Autoreferat

1. Imię i nazwisko: Barbara Przebieracz
2. Posiadane dyplomy:
   (a) dyplom magistra matematyki, uzyskany 12. 06. 2003 na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Śląskiego,
   tytuł pracy magisterskiej: *Wymiar Hausdorffa iloczynu kartezjańskiego zbiorów*,
   promotor: *prof. dr hab. Andrzej Lasota.*
   (b) dyplom doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki, uzyskany 3. 07. 2007 na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Śląskiego,
   tytuł rozprawy doktorskiej: *Funkcje bliskie iterowalnym*,
   promotor: *dr hab. Witold Jarczyk.*
3. Zatrudnienie w jednostkach naukowych:
   adiunkt w Zakładzie Analizy Rzeczywistej Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego od 1.09 2007 roku.
4. Omówienie osiągnięcia naukowego zatytułowanego

"Wokół problemu Ulama"

Wykaz prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego:

[A] Barbara Przebieracz, *On the stability of the translation equation and dynamical systems*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods 75, No. 4, (2012), 1980–1988.

[B] Barbara Przebieracz, *The Hyers theorem via the Markov-Kakutani fixed point theorem*, J. Fixed Point Theory Appl. 12, (2012), 35–39 .

[C] Barbara Przebieracz *A characterization of the approximate solutions of the translation equation*, J. Difference Equ. Appl. 21 (2015), no. 11, 1058–1067.

[D] Barbara Przebieracz, *An application of the common fixed point theorems to the theory of stability of functional equations,* Fixed Point Theory 16 (2015), no. 1, 185–190.

[E] Barbara Przebieracz, *Remarks on Farah's Theorems*, Results in Math., 72(4) (2017), 1959–1966.

[F] Roman Badora & Barbara Przebieracz, *On approximate group homomorphisms*, J. Math. Anal. Appl. 462(1) (2018), 505–520.

[G] Roman Badora, Tomasz Kochanek & Barbara Przebieracz, *Approximate homomorphisms on lattices*, Archiv der Mathematik, DOI: 10.1007/s00013-018-1182-0

Spis treści

1. Opis dziedziny i motywacja

1.1 Wprowadzenie

W 1940 roku S. M. Ulam wygłosił referat w The Mathematics Club of the University of Wisconsin, w którym przedstawił listę nierozwiązanych problemów. Jeden z nich uznaje się za punkt wyjścia nowej linii badań, problemu stabilności równań funkcyjnych[1]. Można go sformułować następująco. Załóżmy, że G jest grupą, a (H, d) grupą metryczną. Czy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka $\delta > 0$, że jeśli funkcja $f : G \to H$ spełnia

$$d(f(xy), f(x)f(y)) \leq \delta, \quad \text{dla wszelkich } x, y \in G,$$

to istnieje taki homomorfizm $a : G \to H$, że

$$d(f(x), a(x)) \leq \varepsilon, \quad \text{dla wszelkich } x \in G?$$

Dwadzieścia lat po swoim wykładzie S. M. Ulam opublikował książkę "Problems in Modern Mathematics" [117], w której powraca do problemu stabilności. W szóstym rozdziale "Some Questions in Analysis" pierwszy paragraf nosi tytuł "Stability". W tej części autor pyta, kiedy dla równań funkcyjnych to prawda, że rozwiązanie równania różniącego się nieznacznie od danego musi z konieczności być blisko rozwiązania danego równania funkcyjnego. Pyta również czy jeśli zastąpimy daną równość funkcyjną przez nierówność, to kiedy można stwierdzić, że rozwiązania nierówności leżą w pobliżu rozwiązań równania. Jeszcze ogólniej i może najładniej problem stabilności postawił (badając stabilność izometrii) w 1978 P. M. Gruber [41] przeformułowując problem Ulama do następującego pytania: Załóżmy że obiekt matematyczny spełnia pewną własność z pewną dokładnością. Czy jest możliwe aby przybliżać ten obiekt obiektami mającymi daną własność?

