Autoreferat

dr Katarzyna Pichór

Instytut Matematyki
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Śląskiego
ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice
katarzyna.pichor@us.edu.pl

1. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne – z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej.

1. Dyplom magistra matematyki w zakresie matematyki - specjalność zastosowania matematyki, uzyskany 16 czerwca 1992 roku na Wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

2. Dyplom doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki uzyskany w dniu 05 maja 1998r. na Wydziale Matematyki Fizyki i Chemii Uniwersytetu Śląskiego.

Tytuł rozprawy doktorskiej:

Półgrupy operatorów Markowa i ich zastosowania do badania asymptotycznej stabilności równań cząstkowych

2. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

1. 01.10.1992 - 30.09.1998 zatrudniona w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Zakładzie Biomatematyki na stanowisku asystenta

2. 01.10.1998 - 30.09.2011 zatrudniona w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Zakładzie Biomatematyki na stanowisku adiunkta

w tym czasie dwukrotnie byłam zatrudniona w Instytucie Matematycznym PAN na czas określony:

3. 01.10.1999 - 30.09.2000 zatrudniona w Instytucie Matematycznym PAN w Zakładzie Funkcji Uogólnionych na stanowisku adiunkta

4. 15.02.2003 - 14.08.2003 zatrudniona w Instytucie Matematycznym PAN w Zakładzie Funkcji Uogólnionych na stanowisku adiunkta

5. 01.10.2011 - zatrudniona w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Zakładzie Biomatematyki na stanowisku starszego wykładowcy

3. Wskazanie osiągnięcia* wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych

KPw/

i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):

Wskazane osiągnięcie wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki stanowi cykl pięciu prac pod tytułem:

Półgrupy stochastyczne, ich własności i zastosowania w strukturalnych modelach populacyjnych

3.1. Lista prac

[KP1] K. Pichór, R. Rudnicki, Continuous Markov semigroups and stability of transport equations, *J. Math. Anal. Appl.* **249** (2000), 668–685, DOI:10.1006/jmaa.2000.6968

[KP2] R. Rudnicki, K. Pichór, Markov semigroups and stability of the cell maturity distribution, *J. Biol. Systems* **8** (2000), 69–94. DOI: 10.1142/S0218339000000067

[KP3] K. Pichór, Asymptotic stability and sweeping of substochastic semigroups, *Ann. Polon. Math.* **103** (2012), 123-134, DOI:10.4064/ap103-2-2

[KP4] J. Banasiak, K. Pichór, R. Rudnicki, Asynchronous exponential growth of a general structured population model, *Acta Appl. Math.* **119** (2012), 149-166, DOI: 10.1007/s10440-011-9666-y

[KP5] K. Pichór, Asymptotic behaviour of a structured population model, *Mathematical and Computer Modelling* **57** (2013), 1240–1249, DOI: 10.1016/j.mcm.2012.10.027

3.2. Omówienie wyników

3.2.1. Wprowadzenie

Moje zainteresowania naukowe dotyczą zagadnień położonych na styku teorii równań różniczkowych, probabilistyki i biomatematyki. Badałam problemy związane z asymptotycznymi własnościami rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych typu Fokkera-Plancka. Równania te generują ciągłe półgrupy stochastyczne (Markowa) na $L^1(X)$, więc zagadnienie asymptotycznej stabilności rozwiązań odpowiednich równań różniczkowych cząstkowych sprowadza się

KPi

do badania analogicznej własności dla półgrup stochastycznych generowanych przez te równania. Opracowałam nowe, efektywne kryteria asymptotycznej stabilności półgrup stochastycznych i podstochastycznych. Półgrupy takie odgrywają ważną rolę przy opisie różnorodnych procesów przyrodniczych m.in. w astrofizyce [7], teorii procesów skokowych [33, 36] i dyfuzyjnych [26], czy dynamice populacyjnej [9, 27]. W szczególności znajdują zastosowanie w opisie modeli strukturalnych dynamiki populacyjnej i procesów fragmentacji oraz w badaniu nieskończonych układów równań różniczkowych zwyczajnych modelujących procesy urodzin i śmierci, rozkłady genów w genomie [35] oraz procesy gałązkowe [1]. Przedstawiona rozprawa habilitacyjna dotyczy zastosowań półgrup stochastycznych głównie w teorii strukturalnych modeli populacyjnych, ale pewne wyniki teoretyczne są również ilustrowane przykładami procesów dyfuzji, procesów kawałkami deterministycznych i procesów urodzin i śmierci.

3.2.2. Inspiracja badań

Teoria operatorów i półgrup stochastycznych, zwanych również operatorami i półgrupami Markowa, pojawiła się w związku z badaniami w różnych działach matematyki: w teorii łańcuchów Markowa, teorii ergodycznej oraz równań dyfuzji i transportu. Wyniki dotyczące tej tematyki, uzyskane do połowy lat 80-tych ubiegłego wieku, zostały praktycznie zebrane w książkach S.R. Foguela [11], E. Nummelina [31] i A. Lasoty i M.C. Mackey'a [23]. Pierwsze dwie książki zawierają głównie rezultaty z zakresu teorii operatorów Harrisa, zaś trzecia z nich poświęcona jest zastosowaniom w teorii miar niezmienniczych dla układów dynamicznych oraz półgrup operatorów generowanych przez różnorodne równania różniczkowe cząstkowe, często z dodatkowym zaburzeniem całkowym. Inspiracją naszych badań były rezultaty A. Lasoty, a w szczególności twierdzenia dotyczące dokładności odwzorowań lokalnie rozszerzających, metoda funkcji dolnej oraz twierdzenie o asymptotycznej okresowości. W latach 90-tych okazało się, że metody te nie wyczerpują wszystkich możliwości badania asymptotyki długoczasowej półgrup stochastycznych. Użycie technik związanych z operatorami Harrisa prowadzi do nowych rezultatów, w szczególności do tzw. alternatywy Foguela. Wyniki te, kluczowe z punktu widzenia rozprawy, poprzedzimy odpowiednimi definicjami i omówimy w następnym rozdziale.

3.2.3. Asymptotyczne własności półgrup stochastycznych

W rozdziale tym omówione są następujące pojęcia z zakresu asymptotyki półgrup stochastycznych: asymptotyczna stabilność i wymiatanie półgrup stochastycznych oraz alternatywa Foguela dla takich półgrup.

