Recenzja

dorobku naukowego i działalności doktor Katarzyny Kuhlmann

w związku z postępowaniem o nadanie jej stopnia doktora habilitowanego

Podstawą do ubiegania się przez dr Katarzynę Kuhlmann o nadanie jej stopnia doktora habilitowanego jest osiągnięcie naukowe pt. „Przestrzenie $\mathbb{R}$-punktów". Jest to cykl 7 publikacji, których autorką (jedyną w 2 przypadkach) lub współautorką jest dr Kuhlmann. Prace te są opublikowane w dobrych i bardzo dobrych czasopismach, m.in.: *Mathematische Zeitschrift, Journal of Algebra.*

Tematyka badań należy do geometrii rzeczywistej, teorii waluacji i topologii. Podstawowym pojęciem jest przestrzeń $\mathbb{R}$-punktów. Z definicji $\mathbb{R}$-punkt ciała formalnie rzeczywistego K jest wyznaczony przez porządek P ciała K w następujący sposób: porządek P wyznacza waluację v ciała K, w której pierścień waluacyjny jest otoczką wypukłą (względem P) ciała liczb wymiernych w K. Waluację tę rozszerzamy do odwzorowania z K do $Kv \cup \{\infty\}$, gdzie Kv oznacza ciało reszt, poprzez przyporządkowanie elementom spoza pierścienia waluacyjnego wartości ∞. Odwzorowanie to nazywa się punktem wyznaczonym przez waluację v. W tej sytuacji Kv ma jedyne rosnące zanurzenie w ciało $\mathbb{R}$; złożenie punktu z tym zanurzeniem nazywa się $\mathbb{R}$-punktem.

Zbiór $X(K)$ wszystkich porządków ciała K wyposażony w tzw. topologię Harrisona jest przestrzenią boolowską, zbiór $M(K)$ wszystkich $\mathbb{R}$-punktów ciała K (który jest obrazem $X(K)$), traktujemy jako przestrzeń topologiczną z topologią ilorazową. $M(K)$ jest zawsze zwartą przestrzenią Hausdorffa.

T. Craven udowodnił w 1975 r., że każda przestrzeń boolowska jest realizowalna jako $X(K)$. Wiadomo też, że każda przestrzeń skończona jest realizowalna jako $M(K)$, można też zrealizować rozłączną sumę skończenie wielu okręgów. Pojawia się dość naturalne pytanie o realizowalność innych przestrzeni topologicznych.

Główne wyniki rozprawy dotyczą tego problemu oraz opisu i własności $M(K)$ dla różnych dobranych ciał K. Poniżej omawiam skrótowo treść prac.

W pracy [1] (numeracja według spisu w Autoreferacie) udowodniono, że każda przestrzeń boolowska jest realizowalna (odtąd przez realizowalność rozumiem realizowalność jako $M(K)$ dla odpowiednio dobranego ciała K). Najpierw podaje się konstrukcję odpowiedniego ciała dla kostki Cantora, a następnie w nietrywialny sposób uogólnia się wynik o realizowalności na dowolne domknięte podzbiory kostki Cantora.

šk.

W pracy [2] (wspólnej z I. Efratem) udowodniono, że klasa przestrzeni realizowalnych jest domknięta na skończone sumy rozłączne, domknięte podprzestrzenie i produkty z przestrzeniami boolowskimi.

Praca [3] (wspólna z F. -V. Kuhlmannem i M. Machurą) poświęcona jest głównie metryzowalności $M(K)$ dla K postaci $R(x)$, gdzie R jest ciałem rzeczywiście domkniętym. Udowodniono m.in., że $M(R(x))$ jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy R zawiera przeliczalne podciało gęste. Podobnej tematyki dotyczy artykuł [4] (wspólny z M. Machurą i M. Marshallem). Wykazano w szczególności, że przestrzenie $\mathbb{R}$-punktów ciał $R(x,y)$ i $R((x,y))$ nie są metryzowalne w przypadku, gdy R jest nieprzeliczalanym ciałem rzeczywiście domkniętym.

Badania opisane w [5] (artykule wspólnym z F. -V. Kuhlmannem) są efektem prób realizacji najprostszych przykładów dwuwymiarowych rozmaitości topologicznych, choćby torusa. Okrąg jest przestrzenią $\mathbb{R}$-punktów dla ciała $\mathbb{R}(x)$, naturalne jest więc rozważanie $\mathbb{R}(x,y)$ dla torusa. Na drodze do uzyskania pozytywnego wyniku napotkano na niespodziewane trudności opisane drobiazgowo w [5]. Okazuje się m.in., że żadne zanurzenie produktu $M(R(x))$ x $M(R(y))$ w $M(R(x,y))$ spełniające pewien naturalny warunek (zgodne z obcięciem) nie może być ciągłe.

Praca [6] poświęcona jest strukturze $M(R(x))$ dla ciał rzeczywiście domkniętych R. Podany jest opis pewnej podbazy topologii tej przestrzeni a także metryka (w przypadku metryzowalnym). Udowodniono, że wymiary: pokryciowy, duży indukcyjny oraz mały indukcyjny są równe 1. Podano ciekawy opis „fraktalnych" właściwości $M(R(x))$ w przypadku niearchimedesowego R. Udowodniono, że przestrzeń ta jest samo-homeomorficzna (dowolny niepusty podzbiór otwarty zawiera homeomorficzną kopię całej przestrzeni) w przypadku pewnego szczególnego ciała R.