W tym miejscu nie jest możliwe przedstawienie pełnego obrazu teorii stabilności równań funkcyjnych. Chciałabym jednak wyszczególnić główne kierunki badań jakie wyniknęły z pytania S. Ulama, podkreślić związki tej teorii z innymi działami matematyki oraz wspomnieć, jakie są najpopularniejsze narzędzia stosowane w badaniu takich zagadnień.

1.2 Twierdzenie Hyersa i dyskusja o dziedzinie

W niecały rok po referacie S. Ulama, D. H. Hyers uzyskał pierwszy, ważny wynik związany z tym problemem. W pracy [42] znajdujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.1 (D. H. Hyers)**.** *Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha oraz niech funkcja $f : X \to Y$ spełnia warunek*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon, \quad x, y \in X, \tag{1.1}$$

[1]Zaznaczmy tutaj, że wcześniej podobnym problemem zajęli się G. Pólya i G. Szegö w 1924 roku (zobacz [94]) w pewnym szczególnym przypadku.

dla pewnego $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje (dokładnie jedna) funkcja addytywna $a : X \to Y$ spełniająca nierówność

$$\|f(x) - a(x)\| \leq \varepsilon, \quad x \in X.$$

Zatem, w przypadku, gdy G i H są przestrzeniami Banacha odpowiedź na pytanie Ulama jest pozytywna (z $\delta = \varepsilon$); mówimy wtedy, że równanie Cauchy'ego $f(x+y) = f(x) + f(y)$ jest stabilne. Ponadto, patrząc na dowód Hyersa od razu możemy zauważyć, że X możemy zastąpić dowolną półgrupą przemienną. W dyskusji przy jakich założeniach można otrzymać podobną aproksymację jak w twierdzeniu Hyersa odnotujmy od razu, że w pracy [26] G. L. Forti pokazał, że równanie Cauchy'ego nie jest stabilne na grupie wolnej generowanej przez dwa elementy. L. Székelyhidi [106] (zobacz również [105]) pokazał, że stabilność może mieć miejsce również w przypadku nieprzemiennym – wystarczy zakładać, że dziedzina jest półgrupą dopuszczającą średnią niezmienniczą (amenable). Jednak to założenie okazało się za silne, co udowodnił J. Lawrence [27]. Dalsze badania w tym kierunku prowadził m.in. L. Giudici, którego nieopublikowane wyniki znajdziemy w przeglądowej pracy G. L. Forti'ego [28].

1.3 Dyskusja o przestrzeni wartości

Podobnie dyskutowano założenia dotyczące przestrzeni wartości rozważanych odwzorowań. G. L. Forti i J. Schwaiger [29] udowodnili następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.2 (G. L. Forti, J. Schwaiger)**.** *Niech G będzie grupą przemienną zawierającą element nieskończonego rzędu i niech Y będzie przestrzenią unormowaną. Wówczas, jeżeli dla każdego odwzorowania $f : G \to Y$ spełniającego*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon, \;\; x, y \in G,$$

znajdziemy taki homomorfizm $a : G \to Y$, że

$$\|f(x) - a(x)\| \leq \varepsilon, \;\; x \in G,$$

to Y jest przestrzenią Banacha.

Inny kierunek badań wskazał L. Székelyhidi w [107], którego zwieńczeniem jest twierdzenie udowodnione przez Z. Gajdę [31].

Twierdzenie 1.3 (Z. Gajda)**.** *Załóżmy, że twierdzenie Hyersa zachodzi dla zespolonych funkcji określonych na półgrupie S i niech Y będzie ciągowo zupełną przestrzenią liniowo-topologiczną (Hausdorffa). Wtedy, jeżeli $f : S \to Y$ i odwzorowanie*

$$S \times S \ni (x, y) \longrightarrow f(x+y) - f(x) - f(y)$$

jest ograniczone, to istnieje taka funkcja addytywna $a : S \to Y$, że różnica $f - a$ jest ograniczona.

