rolę w twierdzeniach dotyczących własności typowych, tzn. zachodzących w zbiorze rezydualnym, czyli przeliczalnym przekroju gęstych zbiorów otwartych. Przykładem jest tutaj twierdzenie Kupki-Smale'a (por. [P-M, Chapter 3], [SZ, Twierdzenie 3.7.1]) o rezydualności zbioru tzw. pól wektorowych Kupki-Smale'a w przestrzeni pól wektorowych klasy C^r, $r \geqslant 1$, na zwartej rozmaitości różniczkowej. Przypomnijmy, że pole wektorowe X na zwartej rozmaitości różniczkowej ma własność Kupki-Smale'a, jeśli wszystkie punkty krytyczne i orbity okresowe dla X są hiperboliczne, a ich rozmaitości niezmiennicze przecinają się transwersalnie. Transwersalność rozmaitości niezmienniczych elementów krytycznych jest również podstawą twierdzeń o strukturalnej stabilności. Mówimy, że pole wektorowe X klasy C^r, $r \geqslant 1$, na zwartej rozmaitości różniczkowej M jest strukturalnie stabilne, jeśli istnieje otoczenie U pola X takie, że każde pole $Y \in U$ jest topologicznie równoważne X, czyli istnieje homeomorfizm rozmaitości M, który przeprowadza orbity X na Y z zachowaniem ich orientacji. Mówimy, że (por. [P-M, Chapter 4]) pole wektorowe X klasy C^r, $r \geqslant 1$, na M jest polem Morse'a-Smale'a, jeśli X ma skończenie wiele elementów krytycznych, które wszystkie są hiperboliczne, ich rozmaitości niezmiennicze przecinają się transwersalnie, a zbiór punktów niebłądzących jest sumą elementów krytycznych. J. Palis i S. Smale wykazali w [PA], [P-S], że pola Morse'a-Smale'a tworzą zbiór otwarty w przestrzeni pól wektorowych klasy C^r, $r \geqslant 1$, na M i są strukturalnie stabilne.

Dla półgrup twierdzenie o A-strukturalnej stabilności półgrup Morse'a-Smale'a zostało wykazane przez W.M. Olivę (por. [OL], [H-M-O, Chapter 6]). Zakłada się, że $\mathcal{F}$ jest przestrzenią topologiczną parametrów półgrup $\{T_f(t)\colon t \geqslant 0\}$ klasy C^k na przestrzeni Banacha X, które mają globalne atraktory $\mathcal{A}_f$ w X, odwzorowanie $\mathcal{F} \ni f \mapsto \mathcal{A}_f \in X$ jest półciągłe z góry oraz $T_f(t)|_{\mathcal{A}_f}$ i $DT_f(t)|_{\mathcal{A}_b(DT_f)}$ są różnowartościowe dla $t \geqslant 0$. Wśród $f \in \mathcal{F}$ wyróżniamy $f \in MS$, dla których półgrupa $\{T_f(t)\colon t \geqslant 0\}$ na X jest półgrupą Morse'a-Smale'a, tzn. ma ona skończenie wiele elementów krytycznych (punktów stacjonarnych i orbit okresowych), które wszystkie są hiperboliczne, a ich suma tworzy zbiór punktów niebłądzących, a także niestabilne rozmaitości elementów krytycznych mają skończony wymiar i przecinają się transwersalnie z lokalnymi rozmaitościami stabilnymi. Wówczas zbiór MS jest otwarty w $\mathcal{F}$ oraz każde $f \in MS$ jest A-strukturalnie stabilne, czyli istnieje otoczenie U parametru $f \in \mathcal{F}$ takie, że dla każdego $g \in U$ mamy homeomorfizm $h = h(g)\colon \mathcal{A}_f \to \mathcal{A}_g$ przeprowadzający orbity w $\mathcal{A}_f$ na orbity w $\mathcal{A}_g$ z zachowaniem orientacji.

Jedne z pierwszych przykładów nieskończenie wymiarowych półgrup Morse'a-Smale'a generowanych przez równania różniczkowe cząstkowe pochodzą z prac D. Henry'ego [HE2] i S. Angenenta [AN1] i dotyczą skalarnych semiliniowych równań parabolicznych z warunkami brzegowymi typu Dirichleta lub Neumanna, dla których elementami krytycznymi są jedynie rozwiązania stacjonarne. W szczególności dotyczy to równania Chafee-Infante. Problem automatycznej transwersalności przecięć rozmaitości niezmienniczych dla punktów stacjonarnych rozważany był również w pracy [C-C-H] dla nieautonomicznego (okresowego w czasie) skalarnego semiliniowego równania parabolicznego z nieliniowością zależną jedynie od czasu, zmiennej przestrzennej i rozwiązania oraz z jednorodnym warunkiem brzegowym Dirichleta, a także dla problemów w symetrycznych obszarach w $\mathbb{R}^N$ w pracy [PO]. W pracy [F-O] wykazano automatyczną transwersalność rozmaitości niezmienniczych dla punktów stacjonarnych i orbit okresowych w przypadku specjalnych klas układów równań różniczkowych zwyczajnych.

W naszej pracy [5] rozważamy następujące skalarne równanie reakcji-dyfuzji z okresowymi warunkami brzegowymi, a nieliniowość $f\colon S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zależy od $x \in S^1$, rozwiązania u i jego pochodnej przestrzennej, tzn.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x, u, u_x), \ x \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \\ u(0, x) = u_0(x), \ x \in S^1. \end{cases} \tag{36}$$

Zakładamy, że f jest klasy C^2 i ma podkwadratowy wzrost względem u_x, tzn.

$$\text{istnieje } 0 \leqslant \gamma < 2 \text{ i istnieje funkcja ciągła } k\colon [0,\infty) \to [0,\infty) \text{ takie, że}$$
$$|f(x,y,z)| \leqslant k(r)(1 + |z|^\gamma), \ (x,y,z) \in S^1 \times [-r,r] \times \mathbb{R} \text{ dla każdego } r > 0,$$

oraz spełnia warunek dysypatywności

$$yf(x,y,0) < 0, \ (x,y) \in S^1 \times \mathbb{R}, \ |y| \geqslant K \text{ dla pewnego } K > 0.$$

Jeśli ustalimy $\alpha \in (\frac{3}{4}, 1)$, to przestrzeń ułamkowa $X^\alpha = H^{2\alpha}(S^1)$ odpowiadająca operatorowi $Au = -u_{xx} + u$ w $L^2(S^1)$ zanurza się w przestrzeń funkcji klasy C^1 na okręgu. Dzięki założeniom o f, każde X^α rozwiązanie problemu (36) istnieje globalnie w czasie i możemy skonstruować półgrupę $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ globalnych X^α rozwiązań. Półgrupa ta jest zwarta i punktowo dysypatywna, więc posiada globalny atraktor $\mathcal{A}$ w X^α, który jest sumą wszystkich ograniczonych pełnych orbit, tj. określonych na $\mathbb{R}$. Ponadto w [5, Section 3] pokazujemy, że każdy operator $T(t)$ jest różnowartościowy, linearyzacja wokół każdego rozwiązania definiuje liniowy proces ewolucyjny na X^α złożony z operatorów zwartych i ograniczonych, przy czym każdy taki operator jest różnowartościowy i ma gęsty zbiór wartości.