Kgw

Asymptotyczna stabilność

Niech (X, Σ, m) będzie przestrzenią z miarą σ-skończoną m i $L^1 := L^1(X, \Sigma, m)$. Niech $D = \{f \in L^1 \colon f \geqslant 0, \|f\| = 1\}$ oznacza zbiór gęstości. Ciągłą półgrupę $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ odwzorowań liniowych przestrzeni L^1 w siebie spełniającą warunek $P(t)(D) \subset D$ dla $t \geqslant 0$ nazywamy *półgrupą stochastyczną*. Z pojedynczym operatorem stochastycznym P można związać półgrupę z czasem dyskretnym $\{P^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Gęstość f_* nazywamy *niezmienniczą* względem półgrupy stochastycznej $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$, jeśli $P(t)f_* = f_*$ dla każdego $t > 0$. Półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest *asymptotycznie stabilna* jeśli ma taką gęstość niezmienniczą f_*, że

$$\lim_{t\to\infty} \|P(t)f - f_*\| = 0 \quad \text{dla} \quad f \in D.$$

Półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest *częściowo całkowa* jeśli istnieją takie $t_0 > 0$ i mierzalna nieujemna funkcja $q(x, y)$, że

$$\int_X \int_X q(x, y)\, m(dx)\, m(dy) > 0 \tag{1}$$

i

$$P(t_0)f(x) \geqslant \int_X q(x, y) f(y)\, m(dy) \quad \text{dla każdej } f \in D. \tag{2}$$

Jeśli we wzorze (2) mamy równość, to półgrupa jest nazywana *półgrupą całkową*. Bezpośrednim punktem wyjścia dla naszych rozważań było następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 ([32]). *Niech $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ będzie, ciągłą lub dyskretną, częściowo całkową półgrupą stochastyczną. Zakładamy, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma gęstość niezmienniczą f_* i nie ma innych punktów okresowych w zbiorze gęstości. Jeśli $f_* > 0$ p.w., to półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest asymptotycznie stabilna.*

Z Twierdzenia 1 wynikają następujące wnioski dla półgrup rozmywających lub nakładających nośniki. Przypomnijmy, półgrupa stochastyczna $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ *rozmywa nośniki*, jeśli dla każdego zbioru $A \in \Sigma$ i każdej $f \in D$ mamy

$$\lim_{t\to\infty} m(\operatorname{supp} P(t)f \cap A) = m(A)$$

lub *nakłada nośniki* jeśli dla każdej $f, g \in D$ istnieje takie $t > 0$, że

$$m(\operatorname{supp} P(t)f \cap \operatorname{supp} P(t)g) > 0.$$

Wniosek 1 ([32]). *Częściowo całkowa półgrupa stochastyczna, która rozmywa nośniki i ma gęstość niezmienniczą jest asymptotycznie stabilna.*

KR

Wniosek 2 ([32]). *Częściowo całkowa półgrupa stochastyczna, która nakłada nośniki i ma gęstość niezmienniczą $f_* > 0$ p.w. jest asymptotycznie stabilna.*

Podobne wyniki uzyskano wcześniej dla stochastycznych półgrup całkowych [4, 28, 33, 34]. Twierdzenie 1, pozwoliło przenieść poprzednie wyniki na szerszą klasę półgrup stochastycznych, mianowicie klasę półgrup częściowo całkowych. Inny dowód Wniosku 2 znajduje się w [5].

Wymiatanie

Półgrupa stochastyczna $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest *wymiatająca* ze zbioru $A \in \Sigma$, jeśli dla każdej $f \in D$

$$\lim_{t\to\infty} \int_A P(t)f(x)\, m(dx) = 0. \tag{3}$$

Pojęcie wymiatania zostało wprowadzone przez Komorowskiego i Tyrchę [22]. Wyszczególnimy następujący warunek:

(KT): Istnieje mierzalna funkcja f_* taka, że: $P(t)f_* \leqslant f_*$ dla $t \geqslant 0$, $f_* \notin L^1$, $0 < f_* < \infty$ p.w. i $\int_A f_*\, dm < \infty$.

Twierdzenie 2 ([22]). *Niech $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ będzie całkową półgrupą stochastyczną, która nie ma gęstości niezmienniczej. Zakładamy, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ i zbiór $A \in \Sigma$ spełniają warunek (KT). Wtedy półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest wymiatająca ze zbioru A.*

W pracy [32] pokazano, że Twierdzenie 2 zachodzi dla szerszej klasy operatorów niż operatory całkowe (zob. [32] Corollary 4 i Remark 6).

Twierdzenie 3. *Niech $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ będzie półgrupą stochastyczną, która nakłada nośniki. Zakładamy, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ i zbiór $A \in \Sigma$ spełniają warunek (KT). Wtedy półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest wymiatająca ze zbioru A.*

Jednak w konkretnych zastosowaniach trudno jest udowodnić, że półgrupa ma funkcję podniezmienniczą f_* występującą w warunku (KT). Przydatne okazało się następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4 ([32]). *Niech X będzie przestrzenią metryczną i Σ niech będzie σ-algebrą zbiorów borelowskich. Zakładamy, że półgrupa stochastyczna $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma następujące własności:*

(a) *dla każdej $f \in D$ mamy $\int_0^\infty P(t)f\, dt > 0$ p.w. lub $\sum_{n=0}^\infty P^n f > 0$ p.w., jeśli $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest półgrupą dyskretną,*

(b) *dla każdego $y_0 \in X$ istnieją takie $\varepsilon > 0$ i mierzalna funkcja $\eta \geqslant 0$, że $\int \eta\, dm > 0$ i*

$$q(x,y) \geqslant \eta(x)\mathbf{1}_{B(y_0,\varepsilon)}(y),$$

gdzie q jest funkcją spełniającą (1) i (2). Jeśli półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ nie ma gęstości niezmienniczej, to jest wymiatająca ze zbiorów zwartych.

Alternatywa Foguela

Mówimy, że półgrupa stochastyczna $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ spełnia *alternatywę Foguela*, jeśli jest albo asymptotycznie stabilna, albo wymiatająca z dostatecznie dużej rodziny zbiorów. Taką rodziną mogą być na przykład wszystkie zbiory zwarte. Z Wniosku 1 i Twierdzenia 4 wynika natychmiast

Twierdzenie 5. *Niech X będzie przestrzenią metryczną, a Σ niech będzie σ–algebrą zbiorów borelowskich. Niech $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ będzie półgrupą stochastyczną. Zakładamy, że istnieją takie $t > 0$ i funkcja ciągła $q : X \times X \longrightarrow (0, \infty)$, że*

$$P(t)f(x) \geqslant \int_X q(x,y)f(y)\,m(dy) \quad \text{dla } f \in D. \tag{4}$$

Wtedy półgrupa jest albo asymptotycznie stabilna, albo wymiatająca z rodziny zbiorów zwartych.

Wykorzystując powyższe twierdzenie sprawdza się, że alternatywa Foguela zachodzi dla dyfuzji wielostanowej [26, 32], [KP7], procesów dyfuzji zaburzanych procesami skokowymi [KP8] i równań transportu [KP9].

3.2.4. Wyniki dotyczące asymptotycznych własności półgrup stochastycznych

W dalszej części autoreferatu będziemy zakładać, że $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest ciągłą półgrupą stochastyczną.

W pracy [KP1] podajemy nowe kryteria asymptotycznej stabilności częściowo–całkowych półgrup stochastycznych z czasem ciągłym. Dla takich półgrup wzmocniliśmy wypowiedź Twierdzenia 1.

Twierdzenie 6 (KP1 Theorem 2). *Niech (X, Σ, μ) będzie σ-skończoną przestrzenią mierzalną i niech $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ będzie ciągłą, częściowo całkową półgrupą stochastyczą. Zakładamy, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma dokładnie jedną gęstość niezmienniczą f_*. Jeśli $f_* > 0$ p.w., to półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest asymptotycznie stabilna.*

Powyższe twierdzenie jest centralnym wynikiem rozprawy habilitacyjnej. Założenie o ciągłości półgrupy jest tu istotne. Dla półgrup dyskretnych Twierdzenie 6 nie zachodzi. W dowodzie Twierdzenia 6 wykorzystuje się teorię operatorów Harrisa [11, 18].