1.4 Techniki dowodowe

W teorii stabilności równań funkcyjnych wypracowano kilka technik pozwalających badać stabilność niektórych typów klasycznych równań funkcyjnych. Najbardziej znaną i często stosowaną jest technika oparta na tzw. ciągach Hyersa, a więc odwołująca się do oryginalnego dowodu Hyersa [42].

Drugą z ważnych technik wypracował J. A. Baker w pracy [6]. Baker oparł dowód poniższego twierdzenia o stabilności nieliniowego równania funkcyjnego na klasycznym twierdzeniu Banacha o punkcie stałym.

Twierdzenie 1.4 (J. A. Baker)**.** *Niech T będzie zbiorem niepustym, (Y, ρ) zupełną przestrzenią metryczną $\phi : T \to T$, $F : T \times Y \to Y$, $0 \leq \lambda < 1$ i niech*

$$\rho(F(T, u), F(t, v)) \leq \lambda\rho(u, v), \;\; t \in T, \; u, v \in Y.$$

Wówczas, jeżeli funkcja $f : T \to Y$ spełnia warunek

$$\rho(f(t), F(t, f(\phi(t)))) < \varepsilon, \;\; t \in T,$$

z pewnym $\varepsilon \geq 0$, to istnieje dokładnie jedna taka funkcja $f_0 : T \to Y$, że

$$f_0(t) = F(t, f_0(\phi(t))), \;\; t \in T$$

oraz

$$\rho(f(t), f_0(t)) < \varepsilon/(1 - \lambda), \;\; t \in T.$$

Później metoda punktu stałego była doskonalona i z powodzeniem wykorzystywana w teorii stabilności (zobacz na przykład [18]).

Inną metodę dowodową, opartą na technice średnich niezmienniczych, zaproponował L. Székelyhidi w [106], [105]. Dokładniej, L. Székelyhidi udowodnił twierdzenie Hyersa dla skalarnych odwzorowań określonych na grupie dopuszczającej średnią niezmienniczą.

Wydaje się jednak, że różnorodność rozważanych zagadnień nie pozwala na wypracowanie uniwersalnych technik przy badaniu problemów typu Ulama.

1.5 Różne “typy stabilności”

Rozważanie problemu Ulama dla równania funkcyjnego funkcji wykładniczej:

$$f(x + y) = f(x)f(y),$$

zaowocowało następującym twierdzeniem:

Twierdzenie 1.5 (J. A. Baker [5]). *Jeżeli S jest półgrupą i funkcja $f : S \to \mathbb{C}$ spełnia*

$$|f(x+y) - f(x)f(y)| \leq \varepsilon, \;\; x, y \in S$$

z pewnym $\varepsilon \geq 0$, to albo funkcja f jest ograniczona (przez $(1 + \sqrt{1+4\varepsilon})/2$) albo spełnia równanie funkcji wykładniczej.

W takim przypadku mówimy, że równanie funkcyjne jest superstabilne. R. Ger w [34], [35] pokazał, że takie nietypowe zachowanie jest konsekwencją mieszania operacji mnożenia i dodawania w $\mathbb{C}$. [2]

Superstabilność jest jednym z wielu możliwych "typów" stabilności w sensie Ulama. Inne to na przykład b-stabilność, jednostajna b-stabilność, odwrotna stabilność, hyperstabilność. Związki między różnymi takimi typami stabilności równań funkcyjnych omawia Z. Moszner w m.in. [83], [90].

1.6 Problem Ulama z niestałą funkcją kontrolną

Wspomnę również o problemie Ulama z niestałą funkcją kontrolną[3]. Takie badania rozpoczęły się na przełomie lat 40. i 50. ubiegłego wieku (zobacz T. Aoki [3]). Przytoczę w tym miejscu twierdzenie pochodzące z monografii N. J. Kaltona, N. T. Pecka i J. W. Robertsa [61].

Twierdzenie 1.7 (N. J. Kalton, N. T. Peck, J. W. Roberts). *Przestrzeń Banacha X jest K-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej jednorodnej funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ spełniającej*

$$| \; f(x+y) - f(x) - f(y) \; | \leq \varepsilon(\|x\| + \|y\|), \;\; x, y \in X$$

[2]Następujące twierdzenie możemy uznać za wykładniczy odpowiednik twierdzenia Hyersa.

