

dr hab. Jan Malczak, Prof. AGH
Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
Aleja Adama Mickiewicza 30
30-962 Kraków

Kraków, dnia 10 maja 2013 roku

RECENZJA ROZPRAWY HABILITACYJNEJ I DOROBKU NAUKOWEGO

Pani doktor Katarzyny Pichór

ubiegającej się o nadanie stopnia naukowego doktora habilitowanego
w dziedzinie nauk matematycznych, w dyscyplinie matematyka

Doktor Katarzyna Pichór zajmuje się zagadnieniami naukowymi z zakresu teorii równań różniczkowych, analizy funkcjonalnej, teorii prawdopodobieństwa oraz biomatematyki. Uzyskała szereg wartościowych rezultatów dotyczących asymptotycznych własności rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych typu Fokkera-Plancka, asymptotycznej stabilności jednoparametrowych ciągłych półgrup Markowa, a ponadto pokazała zastosowanie tych wyników głównie w teorii strukturalnych modeli populacyjnych.

Dorobek naukowy doktor Pichór stanowi trzynaście prac opublikowanych w większości w dobrych i bardzo dobrych czasopismach z wysokim wskaźnikiem IF i wysoką punktacją. Trzy z nich są w *J. Math. Anal. Appl.* - czasopiśmie za 40 punktów i IF wahającym się od 0,339 do 0,872, jedna w *Acta Appl. Math.* (25 pkt, IF 0,899), jedna w *Mathematical and Computer Modelling* (25 pkt, IF 1,346), jedna w *Mathematical Biosciences* (25 pkt, IF 1,186), dwie w *Ann. Polon. Math.* (20 pkt, IF 0,439), jedna w *J. Biol. Systems* (15 pkt, IF 0,36). Prace te spotkały się z dużym zainteresowaniem, o czym świadczy imponująca liczba osiemdziesięciu dwóch cytowań wykazanych przez bazę *Web of Science*, oraz relatywnie duży Indeks Hirscha: 6.

Wskazaniem przez Habilitantkę osiągnięciem wynikającym z art. 16 ust. 2 ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki jest zestaw pięciu prac zatytułowanych wspólnie: *Pólgrupy stochastyczne, ich własności i zastosowania w strukturalnych modelach populacyjnych.*

Omówię teraz poszczególne prace wchodzące w skład habilitacji, oznaczone kolejno [KP1] - [KP5]. Należy zaznaczyć, że prace [KP1] - [KP2] są współautorskie, napisane wraz z R. Rudnickim, zaś praca [KP4] ma trzech autorów: J. Banasiak, K. Pichór i R. Rudnicki.

Najważniejszym wynikiem pracy [KP1] jest proste i eleganckie twierdzenie o asymptotycznej stabilności częściowo-całkowych półgrup Markowa z czasem ciągłym. Pokazano mianowicie, że jeżeli taka półgrupa ma dokładnie jedną gęstość niezmienniczą i ta gęstość jest dodatnia, to jest asymptotycznie stabilna. Problem asymptotycznej stabilności półgrup z nietrywialną częścią całkową był badany przez wielu matematyków. Należy wymienić tu następujące nazwiska: K. Baron, A. Lasota, J. Malczak, R. Rudnicki. Jednak w każdym z poprzednich wyników wymagano, oprócz istnienia gęstości niezmienniczej, dodatkowych założeń. Zakładano więc, że półgrupa jest całkową i rozmywa nośniki (Malczak 1992) lub jest całkową i nakłada nośniki (Baron, Lasota 1993). W 1995 roku rezultaty te zostały przeniesione przez R. Rudnickiego na klasę półgrup częściowo całkowych, ponadto R. Rudnicki udowodnił, że częściowo całkową ciągłą lub dyskretną półgrupą operatorów Markowa, która ma gęstość niezmienniczą i nie ma innych punktów okresowych w zbiorze gęstości jest asymptotycznie stabilna. Główne twierdzenie pracy [KP1] wzmacnia ten rezultat w przypadku półgrupy ciągłej i odgrywa kluczową rolę w rozprawie habilitacyjnej. Jest wykorzystywane wielokrotnie zarówno przez Habilitantkę w późniejszych pracach [KP4], [KP5], [KP10]-[KP13] jak również przez innych autorów - praca cytowana jest 19 razy.