KPr

Uwaga 1. *W zastosowaniach często zastępujemy założenie o tym, że gęstość niezmiennicza dla półgrupy jest jedyna, innym, łatwiejszym do sprawdzenia warunkiem. Wystarczy założyć, że półgrupa nie ma nietrywialych zbiorów niezmienniczych, tzn. nie istnieje taki zbiór* $E \in \Sigma$, *że* $m(E) > 0$, $m(X \setminus E) > 0$ *i* $P(t)E = E$ *dla wszystkich* $t > 0$. *Tutaj* $P(t)$ *jest zdefiniowany z dokładnością do zbioru miary zero na* σ*-algebrze* Σ *poprzez formułę: jeśli* $f \geqslant 0$, $\operatorname{supp} f = A$ *i* $\operatorname{supp} Pf = B$ *to* $PA = B$.

Jeśli X jest przestrzenią zwartą, to z Twierdzenia 4 i Twierdzenia 6, wynika następujący wniosek, który znalazł zastosowanie między innymi w pracy [KP12].

Wniosek 3 (KP12 Corollary 1). *Niech* X *będzie zwartą przestrzenią metryczną i* Σ *niech będzie* σ*–algebrą zbiorów borelowskich. Niech* $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ *będzie półgrupą stochastyczną spełniającą następujące warunki:*
(a) dla każdej $f \in D$ *mamy* $\int_0^\infty P(t)f\,dt > 0$ *p.w.,*
(b) dla każdego $y_0 \in X$ *istnieją takie* $\varepsilon > 0$, $t > 0$, *i mierzalna funkcja* $\eta \geqslant 0$, *że* $\int \eta\, dm > 0$ *i*

$$P(t)f(x) \geqslant \eta(x) \int_{B(y_0,\varepsilon)} f(y)\, m(dy)$$

dla $x \in X$, *gdzie* $B(y_0, \varepsilon)$ *jest kulą otwartą o środku* y_0 *i promieniu* ε.
Wtedy półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ *jest asymptotycznie stabilna.*

Z Twierdzeń 4 i 6 wynika również następująca postać alternatywy Foguela:

Wniosek 4. *Niech* X *będzie przestrzenią metryczną i* Σ *niech będzie* σ*–algebrą zbiorów borelowskich. Niech* $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ *będzie całkową półgrupą stochastyczną z ciągłym i dodatnim jądrem* $k(t, x, y)$ *dla* $t > 0$. *Jeśli półgrupa* $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ *ma gęstość niezmienniczą, to jest asymptotycznie stabilna, jeśli natomiast* $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ *nie ma gęstości niezmienniczej, to jest wymiatająca z rodziny zbiorów zwartych.*

Omówimy teraz zastosowanie Twierdzenia 6 w badaniu procesów skokowych. Niech $X = \mathbb{R}^d$, $\Sigma = \mathcal{B}(X)$ niech będzie σ-algebrą zbiorów borelowskich na X, a przez μ oznaczamy miarę Lebesgue'a na X. Rozważmy następujące równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au - \lambda u + \lambda P u, \tag{5}$$

gdzie

$$Au = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial(b_i u)}{\partial x_i},$$

$\lambda > 0$ i P jest operatorem stochastycznym związanym z iterowanym układem funkcyjnym $(S_1(x), \ldots, S_N(x), p_1(x), \ldots, p_N(x))$. Zakładamy, że $S_i : X \to X$, dla $i = 1, \ldots, N$, jest ciągiem różniczkowalnych w sposób ciągły takich transformacji, że $\det S_i'(x) \neq 0$ dla prawie wszystkich x oraz zakładamy, że $p_i : X \to [0,1]$, $i = 1, \ldots, N$, jest ciągiem takich funkcji ciągłych, że $\sum_{i=1}^N p_i(x) = 1$ dla każdego $x \in X$. Równanie (5) ma następującą interpretację. Rozważamy ruch cząsteczek wzdłuż rozwiązań równania $x' = b(x)$. W czasie $[t, t + \Delta t]$ cząsteczka z prawdopodobieństwem $p_i(x)\Delta t + o(\Delta t)$ może przeskoczyć z punktu x do $S_i(x)$. Dla każdego $\bar{x} \in X$ oznaczamy przez $\pi_t \bar{x}$ rozwiązanie $x(t)$ równania $x'(t) = b(x(t))$ z warunkiem początkowym $x(0) = \bar{x}$. Zakładamy, że $\pi_t(X) \subset X$ dla wszystkich $t \geqslant 0$. Wtedy równanie (5) generuje półgrupę stochastyczną $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ na przestrzeni $L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$. Zauważmy, że $P(t)E \subset E$ dla każdego $t \geqslant 0$ i pewnego mierzalnego zbioru E wtedy i tylko wtedy, gdy $S_i(E) \subset E$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, N$ i $\pi_t(E) \subset E$ dla każdego $t \geqslant 0$. Mamy następujące Twierdzenie, w którym podajemy nowe warunki wystarczające na stabilność dla równań różniczkowych z losowym zaburzaniem skokowym.

Twierdzenie 7 (KP1 Proposition 1.). *Zakładamy, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma niezerową niezmienniczą funkcję i nie ma nietrywialnych zbiorów niezmienniczych. Niech $(i_1, \ldots, i_d)$ będzie danym ciągiem liczb ze zbioru $\{1, \ldots, N\}$. Niech $x_0 \in X$ będzie danym punktem i niech $x_j = S_{i_j}(x_{j-1})$ dla $j = 1, \ldots, d$. Połóżmy*

$$v_j = S_{i_d}'(x_{d-1}) \ldots S_{i_j}'(x_{j-1}) b(x_{j-1}) - b(x_d)$$

dla $j = 1, \ldots, d$. Zakładamy, że $p_{i_j}(x_{j-1}) > 0$ dla wszystkich $j = 1, \ldots, d$ i zakładamy, że wektory $v_1, \ldots, v_d$ są liniowo niezależne. Wtedy półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest asymptotycznie stabilna.

Założenie o istnieniu niezerowej funkcji niezmienniczej dla półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ oznacza, że $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma gęstość niezmienniczą. Łatwo zauważyć, że jeśli półgrupa stochastyczna $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma niezerową funkcję niezmienniczą $f \in L^1$, to funkcja $f_* = f^+/\|f^+\|$, zakładając, że $\|f^+\| > 0$, jest gęstością niezmienniczą dla $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$. Dowodzimy, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest częściowo całkowa. Z Twierdzenia 6 i Uwagi 1 dostajemy, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest asymptotycznie stabilna.

W pracy [KP1] badamy również procesy kawałkami deterministyczne (losowo sterowane układy dynamiczne). Procesy takie szczegółowo opisane są w [KP1, Section 3.2]. W skrócie: mamy k układów dynamicznych $\pi_t^i(x)$ związanych z równaniami $x' = b(x, i)$, $i = 1, \ldots, k$ które losowo przełączamy. Przez $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ oznaczamy półgrupę stochastyczną związaną z tym układem. Niech $(i_1, \ldots, i_{d+1})$ będzie ciągiem liczb ze zbioru $\Gamma = \{1, \ldots, k\}$. Dla $x \in X$ i $t > 0$ definiujemy funkcję $\psi_{x,t}$ na $\Delta_t = \{\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_d) : \tau_i > 0, \tau_1 + \cdots + \tau_d \leqslant t\}$

KAR

przez

$$\psi_{x,t}(\tau_1,\dots,\tau_d)=\pi^{i_{d+1}}_{t-\tau_1-\tau_2-\dots-\tau_d}\circ\pi^{i_d}_{\tau_d}\circ\dots\circ\pi^{i_2}_{\tau_2}\circ\pi^{i_1}_{\tau_1}(x).$$

Mamy następujące twierdzenie o asymptotycznej stabilności półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$.