Mając globalny atraktor chcielibyśmy poznać jego budowę. W pracach [A-F] i [F-R-W] wykazano, że jeśli nieliniowość f nie zależy explicite od x, to atraktor składa się wyłącznie z punktów stacjonarnych i tzw. fal obracających się, tzn. orbit rozwiązań okresowych postaci

$$u(t, x) = v(x - ct),\ t \in \mathbb{R},\ x \in S^1 \text{ z pewnym } c \neq 0,$$

oraz połączeń heteroklinicznych między tymi elementami krytycznymi, o których zakłada się, że wszystkie są hiperboliczne. Jednakże z pracy [S-F] wynika, że w przypadku, gdy nieliniowość f zależy jawnie od x, w atraktorze mogą pojawić się również orbity homokliniczne. Pierwszym celem naszej pracy [5] było wykazanie, że takie homokliniczne połączenie nie może występować dla hiperbolicznej orbity okresowej. Drugim było udowodnienie, że jeśli mamy dwie różne hiperboliczne orbity okresowe, to ich stabilne i niestabilne rozmaitości przecinają się transwersalnie, tzn. przestrzenie styczne do tych rozmaitości w każdym punkcie przecięcia dopełniają się do całej przestrzeni X^α.

Głównym narzędziem stosowanym w dowodach jest tzw. teoria liczby zer funkcji klasy C^1 rozwinięta przez H. Matano [MA] (zob. też [B-F], [AN2]) a nawiązująca do klasycznych wyników C. Sturma [ST]. Jeśli przez $z(\varphi)$ oznaczyć (parzystą) liczbę zmian znaku funkcji $\varphi\colon S^1 \to \mathbb{R}$ klasy C^1, to (por. [5, Lemmas 3.1, 3.2] i [M-N, Lemmas 3.2, 3.4]) mając dwa różne X^α rozwiązania problemu (36) na przedziale J, ich różnica $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$, $t \in J$, spełnia warunki:

(i) $z(v(t))$ jest liczbą skończoną dla każdego $t \in J$,

(ii) $z(v(t))$ jest funkcją nierosnącą zmiennej t na J,

(iii) $z(v(t))$ silnie maleje w $t = t_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $x_0 \in S^1$ takie, że

$$v(t_0)(x_0) = 0,\ \partial_x v(t_0)(x_0) = 0.$$

Drugim ważnym elementem naszych rozważań są własności spektralne tzw. odwzorowania okresu (por. [HE1, Definition 7.2.1], [5, Section 4]) T_ω dla linearyzacji naszego równania wokół rozwiązania okresowego p o okresie $\omega > 0$ wyznaczającego orbitę okresową Π. Operator T_ω odpowiada macierzy monodromii dla liniowych równań różniczkowych zwyczajnych o współczynnikach okresowych. Podobnie jak w klasycznej teorii, jego wartości własne nazywamy mnożnikami charakterystycznymi. Jeśli ustawić je w ciąg $\{\lambda_j\}_{j\geqslant 0}$ tak, aby pojawiały się w nim zgodnie z krotnościami algebraicznymi i były uporządkowane poprzez nierówność $|\lambda_{j+1}| \leqslant |\lambda_j|$, to na mocy pracy [A-F] mamy, że dla wszystkich $j \geqslant 0$ zachodzi $|\lambda_{2j+1}| < |\lambda_{2j}|$. Innymi słowy, oznaczając przez $E_j(\Pi)$ rzeczywistą uogólnioną podprzestrzeń własną odpowiadającą $\{\lambda_{2j-1}, \lambda_{2j}\}$ dla $j \geqslant 1$ i przez $E_0(\Pi)$

rzeczywistą podprzestrzeń własną odpowiadającą izolowanej wartości własnej λ_0, wiemy, że $\dim E_0(\Pi) = 1$ i $\dim E_j(\Pi) = 2$, $j \geqslant 1$. Ponadto, z [A-F, Theorem 2.2] wynika, że każda funkcja niezerowa $\phi \in E_j(\Pi)$, $j \geqslant 0$, ma tylko zera pojedyncze i $z(\phi) = 2j$.

Wyróżniamy elementy spektrum leżące wewnątrz koła jednostkowego, na okręgu jednostkowym i na zewnątrz koła jednostkowego. Liczbę tych ostatnich liczonych z krotnościami oznaczamy przez $i(\Pi)$ i nazywamy indeksem Morse'a orbity okresowej Π.

Badamy sytuację, w której orbita okresowa Π jest hiperboliczna, czyli odpowiadające jej odwzorowanie okresu T_ω ma jako mnożnik charakterystyczny jedynkę, która jest wartością własną pojedynczą i jedyną na okręgu jednostkowym. Odpowiada jej funkcja własna $p_t(0)$.

Najpierw rozważamy lokalną stabilną rozmaitość $W^s_{loc}(\Pi)$ dla hiperbolicznej orbity okresowej Π o okresie $\omega > 0$. Głównym wynikiem tej części jest [5, Theorem 5.2].

Twierdzenie 8. *Dla warunku początkowego $u_0 \in W^s_{loc}(\Pi) \setminus \Pi$ istnieje faza $a \in \Pi$ oraz $\kappa > 0$ takie, że*

$$\lim_{t\to\infty} e^{\kappa t} \left\| T(t)u_0 - T(t)a \right\|_{X^\alpha} = 0$$

oraz, dla $2N = z(p_t(0; a))$ z $p(t; a) = T(t)a$, mamy

$$z(u_0 - a) \geqslant \begin{cases} i(\Pi) + 1 = 2N, & \textit{jeśli } \ i(\Pi) = 2N - 1, \\ i(\Pi) + 2 = 2N + 2, & \textit{jeśli } \ i(\Pi) = 2N. \end{cases} \tag{37}$$

Następnie badamy niestabilną rozmaitość $W^u(\Pi)$ i podobnie jak poprzednio otrzymujemy następujący rezultat w [5, Theorem 6.2].

Twierdzenie 9. *Dla każdego $u_0 \in W^u(\Pi) \setminus \Pi$ istnieje faza $a \in \Pi$ oraz $\kappa' > 0$ takie, że*

$$\lim_{t\to\infty} e^{\kappa' t} \left\| T(t)^{-1}u_0 - T(t)^{-1}a \right\|_{X^\alpha} = 0$$

oraz, dla $2N = z(p_t(0; a))$ z $p(t; a) = T(t)a$, mamy

$$z(u_0 - a) \leqslant \begin{cases} i(\Pi) - 1 = 2N - 2, & \textit{jeśli } \ i(\Pi) = 2N - 1, \\ i(\Pi) = 2N, & \textit{jeśli } \ i(\Pi) = 2N. \end{cases} \tag{38}$$

Oba te wyniki prowadzą do wykluczenia istnienia homoklinicznej orbity dla hiperbolicznej orbity okresowej. Istotnie, rozważmy dwie (niekoniecznie różne) hiperboliczne orbity okresowe Π^- i Π^+ o okresach $\omega^- > 0$ i $\omega^+ > 0$, odpowiednio. Zakładamy, że istnieje punkt

$$u_0 \in (W^u(\Pi^-) \cap W^s_{loc}(\Pi^+)) \setminus (\Pi^- \cup \Pi^+).$$

W szczególności, jeśli $\Pi^- = \Pi^+$, to u_0 leży na orbicie homoklinicznej dla orbity okresowej. Z powyższych twierdzeń wynika, że istnieją odpowiednie fazy $a^\pm \in \Pi^\pm$ i odpowiednie rozwiązania okresowe $p^\pm$ takie, że

$$\left\| u(t; u_0) - p^+(t; a^+) \right\|_{X^\alpha} \to 0 \text{ i } \left\| u(-t; u_0) - p^-(-t; a^-) \right\|_{X^\alpha} \to 0, \text{ gdy } t \to \infty.$$

Ponadto, zachodzi

$$z(u_0 - a^-) \geqslant z(u_0 - a^+),$$

co wraz z oszacowaniami (37) i (38) dla orbit $\Pi^\pm$ prowadzi do jednego z dwóch głównych wyników pracy [5].