W pracy [KP3] Habilitantka podjęła udaną próbę przeniesienia i uogólnienia głównego wyniku pracy [KP1] na szerszą klasę półgrup podstochastycznych. Przy założeniu, że półgrupa podstochastyczna $\{P(t)\}_{t \geq 0}$ ma dokładnie jedną gęstość niezmienniczą f_* , pokazała, że $P(t)f \rightarrow c(f)f_*$ na nośniku f_* oraz dla dowolnego zbioru zwartego F rozłącznego z nośnikiem f_* mamy $\int_F P(t)f(x)\mu(dx) \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow \infty$. W szczególności, gdy gęstość niezmiennicza jest dodatnia, to półgrupa jest asymptotycznie stabilna, a gdy półgrupa nie ma gęstości niezmienniczej, to jest wymiatająca ze zbiorów zwartych. Rezultat ten zastosowała w badaniu półgrup generowanych przez proces urodzin i śmierci. Jednak ten przykład należy traktować jedynie jak ilustrację wyniku teoretycznego. Brakuje mi tu innych, bardziej zaawansowanych zastosowań.

Prace [KP2] i [KP4]-[KP5] zawierają wyniki dotyczące zastosowań teorii operatorów Markowa w strukturalnych modelach populacyjnych. W pracy [KP2] rozważa się model strukturalny, w którym komórka charakteryzowana jest poprzez swoją dojrzałość (wielkość, masę itp.). Dojrzałość tę przekazuje w trakcie podziału komórkom potomnym, a związek między dojrzałością komórki matczynej, a rozkładem dojrzałości komórek potomnych, opisany jest poprzez funkcję przejścia. Modele tego typu były intensywnie badane w latach osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku. Model w pracy [KP2] jest uogólnieniem wcześniej rozważanych modeli, zarówno tych z równomiernym podziałem komórkowym, jak i nierównomiernym, a ponadto ma zastosowanie również w opisie bardzo ciekawego przypadku, w którym w wyniku podziału występuje jednocześnie podział i równomierny, i losowy nierównomierny. Wykazano twierdzenie o wykładniczym asynchronicznym wzroście populacji (AEG). W dowodzie wykorzystano własności częściowo całkowych półgrup Markowa i opiera się on na twierdzeniu Rudnickiego z 1995 roku o asymptotycznej stabilności częściowo całkowych półgrup Markowa niemających innych punktów okresowych w zbiorze gęstości poza gęstością niezmienniczą. Dowód głównego rezultatu pracy [KP2] potwierdza świetne opanowanie nie tylko trudnej teorii, ale też bogatej technologii asymptotycznej stabilności.

W pracy [KP4] na szczególną uwagę zasługuje wprowadzenie ogólnego operatora reprodukcji, dzięki czemu udaje się w jednolity sposób opisać zarówno model dojrzałościowy jak i i wiekowy McKendricka. Głównym twierdzeniem tej pracy jest twierdzenie o AEG populacji. W dowodzie tego rezultatu tym razem zostaje zastosowany podstawowy wynik pracy [KP1] o asymptotycznej stabilności. Unika się w ten sposób sprawdzania, że półgrupa nie ma punktów okresowych w zbiorze gęstości.

W pracy [KP5] rozpatrywany jest model podobny do modelu z pracy [KP4], z podobnym operatorem reprodukcji. Zasadnicza różnica między pracami polega na przyjętych założeniach gwarantujących ograniczoność parametru dojrzałości lub wieku. W pracach [KP2] i [KP4] dojrzałość jest ograniczona dzięki dość sztucznemu założeniu, że współczynniki urodzeń lub śmierci są nieograniczone. Natomiast w pracy [KP5] uzyskuje się to dzięki założeniu o ograniczonym wzroście komórek. Przy tym założeniu dowód o generowaniu półgrupy sprowadza się do wykorzystania klasycznego twierdzenia perturbacyjnego Phillipsa. Jednak problemy pojawiają się w innym miejscu, miano-

wicie przy konstrukcji, ograniczonego od dołu i góry, wektora własnego dla półgrupy sprzężonej.

Podsumowując, najważniejsze wyniki uzyskane w rozprawie są następujące:

- twierdzenia o asymptotycznej stabilności i wymiataniu dla częściowo całkowych półgrup Markowa i podstochastycznych,
- przedstawienie ogólnego modelu strukturalnego obejmującego modele wiekowe i dojrzałościowe,
- twierdzenia o wykładniczym asynchronicznym wzroście populacji w strukturalnych modelach populacyjnych.

Wyniki zawarte w rozprawie habilitacyjnej są tematycznie spójne, interesujące i ważne szczególnie dla zastosowań w biologii. Praca habilitacyjna jest rozwiązaniem trudnego problemu naukowego i stanowi znaczący wkład w rozwój teorii półgrup Markowa i modeli populacyjnych.

Przejdę teraz do omówienia pozostałych prac doktor Pichór z podziałem na dorobek przed doktoratem i dorobek po doktoracie niewchodzący w skład habilitacji.