Twierdzenie 8 (KP1 Proposition 2). *Zakładamy, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma niezerową niezmienniczą funkcję i nie ma nietrywialnych zbiorów niezmienniczych. Zakładamy, że dla pewnego $x_0\in X$, $t_0>0$ i $\tau^0\in\Delta_{t_0}$ mamy*

$$\det\left[\frac{d\psi_{x_0,t_0}(\tau^0)}{d\tau}\right]\neq 0. \tag{6}$$

Wtedy półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest asymptotycznie stabilna.

Zauważmy, że mierzalny zbiór $E\subset X\times\Gamma$ jest niezmienniczym dla półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy E jest postaci $E=E_0\times\Gamma$ i $\pi^i_t(E_0)=E_0$ dla $t\geqslant 0$ i $i=1,\dots,k$. Dowód Twierdzenia 8 przebiega podobnie jak dowód Twierdzenia 7.

W pracy [KP3] rozważa się szerszą klasę półgrup, mianowicie półgrupy podstochastyczne częściowo całkowe. Przez *półgrupę podstochastyczną* rozumiemy półgrupę operatorów liniowych i nieujemnych o normie mniejszej lub równej jeden. Dla takich półgrup podaje się nowe, efektywne warunki wystarczające na asymptotyczną stabilność i wymiatanie. Rezultat ten jest uogólnieniem Twierdzenia 6. Przenosimy ten wynik na podstochastyczne częściowo całkowe ciągłe półgrupy operatorów, które mają jedyną gęstość niezmienniczą, ale nośnik tej gęstości nie musi być całą przestrzenią. Pokazujemy, że na nośniku gęstości niezmienniczej jest asymptotyczna stabilność, a poza tym zbiorem, przy słabszych założeniach niż w dotychczasowych pracach, wymiatanie.

Twierdzenie 9 (KP3, Main Theorem 3.1). *Niech X będzie przestrzenią metryczną, a $\Sigma=\mathcal{B}(X)$. Niech $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ będzie podstochastyczną półgrupą na $L^1(X)$, która ma jedyną gęstość niezmienniczą f_* i niech $S=\operatorname{supp} f_*$. Zakładamy, że $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest częściowo całkowa z takim jądrem $k(t,x,y)$, że*

$$\int_S\int_S k(t_0,x,y)\,m(dx)\,m(dy)>0$$

dla pewnego $t_0>0$. Ponadto zakładamy, że dla pewnego $t_1>0$

(a) *nie istnieje niepusty mierzalny zbiór $B\subsetneq X\setminus S$ taki, że $P^*(t_1)\mathbf{1}_B\geqslant\mathbf{1}_B$ i*

(b) *dla każdego $y_0\in X\setminus S$ istnieją takie $\varepsilon>0$ i mierzalna funkcja $\eta\geqslant 0$, że $\int_{X\setminus S}\eta\,dm>0$ i*

$$k(t_1,x,y)\geqslant\eta(x) \tag{7}$$

kPw

dla $x \in X$ i $y \in B(y_0, \varepsilon)$, gdzie $B(y_0, \varepsilon)$ jest kulą otwartą o środku y_0 i promieniu ε.

Wtedy dla każdej gęstości f istnieje taka stała $c(f)$, że

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{1}_S P(t)f = c(f)f_*$$

i dla każdego zbioru zwartego $F \in \Sigma$ i gęstości f mamy

$$\lim_{t\to\infty} \int_{F\cap X\setminus S} P(t)f(x)\, m(dx) = 0.$$

Dowód oparty jest na własnościach operatorów Harrisa [11, 18]. Zauważmy, że prawdziwa jest następująca implikacja: jeśli postochastyczna półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ na $L^1(X)$ ma dokładnie jedną gęstość niezmienniczą f_* o nośniku $\operatorname{supp} f_* = X$, to $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest półgrupą stochastyczną [KP3 Lemma 4.2]. Jeśli założymy dodatkowo, że ta półgrupa jest częściowo całkowa, to z Twierdzenia 9 wynika, że

$$\lim_{t\to\infty} P(t)f = f_*$$

dla każdej gęstości f.

Teoretyczne wyniki ilustrujemy między innymi przykładem półgrup generowanych przez proces urodzin i śmierci. Taki proces na przestrzeni $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ jest opisywany poprzez następujący układ równań:

$$x_i'(t) = -a_i x_i(t) + b_{i-1}x_{i-1}(t) + d_{i+1}x_{i+1}(t) \tag{8}$$

dla $i \geqslant 0$, gdzie $b_{-1} = d_0 = 0$, $b_i \geqslant 0$, $d_{i+1} \geqslant 0$ dla $i \geqslant 0$, $a_0 = b_0$, $a_i = b_i + d_i$ dla $i \geqslant 1$. Układ ten, przy założeniu $b_i \leqslant Ci$ dla $i \in \mathbb{N}$, generuje ciągłą półgrupę stochastyczną. Zakładamy, że $d_i > 0$ dla $i > 0$ i że istnieje takie $n > 0$, że $b_n = 0$, $b_i > 0$ dla $i \neq n$. Wtedy założenia Twierdzenia 9 są spełnione, a stąd mamy, że dla każdego $\bar{x} \in l^1$ istnieje taka stała $c(\bar{x})$, że rozwiązanie (8) z warunkiem początkowym $x(0) = \bar{x}$ spełnia

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = c(\bar{x})x_i^* \quad \text{dla } i \leqslant n,$$

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0 \qquad \text{dla } i > n,$$

gdzie $x^* = (x_i^*)$ jest gęstością niezmienniczą o nośniku $\operatorname{supp} x^* = \{0, 1, \dots, n\}$.

3.2.5. Wyniki dotyczące zastosowania w strukturalnych modelach populacyjnych.

Model dojrzałościowy i wiekowy

W pracy [KP2] rozważa się model strukturalny opisujący ewolucję w czasie rozkładu dojrzałości komórek. W modelu tym komórka charakteryzowana jest

KP

parametrem, liczbą rzeczywistą $x \in [a, 1]$, utożsamianą z jej dojrzałością (np. masą lub rozmiarem komórki). Dojrzałość x rośnie w czasie zgodnie z równaniem $x'(t) = g(x(t))$. Komórka o dojrzałości x może umrzeć lub podzielić się z intensywnością, odpowiednio, $\mu(x)$ i $b(x)$. Rozmnażanie komórek dane jest za pomocą funkcji przejścia $\mathcal{P}(x, A)$ opisujacej relację między dojrzałością komórki matczynej x a rozkładem dojrzałości komórek potomnych. Model biologiczny prowadzi do odpowiedniego równania cząstkowo-operatorowego ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial(gu)}{\partial x} - (\mu + b)u + 2P(bu), \tag{9}$$

gdzie $P : L^1[a, 1] \to L^1[a, 1]$ jest operatorem stochastycznym spełniającym warunek $P^* \mathbf{1}_B(x) = \mathcal{P}(x, B)$, o ile taki operator istnieje.