Twierdzenie 1.6 (D. Kazhdan, [64]). *Niech G będzie grupą topologiczną dopuszczającą średnią niezmienniczą i niech $\mathcal{U}$ będzie grupą operatorów unitarnych na przestrzeni Hilberta H. Wówczas, jeżeli funkcja $f : G \to \mathcal{U}$ spełnia*

$$\|f(x+y) - f(x)f(y)\| \leq \varepsilon, \;\; x, y \in G$$

i $\varepsilon < \frac{1}{100}$, to istnieje taka reprezentacja $\tau : G \to \mathcal{U}$ grupy G, że

$$\|\tau(x) - f(x)\| \leq \varepsilon, \;\; x \in G.$$

W pełnej ogólności problem Ulama stabilności równania funkcji wykładniczej (dla odwzorowań o wartościach wektorowych) do dzisiaj nie został rozwiązany. Pewne wyniki znaleźć można w pracy R. Gera, P. Šemrla [37] oraz monografii D. H. Hyersa, G. Isaca i Th. M. Rassiasa [43], a dalsze informacje o prawie reprezentacjach grup zawarte zostały w przeglądowej pracy A. I. Shterna [100] oraz w publikacji M. Burger, N. Ozawa, A. Thom [10].

[3]tzn. zastępujemy ε występujące po prawej stronie nierówności (1.1) przez funkcję zależną od x i y.

z pewną stałą ε, istnieje taki funkcjonał liniowy (niekoniecznie ciągły) L na X, że

$$| f(x) - L(x) | \leq K\|x\|,$$

dla pewnej stałej K i wszelkich $x \in X$.

Wspomniane powyżej twierdzenie z jednej strony okazało się inspiracją dla innych autorów badających problem Ulama, a z drugiej strony ta własność stabilnościowa okazała się bardzo użyteczna dla matematyków zajmujących się teorią K-przestrzeni. Inne wyniki stabilnościowe z niestałą funkcją kontrolną odnajdziemy w wyżej wspomnianej monografii [43], a dalsze związki K-przestrzeni z teorią stabilności m. in. w pracy F. Cabello Sáncheza [11]. Warto również wspomnieć w tym miejscu pracę F. Cabello Sáncheza i J. M. F. Castillo [12], w której badane są związki problemu Ulama z sumami skrętnymi (twisted sums) przestrzeni Banacha. Multiplikatywne odpowiedniki przytoczonego powyżej twierdzenia znajdziemy w książce K. Jarosza [53] oraz w pracach B. E. Johnsona [54], [55].

1.7 Problem Ulama dla nierówności

Z jeszcze inną sytuacją spotykamy się rozważając problem Ulama dla nierówności. Już w latach 50. ubiegłego wieku klasyczny problem Ulama dla wypukłości rozważali D. H. Hyers i S. M. Ulam [44].

Twierdzenie 1.8 (D. H. Hyers, S. M. Ulam)**.** *Jeżeli f jest rzeczywistą funkcją określoną na wypukłym podzbiorze D przestrzeni $\mathbb{R}^n$ spełniającą z pewnym $\varepsilon \geq 0$ nierówność*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon,$$

dla wszelkich $x, y \in D$ oraz $t \in [0,1]$, to istnieje taka funkcja wypukła $g : D \to \mathbb{R}$, że

$$|f(x) - g(x)| \leq k_n\varepsilon, \quad x \in D,$$

gdzie $k_n = (n^2 + 3n)/(4n + 4)$.

W twierdzeniu tym otrzymano zależność stałych stabilnościowych od wymiaru przestrzeni, a Z. Kominek i J. Mrowiec w [70] wykazali brak stabilności w przypadku przestrzeni nieskończenie wymiarowych. Do problemu stabilności odwzorowań wypukłych wrócił w 1984 roku P. W. Cholewa w interesującej pracy [17] (poprawiając stałe k_n), a pod koniec wieku M. Laczkovich w [72]. W 2011 roku ukazała się praca M. Laczkovicha i R. Paulina [73], w której połączono stałe stabilnościowe problemu Ulama z drugimi stałymi Whitneya dla funkcji ograniczonych.