Twierdzenie 10 ([5, Theorem 7.3]). *Oznaczając $2N^{\pm} = z(p_t^{\pm}(0;a^{\pm}))$, zachodzą nierówności*

$$N^- \geqslant N^+ \quad \textit{oraz} \quad i(\Pi^-) \geqslant i(\Pi^+) + 1,$$

co wyklucza istnienie homoklinicznego połączenia dla hiperbolicznej orbity okresowej dla (36)*. Ponadto, jeśli $i(\Pi^+) = 2N^+$, to zachodzi nawet*

$$N^- \geqslant N^+ + 1.$$

Drugim głównym wynikiem pracy [5] jest automatyczna transwersalność przecięcia rozmaitości niestabilnej i rozmaitości stabilnej dla dwóch różnych hiperbolicznych orbit okresowych dla problemu (36) uzyskana w [5, Theorem 8.2].

Twierdzenie 11. *Stabilna i niestabilna rozmaitość dla dwóch hiperbolicznych orbit okresowych $\Pi^{\pm}$ dla problemu* (36) *mają transwersalne przecięcie*

$$W^u(\Pi^-) \pitchfork W^s_{loc}(\Pi^+),$$

tzn. jeśli $u_0 \in T(\tau)W^u_{loc}(\Pi^-) \cap W^s_{loc}(\Pi^+)$ dla pewnego $\tau \geqslant 0$, to

$$T_{u_0}T(\tau)W^u_{loc}(\Pi^-) + T_{u_0}W^s_{loc}(\Pi^+) = X^{\alpha}.$$

Dowód opiera się na ideach pochodzących z pracy [C-C-H]. Oznaczamy odpowiednie fazy przez $a^{\pm}$ jak powyżej, a rozwiązania okresowe przez $p^{\pm}$. Niech $2N^{\pm}$ będą liczbami zer funkcji własnych odpowiadających mnożnikom charakterystycznym 1. W dowodzie używamy następującej obserwacji: dla niezerowych funkcji z podprzestrzeni stycznej w u_0 do lokalnej rozmaitości stabilnej dla Π^+ liczba zer jest większa lub równa $2N^+$. Ponadto, istnieje podprzestrzeń W^+ przestrzeni stycznej w u_0 do lokalnej stabilnej rozmaitości orbity Π^+ kowymiaru $2N^+ + 1$ i z liczbą zer większą lub równą $2N^+ + 2$. Następnie rozważamy dwa przypadki w zależności od indeksu Morse'a dla orbity Π^+. Niech $i(\Pi^+) = 2N^+ - 1$. Wówczas kowymiar lokalnej rozmaitości stabilnej wynosi $2N^+ - 1$. Ponieważ na mocy Twierdzenia 10 mamy $N^- \geqslant N^+$, wiemy, że suma prosta $E_0 \oplus \ldots \oplus E_{N^+-1}$ podprzestrzeni odpowiadających punktowi a^- jest podprzestrzenią przestrzeni stycznej do rozmaitości niestabilnej dla Π^- w a^-. Ponadto, liczba zer dla niezerowych funkcji z tej przestrzeni nie przekracza $2N^+ - 2$. Ponieważ jesteśmy na C^1 podrozmaitości X^{α} i ciąg $u(-m\omega^-)$ zmierza do a^-, gdy $m \to \infty$, więc istnieje dla dużych m podprzestrzeń przestrzeni stycznej w $u(-m\omega^-)$ do rozmaitości niestabilnej o tym samym wymiarze i tym samym oszacowaniu dla liczby zer. Następnie poruszamy się do punktu u_0 używając operatorów ewolucyjnych dla linearyzacji wokół rozwiązania łączącego u. Ponieważ te operatory są różnowartościowe i nie powiększają liczby zer, otrzymujemy podprzestrzeń przestrzeni stycznej do rozmaitości niestabilnej w u_0 o wymiarze równym kowymiarowi lokalnej rozmaitości stabilnej. Dodatkowo, przestrzeń ta ma trywialny przekrój z przestrzenią styczną do rozmaitości stabilnej w u_0 dzięki oszacowaniom liczby zer. Pokazuje to, że w tym przypadku przestrzenie styczne dopełniają się do całej przestrzeni X^{α}.

Analiza przypadku, gdy $i(\Pi^+) = 2N^+$ jest podobna, ale tym razem używamy nierówności $N^- \geqslant N^+ + 1$ z Twierdzenia 10 i z przestrzeni stycznej do lokalnej rozmaitości stabilnej w u_0 wybieramy podprzestrzeń W^+ o kowymiarze $2N^+ + 1$. Ponownie implikuje to, że przestrzenie styczne dopełniają się do całej przestrzeni X^{α} również w tym przypadku.

Powyższe wyniki pracy [5] przedstawiłem między innymi na konferencji ICMC Summer Meeting on Differential Equations 2008 Chapter na Universidade de São Paulo w São Carlos w Brazylii. Podczas tej konferencji R. Joly wygłosił odczyt o wynikach jego wspólnych badań z G. Raugel, opublikowanych później w pracy [J-R1], w którym przedstawił dowód typowości hiperboliczności punktów stacjonarnych i orbit okresowych dla skalarnych równań parabolicznych postaci (36) z f z przestrzeni $\mathcal{F} = C^2(S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ wyposażonej w topologię Whitneya (zob. [J-R1, Theorem 1.2]). We wspólnej rozmowie czworga autorów zorientowaliśmy się, że rozumowanie, które opisałem powyżej, daje się natychmiast zastosować do przypadku przecięcia rozmaitości stabilnej i niestabilnej, gdy jednym z elementów krytycznych jest hiperboliczny punkt stacjonarny, a drugim hiperboliczna orbita okresowa. Zatem również w tym przypadku zachodzi automatyczna transwersalność rozmaitości niezmienniczych, co zostało później opublikowane w [J-R2, Theorem 4.2]. W [J-R2] wykazano dla (36) również automatyczną transwersalność rozmaitości niezmienniczych hiperbolicznych punktów stacjonarnych o różnych indeksach Morse'a oraz fakt, że brak połączeń między punktami stacjonarnymi o tym samym indeksie Morse'a jest własnością typową. Prowadzi to w konsekwencji do typowości własności Morse'a-Smale'a dla skalarnych równań parabolicznych na okręgu postaci (36) wykazanej w [J-R2, Theorem 1.6].

5. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

Lista pozostałych prac i monografii:

[6] Radosław Czaja, *Differential Equations with Sectorial Operator*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 2002, ISBN 83-226-1164-1.

[7] Radosław Czaja, Dynamically equivalent perturbations of linear equations, *Demonstratio Mathematica* 37 (2004), 327–348.

[8] Radosław Czaja, Asymptotics of parabolic equations with possible blow-up, *Colloquium Mathematicum* 99 (2004), 61–73.

[9] Jan W. Cholewa, Radosław Czaja, Gianluca Mola, Remarks on the fractal dimension of bi-space global and exponential attractors, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* (9) 1 (2008), 121–145.

[10] Radosław Czaja, Messoud Efendiev, A note on attractors with finite fractal dimension, *Bulletin of the London Mathematical Society* 40 (2008), 651–658.

[11] Radosław Czaja, Bi-space pullback attractors for closed processes, *São Paulo Journal of Mathematical Sciences* 6, 2 (2012), 227–246.

[12] Everaldo de Mello Bonotto, Matheus Cheque Bortolan, Rodolfo Collegari, Radosław Czaja, Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems, *Journal of Differential Equations* 261 (2016), 4338–4367.