Prosta wersja tego modelu pojawiła się w pracy Bella i Andersona [6] i była badana między innymi w pracach [9, 12, 30, 38]. Nasz model jest uogólnieniem wcześniej rozważanych modeli [9, 12, 14, 27], w których zakładano, że w wyniku podziału komórki powstają dwie komórki potomne o tej samej dojrzałości jak również modeli z nierównomiernym podziałem dojrzałości [2, 13, 16, 19]. Model ten obejmuje również ciekawy przypadek rozmnażania niektórych gatunków bakterii, w którym występuje jednocześnie podział na komórki identyczne jak i pojawienie się tzw. minikomórek, a więc podział losowy nierównomierny [21].

W modelu przyjmujemy naturalne założenia dotyczące podziału komórkowego. Po piersze zakładamy, że komórka o dojrzałości x nie może mieć komórek potomnych o dojrzałości przekraczającej $x - h$, $h > 0$, a to oznacza, że

$$\mathcal{P}(x, [a, x - h]) = 1 \qquad \text{dla wszystkich} \quad x \in [a, 1].$$

Po drugie wszystkie komórki dzielą się przed osiągnięciem maksymalnej dojrzałości 1, co uzyskuje się zakładając, że

$$\int_a^1 b(x)\, dx = \infty. \tag{10}$$

Tego typu założenie występuje w wielu modelach populacji komórkowych. Pozostałe założenia mają charakter czysto techniczny (np. regularność współczynników).

W pracy dowodzimy, że równanie (9) generuje ciągłą półgrupę $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ dodatnich operatorów liniowych na $L^1[a, 1]$ [KP2 Theorem1]. Należy zwrócić uwagę na fakt, że operator występujący po prawej stronie równania (9) jest operatorem nieograniczonym i sam fakt generowania C_0 półgrupy nie jest trywialny. Główne twierdzenie tej pracy [KP2 Theorem 3] dotyczy asynchronicznego wzrostu wykładniczego populacji (AEG). Oznacza to, że populacja rozwija się w tempie wykładniczym, zaś rozkład strukturalny dojrzałości zmierza do jednoznacznie zdefiniowanego rozkładu stacjonarnego. W tym przypadku konieczne są pewne założenia, dzięki którym półgrupa będzie nieredukowalna. W tym celu wystarczy założyć, że, na przykład, funkcja przejścia $\mathcal{P}$ ma minorantę całkową lub też, że istnieje taki punkt $x_0 \in (a,1)$, $\varepsilon > 0$ i funkcja $r\colon (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \to [a,1]$, że $r'(x_0) \neq 0$, $b(x_0) > 0$, $g(r(x_0)) \neq r'(x_0)g(x_0)$ i

$$\mathcal{P}(x, \{r(x)\}) \geqslant \varepsilon \quad \text{dla } x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon).$$

Założenie $g(r(x_0)) \neq r'(x_0)g(x_0)$ w pierwszej chwili wydaje się być czysto technicznym, ale w istocie tak nie jest. Na przykład, gdy dojrzałość jest masą komórki i mamy podział równomierny, to warunek ten przyjmuje postać $g(2x_0) \neq 2g(x_0)$ dla pewnego punktu x_0. W przypadku, gdy $g(2x) = 2g(x)$ dla $x \leqslant 1/2$, to bez względu na to kiedy następuje podział komórki, to komórki potomne komórki o ustalonej dojrzałości mają tę samą dojrzałość, a więc mogą występować różne rozkłady stacjonarne.

Dowód Twierdzenia [KP2 Theorem 3] przebiega według następującego schematu. Równanie (9) zapisujemy w postaci ewolucyjnej $u'(t) = Au$. Następnie półgrupę $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ generowaną przez operator A przekształcamy na półgrupę stochastyczną. W tym celu dowodzimy, że istnieją takie $\lambda \in \mathbb{R}$ i dodatnie ciągłe funkcje v i w, że $Av = \lambda v$ i $A^*w = \lambda w$. Stąd wynika, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$, postaci $P(t) = e^{-\lambda t}T(t)$, jest półgrupą stochastyczną na $L^1([a,1], \mathcal{B}([a,1]), m)$, gdzie m jest miarą daną wzorem $m(B) = \int_B w(x)\,dx$, a funkcja $f_* = cv$, gdzie $c > 0$ jest pewną stałą, jest gęstością niezmienniczą względem $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ [KP2 Theorem 2]. Korzystając z własności półgrup stochastycznych, a dokładniej z Twierdzenia 1, dowodzi się asymptotycznej stabilności półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$. Ponieważ miary Lebesgue'a i m są równoważne, otrzymujemy, że $e^{-\lambda t}u(t,\cdot)$ zmierza do $f_*\Phi(u(0,\cdot))$ w $L^1[a,1]$, gdzie $\Phi(\psi) := \int_a^1 \psi(x)w(x)\,dx$.

W dynamice populacyjnej oprócz modelu dojrzałościowego komórek ważną rolę odgrywa model demograficzny McKendricka [29, 37]. W tym przypadku interesujemy się rozkładem wieku osobników. Model ten jest opisany równaniem różniczkowym cząstkowym z całkowym warunkiem brzegowym. W pracy [KP4] podjęta została próba unifikacji modelu dojrzałościowego i wiekowego dzięki wprowadzeniu ogólnego operatora reprodukcji. W tym przypadku startujemy z równania dualnego, które przyjmuje postać

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(x)\frac{\partial v}{\partial x} - \mu(x)v(t,x) + \int_a^1 v(t,y)\mathcal{P}(x,dy),$$

gdzie $\mu(x)$ jest współczynnikiem straty osobników poprzez śmierć lub podział, a $\mathcal{P}$ jest funkcją dziedziczenia parametru przez osobniki potomne. Funkcja $\mathcal{P}$ opisuje zarówno rozkład parametru u osobników potomnych jak również

KPi

prawdopodobieństwo podziału komórkowego lub urodzenia osobnika w przypadku innego typu populacji. Przechodząc od równania dualnego do równania na gęstość rozkładu (równanie typu Fokkera-Plancka) otrzymujemy model strukturalny, który opisywany jest równaniem różniczkowym cząstkowo-operatorowym typu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(g(x)u)}{\partial x} = -\mu(x)u(t,x) + Pu(t,x), \tag{11}$$

z dodatkowym warunkiem brzegowym

$$g(a)u(t,a) = \int_a^1 b^a(x)u(t,x)\,dx, \tag{12}$$

gdzie $b^a(x)$ jest współczynnikiem podziału, opisującym przypadek, gdy osobnik o parametrze x ma potomka z minimalnym parametrem a. Podobnie jak w poprzedniej pracy, w pracy [KP4] dowodzimy, że problem (11) i (12) wraz z warunkiem początkowym $u(0,x) = u_0(x)$ generuje C_0 półgrupę operatorów liniowych na $L^1[a,1]$ [KP4 Theorem 1] oraz przy odpowiednich założeniach dowodzimy twierdzenia o AEG populacji [KP4 Theorem 2]. Dowody odpowiednich twierdzeń w pracach [KP2] i [KP4] są istotnie różne. W szczególności dowód generowania półgrupy $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ bazuje na twierdzeniu perturbacyjnym Descha w przestrzeniach AL [8], [3, Theorem 5.13]. W dowodzie AEG najpierw pokazujemy, że poprzez konstrukcję wektora własnego dla półgrupy $\{T^*(t)\}_{t\geqslant 0}$ problem sprowadza się do badania odpowiedniej półgrupy stochastycznej. Dzięki temu unikamy badania wektorów własnych półgrupy $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$. Następnie dowodzimy asymptotycznej stabilności pomocniczej półgrupy stochastycznej stosując Twierdzenie 6. Warto również zwrócić uwagę na fakt, że jednym z warunków zapewniających AEG jest istnienie takiego $x_0 \in (a,1)$, że $b^a(x_0) > 0$. W ten sposób uzyskujemy m.in. twierdzenie o AEG dla klasycznego równania McKendricka.