1.8 Podsumowanie

Powyżej przedstawiłam jedynie krótkie i wybiórcze wprowadzenie w teorię stabilności równań funkcyjnych. Więcej ciekawych wyników znaleźć można w monografii D. H. Hyersa,

G. Isaca i Th. M. Rassiasa "Stability of Functional Equations in Several Variables" [43] oraz w pracach przeglądowych G. L. Forti'ego [28], R. Gera [36] i L. Székelyhidi'ego [109].

Pomimo upływu wielu lat problematyka stabilności równań funkcyjnych jest wciąż żywa i wzbudza zainteresowanie wielu matematyków.

1.9 Wyniki habilitantki na tle dziedziny

Moje osiągnięcie naukowe wpisuje się w nurt badań związanych z problemem Ulama – problemem stabilności równań funkcyjnych. Dokonując doboru publikacji do osiągnięcia naukowego starałam się przedstawić różne problemy wynikające z pytania S. Ulama, a także wskazać na różnorodność metod, jakie stosowałam, aby uzyskać opisane niżej wyniki. Stąd świadomy wybór pozornie odległych od siebie prac, ale połączonych wspólnym mianownikiem, jakim jest pytanie S. Ulama z 1940 roku.

Prace [A] i [C] odnoszą się do problemu stabilności jednego z ważniejszych równań funkcyjnych – równania translacji. Problem ten stawiany wiele lat temu, do dzisiaj nie jest w pełni rozwiązany. Moje wyniki z pracy [A] dają odpowiedź pozytywną w klasie funkcji ciągłych określonych na $\mathbb{R} \times I$, gdzie I jest dowolnym przedziałem rzeczywistym. Praca [C] jest w pewnym sensie uszczegółowieniem i uzupełnieniem pracy [A]. Ponadto porusza też zagadnienie "odwrotnej stabilności" – pytamy czy z faktu znajdowania się w pobliżu dokładnego rozwiązania wynika bycie przybliżonym rozwiązaniem. W przypadku równania translacji (w omawianej sytuacji) odpowiedź jest negatywna, ale w pracy [C] podane są warunki, pod którymi tak będzie.

W pracach [B], [E], [F] i [G] pozostałam wierna oryginalnemu problemowi Ulama, a więc problemowi stabilności równania Cauchy'ego. Mimo to prezentowane w tych pracach metody dowodowe są raczej odmienne od tych dotąd stosowanych.

W pracy [B] wypracowana została nowa technika dowodu twierdzenia Hyersa oparta na twierdzeniu Markowa-Kakutaniego. Wyniki zawarte w pracy [D] pokazują, że technikę tę można z powodzeniem stosować również przy badaniu stabilności innych równań funkcyjnych, wykorzystując także inne twierdzenia o wspólnych punktach stałych.

W publikacjach [E], [F] problem Ulama dla równania Cauchy'ego łączony jest z problemem Erdősa [22] oraz podejściem I. Faraha z pracy [24]. Dowodzimy, że gdy zbiór takich punktów (x, y), dla których wartość $f(x+y)$ oraz suma $f(x)+f(y)$ są od siebie odległe o przynajmniej ε jest zbiorem małej miary (ale być może dodatniej), to istnieje taki homomorfizm F, że zbiór punktów x, dla których odległości pomiędzy $f(x)$ a $F(x)$ nie są dostatecznie blisko siebie, jest małej miary.

W pracy [G] wkraczamy na nowe obszary badań związane z problemem Ulama. Mianowicie formułujemy i badamy problem Ulama dla homomorfizmów krat. Na dwa sposoby definiujemy, co to znaczy być "przybliżonym homomorfizmem" krat i, w tych dwóch przypadkach, dowodzimy stabilności równania Cauchy'ego (odpowiednio rozumianej).