[13] Radosław Czaja, Pedro Marín-Rubio, Pullback exponential attractors for parabolic equations with dynamical boundary conditions, *Taiwanese Journal of Mathematics*, artykuł w druku, dostępny elektronicznie od 20 grudnia 2016 roku pod adresem: `http://journal.tms.org.tw/~journal/tjm/201612/m455-7862-preview.pdf`

Monografia [6] stanowi rozszerzenie mojej pracy magisterskiej, która została wyróżniona w Konkursie im. Józefa Marcinkiewicza organizowanym przez Polskie Towarzystwo Matematyczne. Jest ona poświęcona teorii mocno ciągłych półgrup liniowych ze szczególnym uwzględnieniem półgrup analitycznych i ich roli we współczesnym podejściu do równań różniczkowych. Zawiera oryginalny wykład dotyczący generowania półgrup analitycznych przez nieograniczone operatory liniowe w przestrzeniach Banacha. Na uwagę zasługuje zwłaszcza precyzja twierdzenia ([6, Theorem 2.2.7]) o warunku koniecznym i wystarczającym na to, by operator liniowy generował półgrupę analityczną. W dalszej części publikacji przedstawiam teorię potęg dodatnich operatorów sektorialnych (por. [HE1], [AM], [LU]), budując w ten sposób dobre podstawy do badania istnienia i jednoznaczności rozwiązań abstrakcyjnych równań różniczkowych. Nawiązując do monografii [PZ], [HE1] i [C-D], w [6, Chapter 4] prezentuję teorię istnienia i jednoznaczności rozwiązań niejednorodnych równań liniowych w przestrzeniach Banacha oraz równań semiliniowych z operatorem sektorialnym w części głównej i z prawą stroną, która zależy nieliniowo od poszukiwanego rozwiązania. Ten ostatni typ równań jest szczególnie ważny ze względu na zastosowania do parabolicznych semiliniowych układów równań różniczkowych cząstkowych pojawiających się w fizyce matematycznej, jak np. słynny układ równań Naviera-Stokesa. Właśnie temu typowi równań poświęciłem później większość swojej kariery naukowej. Cieszę się, że ta monografia, choć o niewielkim nakładzie, posłużyła do dalszych indywidualnych badań dla studentów i doktorantów w Polsce jak i również za granicą (zob. np. [SI], [A-O]).

W pracy [7] badałem nieliniowe autonomiczne zaburzenia abstrakcyjnych równań parabolicznych z operatorem sektorialnym A postaci

$$u_t + Au = F_\lambda(u),\ t > 0, \tag{39}$$

dla których istnieją globalne atraktory $\mathcal{A}_\lambda$, które nie zależą od parametru λ. Zagadnienie to nawiązuje do pojęcia zsynchronizowania półgrup $\{T_\lambda(t)\colon t \geqslant 0\}$ dla (39) rozważanego w pracy [HA2]. Kluczowym warunkiem mojego głównego rezultatu [7, Theorem 2.6], zapewniającym istnienie wspólnego atraktora dla rodziny równań autonomicznych (39), było wskazanie funkcji ciągłych rozróżniających rozwiązania stacjonarne i stałych na trajektoriach. Założenia wspomnianego twierdzenia sprawdziłem w przypadku równania skalarnego drugiego rzędu z warunkiem Neumanna ([7, Example 3.1]) oraz w przypadku układu Cahna-Hilliarda będącego modelem rozdziału faz dla stopu wieloskładnikowego:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = -\triangle\left[\Gamma\triangle u(t,x) - \nabla_u\lambda(u(t,x))\right],\ t > 0,\ x \in \Omega, \\ \nabla u(t,x)\vec{n}(x) = \nabla(\Delta u(t,x))\vec{n}(x) = 0,\ t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in \Omega, \end{cases}$$

gdzie $u\colon [0,\infty) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$, $u^T = (u_1, \ldots, u_m)$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{m\times m}$ jest dodatnio określoną macierzą symetryczną, a Ω jest obszarem ograniczonym w $\mathbb{R}^N$ z $N \leqslant 3$ o brzegu $\partial\Omega$ klasy $C^{4+\varepsilon}$. W rozważanym zagadnieniu parametrami λ są funkcje klasy $C^{3+Lip}(\mathbb{R}^m)$, które są ograniczone z dołu i wypukłe. Wówczas atraktory $\mathcal{A}_\lambda$ pokrywają się z atraktorem $\mathcal{A}_0$ dla problemu liniowego i składają się ze wszystkich funkcji stałych prawie wszędzie w Ω, których wartość bezwzględna nie przekracza pewnej stałej zależnej od rozważanej przestrzeni fazowej (por. [7, Example 3.3]).

Praca [8] dotyczy opisu asymptotycznego zachowania się rozwiązań dopuszczającego wybuch niektórych rozwiązań problemu

$$
\begin{cases} u_t + Au = F(u),\ t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{40}
$$

gdzie A jest operatorem sektorialnym o zwartej rezolwencie, a prawa strona $F\colon X^\alpha \to X$ spełnia warunek Lipschitza na ograniczonych podzbiorach przestrzeni ułamkowej X^α pochodzącej od operatora A. Dopuszczam sytuację, gdy dla pewnych danych początkowych u_0 norma rozwiązania w przestrzeni X^α staje się nieograniczona w skończonym lub nieskończonym czasie. Wprowadzam naturalną przestrzeń fazową

$$
V = \{u_0 \in X^\alpha\colon \sup_{t\in[0,\infty)} \|u(t;u_0)\|_{X^\alpha} < \infty\}
$$

oraz zakładam, że $V \neq \emptyset$ i definiuję półgrupę $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ globalnych X^α rozwiązań (40) na przestrzeni V. Pomimo założenia zwartości rezolwenty operatora A nie mamy zagwarantowanej zwartości tej półgrupy, gdyż nie wiemy a priori, czy V jest domkniętym podzbiorem X^α. Jednak moje założenia pozwalają udowodnić niepustość, zwartość i niezmienniczość zbiorów $\omega-$granicznych zbiorów o ograniczonych orbitach dodatnich.

Rozważam zbiór $\mathcal{S}$ wszystkich punktów z V, przez które przechodzi ograniczona pełna orbita dla półgrupy $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$. W [8, Theorem 2.5] dowodzę, że $\mathcal{S}$ jest niepusty, niezmienniczy i przyciąga każdy podzbiór V o ograniczonej dodatniej orbicie. Ponadto, jeśli $\mathcal{S}$ jest ograniczony, to $\mathcal{S}$ jest zbiorem zwartym oraz maksymalnym zbiorem ograniczonym i niezmienniczym. Jeśli przyjąć dodatkowo, że dodatnie orbity zbiorów ograniczonych w V są ograniczone lub V jest domkniętym podzbiorem X^α, to $\mathcal{S}$ jest globalnym atraktorem dla półgrupy $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ w V. Otrzymuję stąd wniosek ([8, Corollary 2.6]), że jeśli wszystkie ograniczone pełne orbity punktów są wspólnie ograniczone w X^α, to wówczas każde X^α rozwiązanie problemu (40) albo wybucha w skończonym lub nieskończonym czasie albo pozostając ograniczone w X^α jest przyciągane przez maksymalny zbiór zwarty i niezmienniczy. Ilustrację tych rezultatów stanowią dwa przykłady. Pierwszym z nich (por. [8, Example 3.1]) jest równanie Frank-Kameneckiego z warunkiem brzegowym typu Dirichleta będące modelem w teorii spalania

$$
\begin{cases} u_t = \Delta u + \lambda e^u,\ t > 0,\ x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^N, \\ u(t,x) = 0,\ t > 0,\ x \in \partial B_1(0), \quad u(0,x) = u_0(x),\ x \in B_1(0). \end{cases} \tag{41}
$$

Z pracy [FU] wynika, że dla małych $\lambda > 0$ i pewnych warunków początkowych rozwiązanie (41) wybucha w skończonym czasie. Rozważając przypadek jednowymiarowy uzasadniłem w swojej pracy, że wtedy rozwiązania, które pozostają ograniczone, są przyciągane przez maksymalny zbiór zwarty i niezmienniczy złożony z dwóch rozwiązań stacjonarnych i orbity heteroklinicznej łączącej oba te rozwiązania. Drugi przykład dotyczy zbioru $\mathcal{S}$ dla $N-$wymiarowego układu Naviera-Stokesa dla lepkiego płynu nieściśliwego przy małej sile zewnętrznej (por. [8, Example 3.2]).