W pracach [KP2] i [KP4] dojrzałość jest ograniczona przez 1 ponieważ założyliśmy, że współczynniki urodzeń lub śmierci są nieograniczone w 1. W pracy [KP5] rozpatrywany jest model podobny do modelu z pracy [KP4] z tą różnicą, że ograniczoność dojrzałości uzyskujemy przyjmując założenie, że $g(1) = 0$, co oznacza, że komórki mają ograniczony wzrost. Warunek ten pozwala uniknąć wcześniejszego, dość sztucznego założenia o nieograniczoności łącznego współczynnika śmiertelności i podziału. Dzięki temu problem generowania C_0 półgrupy $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ sprowadza się do klasycznego twierdzenia perturbacyjnego Phillipsa [10]. Podobnie jak w poprzednich pracach główny wynik dotyczy asynchronicznego wzrostu wykładniczego populacji [KP5 Theorem 1]. Główna

KPv

idea dowodu jest podobna do dowodu Twierdzenia [KP4 Theorem 2]. Zasadnicze trudności pojawiają się tu przy konstrukcji wektora własnego dla półgrupy sprzężonej do $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$. Funkcja własna jest rozwiązaniem równania różniczkowego z zaburzeniem operatorowym zależnym od parametru. Należy zwrócić uwagę na fakt, że poszukujemy funkcji własnej ograniczonej od dołu i góry, co jest mocno utrudnione ze względu na założenie $g(1) = 0$.

4. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych

W pracy [KP6] rozważamy stochastycznie sperturbowany dyskretny układ dynamiczny $x_{n+1} = S(x_n)\xi_n$. Wykorzystując rezultat Lasoty i Yorke'a [24], dotyczący nierozszerzających operatorów Markowa na miarach, podajemy warunek wystarczający na słabą zbieżność rozkładów x_n do miary stacjonarnej.

W pracy [KP7] badane są półgrupy operatorów stochastycznych generowane przez dwustanowe procesy dyfuzji. W pracy podano twierdzenie dotyczące asymptotcznej stabilności dla abstrakcyjnych półgrup stochastycznych [KP7 Theorem 2] i zastosowania tych rezultatów do konkretnych układów równań różniczkowych cząstkowych [KP7 Theorem 1]. Dowody twierdzeń oparte są na alternatywie Foguela oraz nowej metodzie tzw. funkcji Hasminskiĭ'ego. Idea postępowania jest następująca. Rozważamy ciągłą półgrupę stochastyczną $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$. Jeśli wiemy, że taka półgrupa spełnia alternatywę Foguela, to wystarczy wykluczyć wymiatanie, aby udowodnić jej asymtotyczną stabilność. Można to zrobić, dowodząc, na przykład, że półgrupa ma gęstość niezmienniczą. Niestety, poza nielicznymi przypadkami, jest to zagadnienie dość trudne. Aby uniknąć sprawdzania istnienia gęstości niezmienniczej, wprowadzamy metodę pozwalającą wykluczyć wymiatanie, polegającą na użyciu tzw. funkcji Hasminskiĭ'ego. Niech A będzie jej generatorem infinitezymalnym $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$, a $\mathcal{R}$ rezolwentą operatora A w punkcie 1. Mierzalną funkcję $V : X \to [0,\infty)$ będziemy nazywać *funkcją Hasminskiĭ'ego* dla stochastycznej półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ i zbioru $Z \in \Sigma$, jeśli istnieją takie $M > 0$ i $\varepsilon > 0$, że

$$(13)\quad \int_X V(x)\mathcal{R}f(x)\,m(dx) \leqslant \int_X (V(x)-\varepsilon)f(x)\,m(dx) + \int_Z M\mathcal{R}f(x)\,m(dx).$$

Wnioskiem z [KP7 Lemma 1 i Lemma 2] jest następujące

Twierdzenie 10. *Niech $\{P(t)\}$ będzie półgrupą stochastyczną generowaną przez równanie*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au.$$

Załóżmy, że istnieje funkcja Hasminskiĭ'ego dla $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ i zbioru Z. Wtedy półgrupa $\{P(t)\}$ nie jest wymiatająca ze zbioru Z.

W zastosowaniach konstruujemy taką funkcję V, że funkcja A^*V jest "dobrze zdefiniowana" i spełnia następujący warunek $A^*V(x) \leqslant -c < 0$ dla $x \notin Z$. Następnie sprawdzamy, że V spełnia (13). Dowód tej implikacji jednak nie jest łatwy, nie mamy też na to uniwersalnej metody. Jak z tym radziliśmy sobie w przypadku konkretnych zastosowań, omówię w dalszej części autoreferatu. Funkcja V została nazwana funkcją Hasminskiĭ'ego, ponieważ w pracy [15] wykazano, ze półgrupa generowana przez równanie Fokkera-Plancka ma gęstość niezmienniczą, jeśli istnieje taka dodatnia funkcja V, że $A^*V(x) \leqslant -c < 0$, jeśli $\|x\| \geqslant r$. Metoda funkcji Hasminskiĭ'ego znalazła zastosowanie w badaniu układów typu parabolicznego opisującego dwustanowy proces dyfuzji. Procesy tego typu używane są do opisu ruchu cząstek przechodzących przez struktury podobne do gąbki lub o strukturze warstwowej. Proces ten opisywany jest poprzez układ równań

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1}{\partial t} = -pu_1 + qu_2 + A_1u_1 \\
\dfrac{\partial u_2}{\partial t} = pu_1 - qu_2 + A_2u_2.
\end{cases}
\tag{14}
$$

Półgrupa generowana przez to równanie spełnia alternatywę Foguela. Aby pokazać jej asymtotyczną stabilność, należy skonstruować odpowiednią funkcję Hasminskiĭego. Dowodzimy, że jeśli istnieją takie nieujemne funkcje V_1 i V_2 klasy C^2, że

$$-p(x)V_1(x) + p(x)V_2(x) + A_1^*V_1(x) \leqslant -\varepsilon,$$

$$q(x)V_1(x) - q(x)V_2(x) + A_2^*V_2(x) \leqslant -\varepsilon$$

dla $\|x\| \geqslant r$, to półgrupa stochastycznej związana z równaniem (14) jest asymptotycznie stabilna [KP7 Theorem 1]. W tym przypadku funkcja postaci $V(x,k) = V_k(x) + M$, $k = 1,2$, jest funkcją Hasminskiĭego dla naszej półgrupy stochastycznej. Trudne było pokazanie, że tak zdefiniowana funkcja, spełnia nierówność (13). Zostało to wykazane przy użyciu zasady maksimum. W pracy znalazły się również przykłady dość zaskakujących efektów. Mogłoby się wydawać, że jeśli oba równania $\dfrac{\partial u}{\partial t} = A_1u$ i $\dfrac{\partial u}{\partial t} = A_2u$ są asymptotycznie stabilne, to układ (14) również będzie asymptotycznie stabilny. Jednak kontrprzykład zamieszczony w [KP7 Remark 2] pokazuje, że powyższe przypuszczenie nie jest

KRw

prawdziwe. Mamy też przykład na to, gdy układ (14) jest asymptotycznie stabilny, choć oba równania $\frac{\partial u}{\partial t} = A_1 u$ i $\frac{\partial u}{\partial t} = A_2 u$ asymptotycznie stabilne nie są [KP7 Remark3].