Przed doktoratem Habilitantka opublikowała cztery prace: [KP6]-[KP9]. Najciekawsza z nich jest praca [KP7] napisana wraz z R. Rudnickim, opublikowana w *J. Math. Anal. Appl.* w 1997 roku. W pracy tej wprowadzono technikę dowodów asymptotycznej stabilności dla abstrakcyjnych półgrup Markowa opartą na alternatywie Foguela oraz nowej metodzie tzw. funkcji Hasminskiiego. Istnienie funkcji Hasminskiiego wyklucza wymiatanie, dzięki czemu unika się trudnego dowodu istnienia gęstości niezmienniczej dla półgrupy. Jednak i konstrukcja funkcji Hasminskiiego nie jest prosta i nie ma na to uniwersalnej metody. W [KP7] podano sposób takiej konstrukcji, oparty na zasadzie maksimum, dla układów równań cząstkowych typu parabolicznego opisujących dwustanowy proces dyfuzji. Inny sposób konstrukcji funkcji Hasminskiiego pokazała Habilitantka w pracy [KP9]. Rozważa w niej częściowo całkowite równanie różniczkowe z zaburzeniem całkowym. Funkcję Hasminskiiego, uzyskuje dzięki metodzie opartej o pomysłówą aproksymację przez funkcje z dziedziny operatora sprzężonego. W pracy [KP8] badany jest problem asymptotycznej stabilności półgrupy generowanej przez

proces dyfuzji zaburzanej procesami skokowymi. W dowodzie twierdzenia o asymptotycznej stabilności również stosuje się metodę opartą na funkcji Hasminskiego, a konstruuje się ją, podobnie jak w [KP7], przy użyciu zasady maksimum. Chciałbym też zwrócić uwagę na pracę [KP6] dotyczącą stochastycznie sperturbowanego dyskretnego układu dynamicznego. Była to pierwsza praca Habilitantki i choć opublikowana w *Annales Mathematicae Silesianae*, została zacytowana między innymi w monografii A. Boyarsky'ego i P. Góry dotyczącej teorii ergodycznej: *Laws of chaos: invariant measures and dynamical systems in one dimension*, Boston (1997).

Na dorobek po doktoracie niewchodzący w skład habilitacji składają się cztery prace: [KP10]-[KP13]. Prace [KP10] i [KP13] mają charakter przeglądowy. W pracy [KP11] rozpatruje się model populacji: ofiara–drapieżca, opisywany przez zdegenerowany układ równań stochastycznych. Wykazano, że po długim czasie, w zależności od współczynników, gęstości rozkładów mogą zmierzać w L^1 do gęstości niezmienniczej lub w słabej topologii do miary singularnej. Praca spotkała się z dużym zainteresowaniem (25 cytowań). W pracy [KP12] badany jest model ekspresji genów opisany za pomocą procesu stochastycznego kawałkami deterministycznego. Używając techniki opracowanej w [KP1] pokazano asymptotyczną stabilność otrzymanej pólgrupy.

Oceniając całość dorobku naukowego doktor Pichór należy podkreślić, że dotyczy on ważnych zagadnień naukowych i choć składa się na niego 13 publikacji, to jednak są to prace obszerne, opublikowane w bardzo dobrych czasopismach o zasięgu międzynarodowym, które spotkały się z dużym zainteresowaniem i są cenione przez specjalistów. Należy również podkreślić różnorodność badań prowadzonych przez Habilitantkę i umiejętność współpracy z dobrymi matematykami: J. Banasiakiem, A. Bobrowskim, T. Lipniackim, R. Rudnickim, M. Tyran-Kamińską.

Habilitantka brała udział w wielu konferencjach międzynarodowych, na których referowała swoje wyniki oraz brała udział w czterech projektach międzynarodowych, w ramach których dwukrotnie odwiedziła Uniwersytet w Pau we Francji i dwukrotnie Uniwersytet w Durbanie w RPA. Zajmowała się organizacją konferencji, w tym była sekretarzem komitetu organizacyjnego warsztatów w Będlewie w 2003 r. Była kierownikiem projektu badawczego KBN i wykonawcą w pięciu innych projektach badawczych finansowanych przez KBN. Brała udział projekcie Prof. A. Lasoty w ramach Subsydium

Fundacji Nauki Polskiej i w międzyuczelnianej sieci badawczej (SUDITE). Otrzymała Nagrodę Rektora za najlepszą pracę doktorską na Wydziale Mat. Fiz. Chem. Uniwersytetu Śląskiego w latach 1998-1999.

Podsumowując, uważam, że całościowy dorobek doktor Katarzyny Pichór oraz rozprawa habilitacyjna spełniają wymagania stawiane kandydatom do stopnia doktora habilitowanego. Stawiam wniosek o dopuszczenie doktor Pichór do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

dr hab. Jan Malczak, Prof. AGH