W pracy [9] wspólnie z Janem W. Cholewą badaliśmy zastosowanie własności wygładzania do oszacowania wymiaru fraktalnego globalnego atraktora dwuprzestrzennego, będącego uogólnieniem klasycznego pojęcia globalnego atraktora rozważanym m.in. w monografii [B-V], oraz do wprowadzenia pojęcia eksponencjalnego atraktora dwuprzestrzennego. W [9, Lemma 2.1] wykazaliśmy pewne uogólnienie znanego lematu [M-P, Lemma 1.3] do oszacowania wymiaru fraktalnego zbiorów nadniezmienniczych, które, wraz z rezultatem o istnieniu globalnego atraktora dwuprzestrzennego ([9, Corollary 2.3]), prowadzi do twierdzeń [9, Theorem 2.5, Corollary 2.6] o istnieniu globalnego atraktora dwuprzestrzennego o skończonym wymiarze fraktalnym. Odwołując się do konstrukcji z pracy [E-M-Z], udowodniliśmy w [9, Proposition 2.7, Corollary 2.8] istnienie eksponencjalnego atraktora dwuprzestrzennego dla półgrup dysypatywnych, które dla dużych czasów można rozłożyć na część będącą kontrakcją w słabej przestrzeni oraz na część wygładzającą na zbiorze pochłaniającym. Ponadto w [9, Corollary 2.9] istnienie eksponencjalnego atraktora wykazaliśmy, gdy półgrupa ma własność wygładzania.

Istotnym elementem pracy [9] są przykłady. W pierwszym z nich pokazujemy istnienie eksponencjalnego $(X^\alpha - X^\beta)$ atraktora z $\beta \in (\alpha, 1)$ dla abstrakcyjnego semiliniowego problemu postaci (40) z operatorem sektorialnym A o zwartej rezolwencie, który zawiera skończenie wymiarowy globalny $(X^\alpha - X^\beta)$ atraktor (por. [9, Theorem 3.2]). Dalsze przykłady dotyczą konkretnych zagadnień dla równań różniczkowych cząstkowych. Stosujemy wspomniane twierdzenie do równań reakcji-dyfuzji z podkwadratowym wzrostem dla gradientu i do równania falowego z operatorem tłumienia $(-\Delta_D)^{\frac{1}{2}}$. Ponadto, stosując [9, Corollary 3.3] będący wnioskiem z [9, Lemma 2.1], wyprowadzamy oszacowania wymiaru fraktalnego globalnego atraktora dla równania Cahna-Hilliarda ([9, Corollary 3.9]) oraz globalnego atraktora dla równań parabolicznych wyższego rzędu z operatorami eliptycznymi rzędu $2m$ w części głównej ([9, Corollary 3.10]). Ciekawym zastosowaniem [9, Lemma 2.1] jest użycie go w [9, Theorem 3.8] do oszacowania wymiaru fraktalnego globalnego atraktora w przestrzeni $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dla równania falowego z operatorem tłumienia $(-\Delta_D)$

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_D u_t - \Delta_D u = f(u), \ t > 0, \ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ ogr. }, \\ u(0,x) = u_0(x), \ u_t(0,x) = v_0(x), \ x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, \ t \geqslant 0, \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{42}$$

z dysypatywną nieliniowością $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ spełniającą krytyczny warunek wzrostu

$$\exists_{c>0} \ |f''(s)| \leqslant c(1 + |s|^3), \ s \in \mathbb{R}.$$

Trudność w tym przypadku polega na niezwartości rezolwenty operatora sektorialnego dla abstrakcyjnego problemu Cauchy'ego generowanego przez (42). Ostatni przykład pracy [9] jest autorstwa Gianluki Moli i dotyczy istnienia eksponencjalnego atraktora, zawierającego skończenie wymiarowy globalny atraktor, dla nieparabolicznego problemu z pamięcią.

W czasie stażu postdoktorskiego w Instituto Superior Técnico w Lizbonie poznałem Messouda Efendieva z Helmholtz Center Munich w Niemczech i rozpocząłem z nim współpracę naukową. Jej pierwszym efektem jest praca [10], w której tworzymy narzędzie ([10, Theorem 2.1]) do oszacowania wymiaru fraktalnego zbioru niezmienniczego, np. globalnego atraktora. Ponownie opiera się ono na własności wygładzania, jednak zamiast zwartości włożenia gładszej przestrzeni w przestrzeń bazową, zakładamy tutaj zwartość jej włożenia w pewną dodatkową przestrzeń Z. Wynik ten jest uogólnieniem rezultatów dotyczących oszacowań wymiaru atraktora z prac [M-P, Lemma 1.3] i [E-M-Z, Proposition 1]. Ponadto, pokazujemy w [10, Theorem 3.2], że identyczne oszacowania na zbiorze podniezmienniczym pozwalają wykazać istnienie eksponencjalnego atraktora dla odwzorowania oraz, po uzupełnieniu o odpowiednie założenie ciągłości półgrupy, również dla półgrupy (zob. [10, Corollary 3.5]). Kontakt naukowy z Messoudem Efendievem zaowocował powstaniem kolejnych dwóch prac [1, 2] o eksponencjalnych atraktorach dla problemów nieautonomicznych, które zostały opisane w części dotyczącej osiągnięcia naukowego.

Istnienia globalnego atraktora dla półgrupy dowodzi się używając pewnego rodzaju ciągłości tej półgrupy. Okazuje się jednak, że wystarczy w tym celu założyć domkniętość (por. [P-Z]) lub nawet tylko asymptotyczną domkniętość operatorów tworzących półgrupę (por. [C-R]). Podejścia te stanowiły inspirację do napisania mojej pracy [11] o globalnych atraktorach typu pullback dla domkniętych procesów ewolucyjnych. Praca ta stanowi studium warunków, które prowadzą do istnienia dwuprzestrzennego $(V-W)$ globalnego $\mathcal{D}-$atraktora typu pullback, który przyciąga elementy pewnego uniwersum $\mathcal{D}$, czyli wyróżnione rodziny zbiorów $\hat{D} = \{D(t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ (por. [11, Definition 2.2]). W klasycznym ujęciu uniwersum $\mathcal{D}$ tworzą rodziny zadane przez wszystkie zbiory ograniczone w przestrzeni fazowej V.

Na początek badam równoważne określenia asymptotycznej zwartości procesu (zob. [11, Definitions 2.3, 2.4]), co oznacza niepustość, zwartość i przyciąganie w sensie pullback dla zbiorów tworzących rodzinę $\omega-$graniczną $\{\omega_W(\hat{D}, t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ dla $\hat{D} \in \mathcal{D}$ ([11, Proposition 2.6]). W szczególności, w refleksywnych i ściśle wypukłych przestrzeniach Banacha asymptotyczna zwartość procesu równoważna jest ([11, Propositions 2.8, 2.10]) także warunkowi spłaszczenia (por. [11, Definition 2.7]), wykorzystywanemu w zastosowaniach do sprawdzenia asymptotycznej zwartości. Następnie wykorzystuję asymptotyczną zwartość wraz z asymptotyczną domkniętością procesu ([11, Definition 2.11]) i dysypatywnością w sensie pullback ([11, Definition 2.13]) do pokazania niezmienniczości rodzin $\omega-$granicznych w [11, Proposition 2.15]. W głównym twierdzeniu pracy [11, Theorem 2.16] pokazuję, że jeśli dodatkowo proces jest domknięty, to istnieje dwuprzestrzenny globalny $\mathcal{D}-$atraktor typu pullback

$$\mathcal{A}(t) = \mathrm{cl}_W \bigcup_{\hat{D} \in \mathcal{D}} \omega_W(\hat{D}, t) \subset \omega_W(\hat{B}_0, t),\ t \in \mathbb{R},$$

gdzie $\hat{B}_0$ jest rodziną pochłaniającą $\mathcal{D}$ w sensie pullback. W przypadku, gdy $\hat{B}_0 \in \mathcal{D}$, to założenie domkniętości procesu można osłabić przyjmując asymptotyczną domkniętość (por. [11, Corollary 2.17]). Wówczas $\mathcal{A}(t) = \omega_W(\hat{B}_0, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Ilustrację teorii stanowi zagadnienie Dirichleta dla nieautonomicznego równania reakcji-dyfuzji