W pracy [KP8] badamy dyfuzję zaburzaną procesami skokowymi. Rozważmy następujące równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au - \lambda u + \lambda P u, \tag{15}$$

gdzie $\lambda > 0$,

$$Au = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 (a_{ij} u)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial (b_i u)}{\partial x_i} \tag{16}$$

i P jest operatorem stochastycznym zwiazanym z iterowanym układem funkcyjnym $(S_1(x), \dots, S_N(x), p_1(x), \dots, p_N(x))$. Zakładamy, że dla każdego j, mamy $\lim_{\|x\| \to \infty} \|S_j(x)\| = \infty$. Zakładamy, że

$$\lim_{\|x\| \to \infty} 2\langle x, b(x)\rangle + \lambda \sum_{j=1}^{n} p_j(x) \left(\|S_j(x)\|^2 - \|x\|^2 \right) = -\infty,$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^d$. Wtedy półgrupa $\{P(t)\}_{t \geqslant 0}$ generowana przez równanie (15) jest asymptotycznie stabilna [KP8 Theorem 3]. Twierdzenie to uogólnia wcześniejsze wyniki zawarte w pracach [17] i [33]. W dowodzie tego rezultatu również wykorzystaliśmy funkcję Hasminskiiego, a nierówność (13) została wykazana przy użyciu zasady maksimum.

W pracy [KP9] rozważamy częściowo całkowe równanie różniczkowe z zaburzeniem całkowym

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda u = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial (b_i u)}{\partial x_i} + \lambda \int k(x,y) u(y,t)\, dy. \tag{17}$$

Jeśli $k(x,y)$ jest ciągłą i dodatnią funkcją oraz jeśli istnieje taka funkcja $V : X \to [0, \infty)$ klasy C^1, że

$$\sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial V}{\partial x_i} - \lambda V(x) + \lambda \int k(y,x) V(y)\, dy \leqslant -c < 0$$

dla $\|x\| \geqslant r$, $r > 0$, to półgrupa $\{P(t)\}_{t \geqslant 0}$ generowana przez równanie (17) jest asymptotycznie stabilna [KP9 Theorem 1]. W dowodzie tego twierdzenia również była wykorzystywana metoda funkcji Hasminskiĭ'ego. Jednak tym razem dowód nierówności (13) jest istotnie różny. Równanie (17) zapisujemy w postaci ewolucyjnej $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$, a dowód nierówności (13) bazuje na aproksymacji V przez ciąg elementów z dziedziny operatora A^*.

KP

Artykuł [KP10] zawiera omówienie ważnych rezultatów dotyczących asymptotycznych własności półgrup operatorów stochastycznych. W pracy przedstawiono zastosowania tych wyników dla różnorodnych procesów dyfuzji i transportu oraz w modelach biomatematycznych.

W pracy [KP11] badamy układ równań stochastycznych, które modelują dynamikę populacji typu ofiara–drapieżca. Rozważane są różnorodne zaburzenia stochastyczne klasycznego równania Volterry-Lotki. Układ równań jest zdegenerowany i dlatego trudny do badania. Analizowane jest zachowanie się populacji po długim czasie. Pokazano, że w zależności od współczynników gęstości rozkładów mogą zmierzać w L^1 do gęstości niezmienniczej lub w słabej topologii do miary singularnej.

W pracy [KP12] badany jest proces stochastyczny opisujący ekspresję genów. Model tego typu wprowadzony był w pracy [25], był też rozważany w [20]. Gen może być w dwóch fazach: aktywnej lub nieaktywnej. W fazie aktywnej "produkuje" cząsteczki mRNA, które "produkują" cząsteczki białek. Funkcjonowanie układu (a zwłaszcza przejście od fazy aktywnej do nieaktywnej i na odwrót) zależy od liczebności cząsteczek mRNA i białka. Wielkości te zmieniają się wraz ze stanem genu - ilość cząsteczek mRNA rośnie w fazie aktywnej genu, a maleje w fazie nieaktywnej (proces degradacji). Proces wzrostu lub spadku ilości cząsteczek białka również zależy od ilości cząsteczek mRNA. Model ten prowadzi do układu równań różniczkowych ze stochastycznych przełączaniem. Zagadnienie sprowadza się do badania układu równań cząstkowych, a to z kolei do badania półgrupy stochastycznej generowanej przez ten układ. Dowodzimy twierdzenia o asymptotycznej stabilności tej półgrupy [KP12 Theorem 3]. W dowodzie wykorzystujemy Wniosek 3. W języku biologii wynik ten oznacza, że mimo iż działanie poszczególnych genów ma charakter losowy, to rozkład stężenia cząsteczek białka i mRNA dąży do pewnego poziomu równowagi stochastycznej.

W pracy [KP13] omawiamy nowe wyniki dotyczące generowania i własności asymptotycznych półgrup stochastycznych. Teoretyczne wyniki stosuje się w badaniu modeli biologicznych, które są opisywane przez kawałkami deterministyczne procesy Markowa, takich jak: procesy urodzin i śmierci, ewolucja genomu, ekspresja genów i strukturalne modele fizjologiczne.

KP/

Pozostałe prace Katarzyny Pichór

Dorobek przed doktoratem

[**KP6**] K. Oczkowicz, Asymptotic stability of Markov operators corresponding to the dynamical systems with multiplicative perturbations, *Annales Mathematicae Silesianae,* **7** (1993), 99-108.

[**KP7**] K. Pichór, R. Rudnicki, Stability of Markov semigroups and applications to parabolic systems, *J. Math. Anal. Appl.*, **215** (1997), 56-74.
DOI: 10.1006/jmaa.1997.5609

[**KP8**] K.Pichór, R. Rudnicki, Asymptotic behaviour of Markov semigroups and applications to transport equations, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, **45** (1997), 379-397.

[**KP9**] K.Pichór, Asymptotic stability of a partial differential equation with an integral perturbation, *Ann. Pol. Math.*, **68** (1998), 83-94.

Dorobek po doktoracie niewchodzący w skład habilitacji

[**KP10**] R. Rudnicki, K. Pichór, M. Tyran-Kamińska , Markov semigroups and their applications, *in Dynamics of Dissipation, P. Garbaczewski and R. Olkiewicz (eds.), Lecture Notes in Physics,* **vol. 597**, Springer, Berlin 2002, 215-238.