W pracy [7] (wspólnej z P. Koprowskim) bada się przestrzeń porządków dla ciała F będącego rozszerzeniem stopnia przestępnego 1 pewnego ciała rzeczywiście domkniętego R. O ile w przypadku ciała $R(x)$ porządki odpowiadają przekrojom Dedekinda ciała R, to rozważanym teraz przypadku trzeba wprowadzić pojęcie przekroju składowej semialgebraicznej pewnej krzywej. Rozważa się m.in. pytanie kiedy dwa przekroje krzywej wyznaczają ten sam punkt.

Tematyka rozprawy nie należy może do głównego nurtu badań algebraicznych, stąd też prace dr Kuhlmann spotkały się z raczej umiarkowanym zainteresowaniem, jeśli sądzić po liczbie cytowań (21 cytowań przez 10 autorów wg. MathSciNet). Niemniej rozważane problemy są interesujące i naturalne w kontekście wcześniejszych badań. Cykl omówionych siedmiu prac jest spójnym osiągnięciem badawczym, które stanowi istotny wkład w rozwój algebry i geometrii rzeczywistej.

Za najciekawsze uważam wyniki o realizowalności zawarte w pracach [1], [2] [5] i [6]. Nie można także odmówić wartości naukowej pozostałym artykułom wchodzącym w skład rozprawy.

SK

Spośród prac wchodzących w skład rozprawy dwie są samodzielne, pozostałe współautorskie. Wysoko cenię współpracę naukową, której efektem są wspólne ciekawe publikacje. W przypadku gdy prace takie stanowią podstawę wniosku o nadanie stopnia naukowego należy ocenić wkład habilitantki w ich powstanie. Wyodrębnienie udziału poszczególnych autorów jest przeważnie bardzo trudne, na szczęście w tym przypadku współautorzy złożyli oświadczenia, które nie są jedynie zdawkowymi ocenami procentowymi, a raczej małymi raportami ze współpracy. Wynika z nich, że wkład dr Kuhlmann w powstanie wszystkich prac jest istotny i nie ogranicza się do spraw „technicznych", jest to wkład koncepcyjny. Prof. I. Efrat i prof. Koprowski uznali rolę habilitantki za wiodącą w przypadku prac wspólnych z nimi. Oświadczenia te pozostają w zgodzie z własnym oświadczeniem habilitantki.

Zatem stwierdzam, że wkład dr Kuhlmann w powstanie omówionych powyżej prac jest wystarczający by uznać je za dobrą podstawę do nadania stopnia doktora habilitowanego.

W dorobku niewchodzącym do rozprawy, poza pracami przedstawiającymi wyniki rozprawy doktorskiej, znajdują się m.in.:

- grupa prac [11], [12] i [13] związanych z rozprawą habilitacyjną, a więc dotyczących przestrzeni $\mathbb{R}$-punktów. Warto zwrócić uwagę na fakt, że z punktu widzenia merytorycznego praca [13] mogłaby z powodzeniem wejść w skład rozprawy, nie została przez habilitantkę do niej włączona ze względu na – jak sama autorka stwierdza – zbyt mały jej wkład własny.
- prace, w których występuje pojęcie przestrzeni z kulami. Jest to koncepcja wywodząca się z teorii przestrzeni z ultrametryką (ultrametryki używane są intensywnie np. w pracy [3]). W pracy [14] dowodzone są twierdzenia o punkach stałych dla odwzorowań przestrzeni z kulami.
- w pracy [16] pojęcia charakterystyczne dla przestrzeni z kulami (sferyczna zupełność) zastosowane do podania kryteriów dla symetrycznej zupełności uporządkowanych grup abelowych i ciał.

Habilitantka szkicuje w autoreferacie perspektywy dalszych badań związanych z przestrzeniami z kulami. Uwzględniając jej dotychczasowe osiągnięcia oraz umiejętność współpracy z innymi matematykami spodziewam się, że zostaną uzyskane interesujące wyniki. Na marginesie dodam, że ciekawe byłoby kontynuowanie prac nad realizowalnością przestrzeni topologicznych jako przestrzeni $M(K)$, jednak rezultaty pracy [5] pokazują istnienie naturalnych barier, na które natrafiamy realizując taki program.

Autoreferat jest bardzo dobrze napisany, jest jasny, zwięzły i ciekawy. Znajdują się w nim – co nie jest powszechnie spotykane - także szkice niektórych dowodów.

Habilitantka regularnie prezentuje swoje wyniki na konferencjach naukowych krajowych i zagranicznych. Odbywała też zagraniczne staże naukowe (University of Saskatchewan, Ben Gurion Unieversity). Umie współpracować z innymi matematykami o czym świadczą liczne wspólne prace, a także informacje zawarte w oświadczeniach współautorów.

S.K

Podsumowując stwierdzam, że osiągnięcie naukowe dr Katarzyny Kuhlmann pt. „Przestrzenie $\mathbb{R}$-punktów" oraz pozostały dorobek spełniają ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane w przewodach habilitacyjnych. Przedstawione dokumenty przekonują mnie, że habilitantka ma kompetencje do prowadzenia samodzielnej pracy naukowej.

Popieram wniosek o nadanie dr Katarzynie Kuhlmann stopnia doktora habilitowanego.

S. Kasjan

Toruń, dnia 22 sierpnia 2017 r. Stanisław Kasjan