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - f(u) + g(t),\ t > s,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ ogr. }, \\ u(t,x) = 0,\ t > s,\ x \in \partial\Omega, \quad u(s,x) = u_0(x),\ x \in \Omega, \end{cases}$$

przedstawione w pracy [ŁU], dla którego istnieje $(L^2(\Omega) - H^1_0(\Omega))$ globalny $\mathcal{D}-$atraktor typu pullback z uniwersum

$$\mathcal{D} = \{\hat{D} = \{D(t) \subset L^2(\Omega) \colon t \in \mathbb{R}\} \colon \lim_{s \to -\infty} e^{\lambda_1 s} \sup\{\|u\|^2_{L^2(\Omega)} : u \in D(s)\} = 0\},$$

co stanowi treść [11, Theorem 3.4].

W pracy [12], napisanej wspólnie z Everaldo Bonotto, Matheusem Bortolanem i Rodolfo Collegarim, rozważamy zagadnienie wpływu małych zaburzeń impulsywnych układów dynamicznych na ich asymptotyczne zachowanie, które zostało opisane przy pomocy prezwartych globalnych atraktorów w pracy [4] przedstawionej w części dotyczącej osiągnięcia naukowego. Choć wyróżniającą cechą półgrup impulsywnych $\{\tilde{\pi}_\eta(t) \colon t \geqslant 0\}$ jest ich nieciągłość, badanie ciągłej zależności prezwartych globalnych atraktorów w sensie półodległości Hausdorffa nie jest pozbawione sensu, jeśli przyjąć ciągłą zależność od parametru elementów generujących impulsywny układ dynamiczny. W tym celu rozważamy rodzinę impulsywnych układów dynamicznych $\{(X, \pi_\eta, M_\eta, I_\eta)\}_{\eta\in[0,1]}$ i zakładamy ciągłość w $\eta = 0$ półgrup ciągłych $\{\pi_\eta(t) \colon t \geqslant 0\}$ jednostajnie na zwartych podzbiorach $[0, \infty) \times X$, ciągłość w $\eta = 0$ zbiorów impulsywnych M_η względem odległości Hausdorffa, wspólną ciągłość w zerze funkcji impulsywnych $I_\eta \colon M_\eta \to X$ oraz rozłączność zbiorów impulsywnych i ich obrazów poprzez funkcje impulsywne dla małych zaburzeń. Ponadto definiujemy kolektywne warunki tuby (por. [12, Definitions 3.3, 3.4]), będące rozszerzeniem warunków znanych z prac [CI2, 4], które opisują zachowanie się półgrup π_η w pobliżu zbiorów impulsywnych M_η w zależności od parametru η. Dzięki tym założeniom pokazujemy w [12, Theorem 3.12] wspólną ciągłość w zerze (na $X \setminus M_0$) funkcji ϕ_η najmniejszego dodatniego czasu dotarcia do M_η (por. (33)), natomiast w [12, Corollary 3.17] dowodzimy wspólnej ciągłości z korekcją w $\eta = 0$ (na $X \setminus M_0$) półgrup impulsywnych $\tilde{\pi}_\eta$. Oba te wyniki są kluczowe dla dowodu głównego twierdzenia [12, Theorem 4.2] o półciągłości z góry w $\eta = 0$ prezwartych globalnych atraktorów $\mathcal{A}_\eta$ dla rodziny impulsywnych układów dynamicznych $\{(X, \pi_\eta, M_\eta, I_\eta)\}_{\eta\in[0,1]}$ (zob. (35)). Twierdzenie to stosujemy do prostego układu planarnego z zaburzeniem i z zadanymi funkcjami impulsywnymi. Ostatnia część pracy zawiera twierdzenie ([12, Theorem 6.3]) o półciągłości z dołu w $\eta = 0$ rodziny prezwartych globalnych atraktorów dla szczególnej rodziny impulsywnych układów dynamicznych.

W pracy [13], napisanej wspólnie z Pedro Marín-Rubio, badamy nieautonomiczne semiliniowe równanie paraboliczne z dynamicznym warunkiem brzegowym postaci

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \kappa u + f_1(u) = h_1(t) & \text{w } \Omega \times (s, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + f_2(u) = h_2(t) & \text{na } \partial\Omega \times (s, \infty), \\ u(x, s) = u_s(x) & \text{dla } x \in \Omega, \\ u(x, s) = \varphi_s(x) & \text{dla } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{43}$$

gdzie Ω jest obszarem ograniczonym w $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, z brzegiem $\partial\Omega$ lipschitzowskim, i $\kappa > 0$. Naszym celem było wykazanie dla (43) istnienia eksponencjalnego atraktora typu pullback i uzyskanie ograniczenia skończonego wymiaru fraktalnego globalnego atraktora typu pullback, którego istnienie w $H = L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$, przy odpowiednich założeniach o nieliniowości, zostało wcześniej udowodnione w pracy [A-M-R1], a jego regularność badana w pracy [A-M-R2].

Zakładamy, że funkcje $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R})$ są prawie monotoniczne, tzn. funkcje $f_i(u) + lu$ są niemalejące z pewnym $l > 0$, spełniają warunek wzrostu

$$|f_i(u) - f_i(v)| \leqslant L\,|u - v| \left(1 + |u|^{p_i-2} + |v|^{p_i-2}\right), \ u, v \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \tag{44}$$

i warunek dysypatywności

$$f_i(u)u \geqslant \alpha\,|u|^{p_i} - \beta, \ u \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \tag{45}$$

z pewnymi stałymi $p_i \geqslant 2$, $\alpha, L > 0$, $\beta \geqslant 0$, natomiast $\vec{h} = (h_1, h_2) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; H)$.

W [13, Theorem 2.2] pokazujemy istnienie globalnych słabych rozwiązań dla (43) dla warunków początkowych $(u_s, \varphi_s) \in L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$ przy użyciu klasycznego podejścia J.-L. Lionsa ([LI]). Następnie, używając wyników mojej pracy [3], wykazujemy w [13, Theorem 4.5] istnienie eksponencjalnego atraktora typu pullback dla (43) w przestrzeni

H, jeśli czynnik nieautonomiczny $\vec{h}$ jest przesunięciowo ograniczony, tzn.

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \left|\vec{h}(\tau)\right|_H^2 d\tau \leqslant K,$$

a nieliniowości f_i, $i = 1, 2$, spełniają (44) and (45) z odpowiednimi wykładnikami p_i (zob. [13, (4.5)]). Jeśli brzeg $\partial\Omega$ jest dostatecznie gładki i f_1, f_2 spełniają dodatkowo

$$|f_1(s) - f_2(s)| \leqslant C(1 + |s|),\ s \in \mathbb{R},$$

to warunki na wykładniki $p_1 = p_2 = p$ można osłabić (por. [13, (4.15)]). W szczególności, dla $N = 2$ nieliniowości $f_i(u) = u^3 - u$, $u \in \mathbb{R}$, jak i dowolne wielomiany stopnia nieparzystego o dodatnim współczynniku głównym, są dopuszczalne. Pokazuje to również, że regularny globalny atraktor typu pullback badany w [A-M-R2] ma jednostajne ograniczenie wymiaru fraktalnego, gdy czynnik $\vec{h}$ jest przesunięciowo ograniczony.