[**KP11**] R. Rudnicki, K.Pichór, Influence of stochastic perturbation on prey-predator systems, *Mathematical Biosciences* **206** (2007), 108-119.
DOI:10.1016/j.mbs.2006.03.006

[**KP12**] A. Bobrowski, T. Lipniacki, K. Pichór, R. Rudnicki, Asymptotic behavior of distributions of mRNA and protein levels in a model of stochastic gene expression, *J. Math. Anal. Appl.* **333** (2007), 753-769.
DOI:10.1016/j.jmaa.2006.11.043

[**KP13**] K. Pichór, R. Rudnicki, M. Tyran-Kamińska, Stochastic semigroups and their applications to biological models, *Demonstratio Mathematica* **45** (2012), 463-494

Katarzyna Pichór

LITERATURA

[1] Linda J.S. Allen, *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology, Pearson Education, Upper Saddle River*, New Yersey, 2003.

[2] O. Arino and M. Kimmel, Comparison of approaches to modeling of cell population dynamics, *SIAM J. Appl. Math.* **53** (1993), 1480–1504.

[3] J. Banasiak, L. Arlotti, *Perturbations of positive semigroups with applications*, Springer, London, 2006.

[4] K. Baron and A. Lasota, *Asymptotic properties of Markov operators defined by Volterra type integrals*, Ann. Polon. Math. **58** (1993), 161–175.

KPw

[5] W. Bartoszek and T. Brown, *On Frobenius-Perron operators which overlap supports*, Bull. Pol. Ac.: Math. **45** (1997), 17–24.

[6] G. I. Bell and E. C. Anderson, Cell growth and division I. A Mathematical model with applications to cell volume distributions in mammalian suspension cultures, *Biophysical Journal* **7** (1967), 329–351.

[7] S. Chandrasekhar and G. Münch, The theory of fluctuations in brightness of the Milky-Way, *Astrophys. J.* **125** (1952), 94–123.

[8] W. Desch, Perturbations of positive semigroups in AL-spaces, (1988), preprint.

[9] O. Diekmann, H. J. A. M. Heijmans, and H. R. Thieme, On the stability of the cell size distribution, *J. Math. Biology* **19** (1984), 227–248.

[10] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, Interscience Publ., New York, 1968.

[11] S.R. Foguel, *The Ergodic Theory of Markov Processes*, Van Nostrand Reinhold Comp., New York, 1969.

[12] M. Gyllenberg and H. J. A. M. Heijmans, An abstract delay-differential equation modelling size dependent cell growth and division, *SIAM J. Math. Anal.* **18** (1987), 74–88.

[13] M. Gyllenberg and G.F. Webb, Age-size structure in populations with quiescence, *Mathematical Biosciences* **86** (1987), 67–95.

[14] M. Gyllenberg and G.F. Webb, A nonlinear structured population model of tumor growth with quiescence, *J. Math. Biology* **28** (1990), 671–694.

[15] R.Z. Hasminskiĭ, *Ergodic properties of recurrent diffusion processes and stabilization of the solutions of the Cauchy problem for parabolic equations*, Teor. Verojatn. Primenen. **5** (1960), 196–214 (in Russian).

[16] H. J. A. M. Heijmans, On the stable size distribution of populations reproducing by fission into two unequal parts, *Mathematical Biosciences* **72** (1984), 19–50.

[17] D. Jama, Asymptotic stability of an integro-differential equation of parabolic type, *Ann. Polon. Math.* textbf47 1986, 65–78.

[18] B. Jamison and S. Orey, *Markov chains recurrent in the sense of Harris*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **8** (1967), 41–48.

[19] M. Kimmel, Z. Darzynkiewicz, O. Arino, and F. Traganos, Analysis of a cell cycle model based on unequal division of metabolic constituents to daughter cells during cytokinesis, *J. Theor. Biol.* **110** (1984), 637–664.

[20] M. Komorowski, J. Miękisz, and A. M. Kierzek, Translational repression contributes greater noise to gene expression than transcriptional repression, *Biophysical Journal* **96** (2009), 372–384.

[21] A.L. Koch and J.V. Holtje, A physical basis for the precise location of the division site of rod-shaped bacteria: the central stress model, *Microbiology* **13** (1995), 3171–3180.

[22] T. Komorowski and J. Tyrcha, *Asymptotic properties of some Markov operators*, Bull. Pol. Ac.: Math. **37** (1989), 221–228.

[23] A. Lasota and M.C. Mackey, *Chaos, Fractals and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics*, Springer Applied Mathematical Sciences **97**, New York, 1994.

[24] A. Lasota and J.A. Yorke, Lower bound technique for Markov operators and iterated function systems, *Random Computational Dynamics*, **2**, (1994) 1, 41–77.

[25] T. Lipniacki, P. Paszek, A. Marciniak-Czochra, A.R. Brasier, and M. Kimmel, Transcriptional stochasticity in gene expression, *J. Theor. Biol.* **238** (2006), 348–367.

KPW

[26] J. Łuczka and R. Rudnicki, *Randomly flashing diffusion: asymptotic properties*, J. Statist. Phys. **83** (1996), 1149–1164.

[27] M.C. Mackey and R. Rudnicki, Global stability in a delayed partial differential equation describing cellular replication, *J. Math. Biol.* **33** (1994), 89–109.

[28] J. Malczak, *An application of Markov operators in differential and integral equations*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **87** (1992), 281–297.

[29] A. G. McKendrick, Application of mathematics to medical problems, *Proc. Edinb. Math. Soc.* 14, 98–130, (1926).

[30] J.A.J. Metz and O. Diekmann (eds.), *The Dynamics of Physiologically Structured Populations*, Springer Lecture Notes in Biomathematics **68**, New York, 1986.

[31] E. Nummelin, *General Irreducible Markov Chains and Non-negative Operators*, Cambridge Tracts in Mathematics **83**, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[32] R. Rudnicki, On asymptotic stability and sweeping for Markov operators, *Bull. Pol. Ac.: Math.* **43** (1995), 245–262.

[33] ______, *Asymptotic behaviour of an integro-parabolic equation* Bull. Pol. Ac.: Math. **40** (1992), 111–128.

[34] ______, *Asymptotic properties of the Fokker-Planck equation*, in Chaos – The interplay between stochastics and deterministic behaviour, Karpacz'95 Proc., P. Garbaczewski, M. Wolf, A. Weron (eds.), pp. 517–521, Lecture Notes in Physics **457**, Springer, Berlin, 1995.

[35] R. Rudnicki, J. Tiuryn, and D. Wójtowicz, A model for the evolution of paralog families in genomes, *J. Math. Biology* **53** (2006), 759–770.

[36] J. Traple, Markov semigroups generated by Poisson driven differential equations, *Bull. Pol. Ac.: Math.* **44** (1996), 161–182.

[37] F. R. Sharpe and A. J. Lotka, A problem in age-distributions, *Phil. Mag.* **21**, 435–438, (1911).

[38] G. W. Webb, Structured population dynamics, in: R. Rudnicki (eds.), *Mathematical Modelling of Population Dynamics*, Banach Center Publication **63**, pp. 123–163, Warszawa (2004).

Katarzyna Pichór

KPi