W pracy [13] rozważamy też przypadek lipschitzowski ($p_1 = p_2 = 2$) i dowodzimy w [13, Theorem 5.4] istnienia eksponencjalnego atraktora typu pullback dla (43) w H nawet, gdy czynnik nieautonomiczny rośnie wykładniczo w przeszłości i w przyszłości, tzn. gdy $\vec{h}$ spełnia

$$\left|\vec{h}(t)\right|_H^2 \leqslant Ke^{\theta|t|},\ t \in \mathbb{R},$$

z pewnym $K > 0$ i $0 \leqslant \theta < 2(\lambda_1+\alpha)$, gdzie $\lambda_1 > 0$ jest pierwszą wartością własną liniowego operatora A_0 z abstrakcyjnego problemu Cauchy'ego odpowiadającego układowi (43).

6. Praca złożona do opublikowania

[I] Radosław Czaja, Waldyr M. Oliva, Carlos Rocha, On a definition of Morse-Smale evolution processes, praca w recenzji.

W latach 2009-2014 przebywałem w Instituto Superior Técnico w Lizbonie i współuczestniczyłem w badaniach naukowych prowadzonych tam przez Waldyra M. Olivę i Carlosa Rochę. Badania te koncentrowały się wokół odpowiedniego uogólnienia pojęcia półgrupy Morse'a-Smale'a na przypadek nieautonomiczny. W szczególności definicja procesu Morse'a-Smale'a powinna implikować własność otwartości, tzn. że małe nieautonomiczne zaburzenie równania autonomicznego generującego półgrupę Morse'a-Smale'a jest procesem Morse'a-Smale'a. W międzyczasie ukazała się praca [B-C-L], w której autorzy stawiają definicję procesu Morse'a-Smale'a (por. [B-C-L, Definition 2.18]), gdy pochodzi on od układu gradientowego niezawierającego (hiperbolicznych) orbit okresowych, a jedynie hiperboliczne rozwiązania stacjonarne. Uznaliśmy to za zbyt duże uproszczenie i koncentrowaliśmy się na badaniu nieautonomicznych zaburzeń orbit okresowych. Skonstruowaliśmy przykład autonomicznego układu równań różniczkowych zwyczajnych z hiperboliczną orbitą okresową, dla którego małe odpowiednie zaburzenia nieautonomiczne zachowują odpowiadający jej izolowany cylinder niezmienniczy pomimo diametralnej zmiany dynamiki na nim. Przy użyciu izolowanych rozmaitości niezmienniczych (por. rozmaitości całkowe rozważane m.in. przez J.K. Hale'a [HA3, Theorem VII.7.1] i D. Henry'ego [HE1, Theorem 9.1.1]) pokazaliśmy ich utrzymywanie się przy zaburzeniach hiperbolicznych orbit okresowych. W dalszej części sformułowaliśmy definicję procesu Morse'a-Smale'a zastępując punkty niebłądzące z klasycznej definicji odpowiednim zachowaniem powracającym dla procesu ewolucyjnego. Pozwoliło to wykazać wspomnianą wyżej własność otwartości procesów Morse'a-Smale'a dla semiliniowych równań parabolicznych. Wyniki te zostały zawarte w manuskrypcie [I] i znajdują się obecnie w recenzji.

Literatura

[1] R. Czaja, M. Efendiev, Pullback exponential attractors for nonautonomous equations Part I: Semilinear parabolic problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 381 (2011), 748–765.

[2] R. Czaja, M. Efendiev, Pullback exponential attractors for nonautonomous equations Part II: Applications to reaction-diffusion systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 381 (2011), 766–780.

[3] R. Czaja, Pullback exponential attractors with admissible exponential growth in the past, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 104 (2014), 90–108.

[4] E.M. Bonotto, M.C. Bortolan, A.N. Carvalho, R. Czaja, Global attractors for impulsive dynamical systems - a precompact approach, *Journal of Differential Equations* 259 (2015), 2602–2625.

[5] R. Czaja, C. Rocha, Transversality in scalar reaction-diffusion equations on a circle, *Journal of Differential Equations* 245 (2008), 692–721.

[6] R. Czaja, *Differential Equations with Sectorial Operator*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 2002, ISBN 83-226-1164-1.

[7] R. Czaja, Dynamically equivalent perturbations of linear equations, *Demonstratio Mathematica* 37 (2004), 327–348.

[8] R. Czaja, Asymptotics of parabolic equations with possible blow-up, *Colloquium Mathematicum* 99 (2004), 61–73.

[9] J.W. Cholewa, R. Czaja, G. Mola, Remarks on the fractal dimension of bi-space global and exponential attractors, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* (9) 1 (2008), 121–145.

[10] R. Czaja, M. Efendiev, A note on attractors with finite fractal dimension, *Bulletin of the London Mathematical Society* 40 (2008), 651–658.

[11] R. Czaja, Bi-space pullback attractors for closed processes, *São Paulo Journal of Mathematical Sciences* 6, 2 (2012), 227–246.

[12] E.M. Bonotto, M.C. Bortolan, R. Collegari, R. Czaja, Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems, *Journal of Differential Equations* 261 (2016), 4338–4367.

[13] R. Czaja, P. Marín-Rubio, Pullback exponential attractors for parabolic equations with dynamical boundary conditions, *Taiwanese Journal of Mathematics*, artykuł w druku, dostępny elektronicznie od 20 grudnia 2016 roku pod adresem:
`http://journal.tms.org.tw/~journal/tjm/201612/m455-7862-preview.pdf`

[A-O] M. de Oliveira Alves, S.M. Oliva, An extension problem related to the square root of the Laplacian with Neumann boundary condition, *Electron. J. Differential Equations* 2014 (2014) No. 12, 1–18.

[AM] H. Amann, *Linear and Quasilinear Parabolic Problems, Volume I*, Birkhäuser, Basel, 1995.

[AN1] S. Angenent, The Morse-Smale property for a semi-linear parabolic equation, *J. Differential Equations* 62 (1986), 427–442.

[AN2] S. Angenent, The zero set of a solution of a parabolic equation, *J. Reine Angew. Math.* 390 (1988), 79–96.

[A-F] S. Angenent, B. Fiedler, The dynamics of rotating waves in scalar reaction diffusion equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 307 (1988), 545–568.

[A-M-R1] M. Anguiano, P. Marín-Rubio, J. Real, Pullback attractors for non-autonomous reaction-diffusion equations with dynamical boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.* 383 (2011), 608–618.

[A-M-R2] M. Anguiano, P. Marín-Rubio, J. Real, Regularity results and exponential growth for pullback attractors of a non-autonomous reaction-diffuson model with dynamical boundary conditions, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 20 (2014), 112–125.

[B-V] A.V. Babin, M.I. Vishik, *Attractors of Evolution Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1992.

[B-D] E.M. Bonotto, D.P. Demuner, Attractors of impulsive dissipative semidynamical systems, *Bull. Sci. Math.* 137 (2013), 617–642.

[B-C-L] M. Bortolan, A.N. Carvalho, J.A. Langa, Structure of attractors for skew product semiflows, *J. Differential Equations* 257 (2014), 490–522.

[B-F] P. Brunovský, B. Fiedler, Numbers of zeros on invariant manifolds in reaction-diffusion equations, *Nonlinear Anal.* 10 (1986), 179–193.

[C-C-L-R] T. Caraballo, A.N. Carvalho, J.A. Langa, F. Rivero, Existence of pullback attractors for pullback asymptotically compact processes, *Nonlinear Anal.* 72 (2010), 1967–1976.

[C-L-V] T. Caraballo, J.A. Langa, J. Valero, The dimension of attractors of nonautonomous partial differential equations, *ANZIAM J.* 45 (2003), 207–222.

[C-Ł-R] T. Caraballo, G. Łukaszewicz, J. Real, Pullback attractors for asymptotically compact non-autonomous dynamical systems, *Nonlinear Anal.* 64 (2006), 484–498.

[C-L-R] A.N. Carvalho, J.A. Langa, J.C. Robinson, *Attractors for Infinite-Dimensional Nonautonomous Dynamical Systems*, Springer, New York, 2013.

[C-S1] A.N. Carvalho, S. Sonner, Pullback exponential attractors for evolution processes in Banach spaces: theoretical results, *Commun. Pure Appl. Anal.* 12 (2013), 3047–3071.

[C-S2] A.N. Carvalho, S. Sonner, Pullback exponential attractors for evolution processes in Banach spaces: properties and applications, *Commun. Pure Appl. Anal.* 13 (2014), 1141–1165.

[CH] D.N. Cheban, *Global Attractors of Non-Autonomous Dissipative Dynamical Systems*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2004.

[C-C-H] M. Chen, X.-Y. Chen, J.K. Hale, Structural stability for time-periodic one-dimensional parabolic equations, *J. Differential Equations* 96 (1992), 355–418.

[C-V] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[C-D] J.W. Cholewa, T. Dłotko, *Global Attractors in Abstract Parabolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[C-R] J.W. Cholewa, A. Rodríguez-Bernal, Extremal equilibria for monotone semigroups in ordered spaces with application to evolutionary equations, *J. Differential Equations* 249 (2010), 485–525.

[CI1] K. Ciesielski, Sections in semidynamical systems, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* 40 (1992), 297–307.

[CI2] K. Ciesielski, On semicontinuity in impulsive dynamical systems, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* 52 (2004), 71–80.

[D-N] L. Dung, B. Nicolaenko, Exponential attractors in Banach spaces, *J. Dynam. Differential Equations* 13 (2001), 791–806.

[E-F-N-T] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko, R. Temam, *Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equations*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1994.

[E-M-Z] M. Efendiev, A. Miranville, S. Zelik, Exponential attractors for a nonlinear reaction-diffusion system in $\mathbb{R}^3$, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 330 (2000), 713–718.

[E-Y-Y] M. Efendiev, Y. Yamamoto, A. Yagi, Exponential attractor for non-autonomous dissipative system, *J. Math. Soc. Japan* 63 (2011), 647–673.

[E-Z] M. Efendiev, S. Zelik, Attractors of the reaction-diffusion systems with rapidly oscillating coefficients and their homogenization, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 19 (2002), 961–989.

[E-Z-M] M. Efendiev, S. Zelik, A. Miranville, Exponential attractors and finite-dimensional reduction for non-autonomous dynamical systems, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 135 (2005), 703–730.

[F-R-W] B. Fiedler, C. Rocha, M. Wolfrum, Heteroclinic orbits between rotating waves of semilinear parabolic equations on the circle, *J. Differential Equations* 201 (2004), 99–138.

[FU] H. Fujita, On the nonlinear equations $\triangle u + e^u = 0$ and $\frac{\partial v}{\partial t} = \triangle v + e^v$, *Bull. Amer. Math. Soc.* 75 (1969), 132–135.

[F-O] G. Fusco, W.M. Oliva, Transversality between invariant manifolds of periodic orbits for a class of monotone dynamical systems, *J. Dynam. Differential Equations* 2 (1990), 1–17.

[HA1] J.K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[HA2] J.K. Hale, Attracting manifolds for evolutionary equations, *Resenhas* 3 (1997), 55–72.

[HA3] J.K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, Mineola, 2009.

[H-M-O] J.K. Hale, L.T. Magalhães, W.M. Oliva, *Dynamics in Infinite Dimensions, Second Edition*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[HE1] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[HE2] D. Henry, Some infinite-dimensional Morse-Smale systems defined by parabolic partial differential equations, *J. Differential Equations* 59 (1985), 165–205.

[J-R1] R. Joly, G. Raugel, Generic hyperbolicity of equilibria and periodic orbits of the parabolic equation on the circle, *Trans. Amer. Math. Soc.* 362 (2010), 5189–5211.

[J-R2] R. Joly, G. Raugel, Generic Morse-Smale property for the parabolic equation on the circle, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 27 (2010), 1397–1440.

[KA] S.K. Kaul, On impulsive semidynamical systems, *J. Math. Anal. Appl.* 150 (1990), 120–128.

[K-R] P.E. Kloeden, M. Rasmussen, *Nonautonomous Dynamical Systems*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[LA] O.A. Ladyzhenskaya, *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[L-M-R] J.A. Langa, A. Miranville, J. Real, Pullback exponential attractors, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 26 (2010), 1329–1357.

[L-S] J.A. Langa, A. Suárez, Pullback permanence for nonautonomous partial differential equations, *Electron. J. Differential Equations* 72 (2002), 1–20.

[L-Z] Y. Li, C. Zhong, Pullback attractors for the norm-to-weak continuous process and application to the nonautonomous reaction-diffusion equations, *Appl. Math. Comput.* 190 (2007), 1020–1029.

[LI] J.-L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, 1969.

[LU] A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Basel, 1995.

[ŁU] G. Łukaszewicz, On pullback attractors in H_0^1 for nonautonomous reaction-diffusion equations, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 20 (2010), 2637–2644.

[M-P] J. Málek, D. Pražák, Large time behavior via the method of ℓ-trajectories, *J. Differential Equations* 181 (2002), 243–279.

[MA] H. Matano, Nonincrease of the lap-number of a solution for a one-dimensional semilinear parabolic equation, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 29 (1982), 401–441.

[M-N] H. Matano, K.-I. Nakamura, The global attractor of semilinear parabolic equations on S^1, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 3 (1997), 1–24.

[OL] W.M. Oliva, Morse-Smale semiflows, openness and A–stability, *Fields Inst. Commun.* 31 (2002), 285–307.

[PA] J. Palis, On Morse-Smale dynamical systems, *Topology* 8, 1969, 385–405.

[P-M] J. Palis, W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[P-S] J. Palis, S. Smale, Structural stability theorems, in *Global Analysis*, Proc. Sympos. Pure Math. XIV, 1970, 223–231.

[P-Z] V. Pata, S. Zelik, A result on the existence of global attractors for semigroups of closed operators, *Commun. Pure Appl. Anal.* 6 (2007), 481–486.

[PZ] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[PO] P. Poláčik, Transversal and nontransversal intersections of stable and unstable manifolds in reaction diffusion equations on symmetric domains, *Differential Integral Equations* 7 (1994), 1527–1545.

[RO] J.C. Robinson, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems - An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[S-F] B. Sandstede, B. Fiedler, Dynamics of periodically forced parabolic equations on the circle, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 12 (1992), 559–571.

[S-Y] G.R. Sell, Y. You, *Dynamics of Evolutionary Equations*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[SI] J.F. da Silva, *Aplicações de semigrupos em sistemas de reação-difusão e a existência de ondas viajantes*, Universidade de São Paulo, São Paulo, rozprawa doktorska, 2010, `http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45132/tde-31082010-093717/publico/dissertacao_final_juliana_silva.pdf`

[SO] H. Song, Pullback attractors of non-autonomous reaction-diffusion equations in H_0^1, *J. Differential Equations* 249 (2010), 2357–2376.

[ST] C. Sturm, Sur une classe d'équations à différences partielles, *J. Math. Pure Appl.* 1 (1836), 373–444.

[SZ] W. Szlenk, *Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych*, PWN, Warszawa, 1982.
[TE] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Second Edition,* Springer-Verlag, New York, 1997.

Katowice, 10 stycznia 2017 r. Radosław Cyża