2. Stabilność równania translacji

2.1 Wprowadzenie

Równaniem translacji nazywamy równanie funkcyjne postaci

$$F(s+t,x) = F(t, F(s,x)), \quad s,t \in T,\ x \in X, \tag{2.1}$$

gdzie funkcja F określona jest na iloczynie kartezjańskim $T \times X$ i przyjmuje wartości w zbiorze X a T jest zbiorem z binarną operacją $+$. Jeżeli T interpretujemy jako zbiór "czasów", to $F(t,x)$ w tej interpretacji oznacza miejsce, w którym znajdzie się punkt x w czasie t. Wygodny wydaje się też zapis $f^t := F(t,\cdot)$, przy którym równanie translacji przyjmuje postać

$$f^t \circ f^s = f^{s+t}, \quad s,t \in T. \tag{2.2}$$

Jest to jedno z ważniejszych równań funkcyjnych, gdyż w naturalny sposób pojawia się w wielu zagadnieniach matematycznych[4]. Łączy równania funkcyjne z teorią iteracji. Rozwiązania równania translacji z $T = \mathbb{R}$, bądź $T = (0,\infty)$ (wygodnie patrzeć wtedy na postać (2.2)) to funkcje $f\colon X \to X$, dla których dyskretny proces $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma ciągłe rozszerzenie na czas rzeczywisty, bądź rzeczywisty dodatni. Rodzinę ciągłych odwzorowań $\{f^t;\ t \in \mathbb{R}\}$ spełniającą (2.2) nazywamy też grupą iteracji, a $\{f^t;\ t \in (0,\infty)\}$ półgrupą iteracji. Gdy dodatkowo spełniony jest warunek $f^0 = \mathrm{id}$, to rodzinę $\{f^t;\ t \in \mathbb{R}\}$ nazywamy układem dynamicznym[5].

Ciekawymi zagadnieniami, które były badane w związku z równaniem translacji są między innymi: postać rozwiązań w różnych strukturach i pod różnymi dodatkowymi założeniami (ciągłość, różniczkowalność, monotoniczność), regularność rozwiązań (kiedy mierzalność grup czy półgrup iteracji implikuje ich ciągłość), zanurzalność (i prawie zanurzalność[6]) w ciągłe półgrupy iteracji.

2.2 Stabilność równania translacji w pewnej klasie funkcji

Opublikowano stosunkowo niewiele artykułów dotyczących stabilności równania translacji.

---

[4] Dość bogatą listę takich zagadnień wyszczególnił Z. Moszner w przeglądowych pracach [82] i [84].

[5] O stabilności układów dynamicznych więcej piszę w rozdziale ósmym autoreferatu.

[6] zob. rozdział 10. autoreferatu.

Rozpocznę od omówienia przypadku, gdy rozważamy funkcje ciągłe określone na $\mathbb{R} \times I$, gdzie I jest przedziałem rzeczywistym, gdyż moje wyniki o stabilności równania translacji dotyczą właśnie tej klasy funkcji.

Przypadek ten omawiany jest w pracach [14], [A] oraz [C].

Dokładniej, J. Chudziak przy następujących założeniach:

$$\text{(H)} \quad \begin{array}{c} I \text{ jest otwartym przedziałem w } \mathbb{R},\ G\colon \mathbb{R} \times I \to I, \\ \text{dla pewnego } x_0 \in I \text{ funkcja } G(\cdot, x_0)\colon \mathbb{R} \to I \text{ jest ciągłą surjekcją,} \\ |G(t, G(s, x_0)) - G(s+t, x_0)| \leq \delta, \text{ dla } s, t \in \mathbb{R} \text{ i dla pewnej liczby } \delta > 0, \end{array}$$

podał w [14] konstrukcję homeomorfizmu $g\colon \mathbb{R} \to I$ spełniającego warunek

$$|G(t,x) - g(g^{-1}(x) + t)| \leq 9\delta, \quad t \in \mathbb{R},\, x \in I,$$

a tym samym wykazał, że dla ciągłej grupy iteracji F danej wzorem

$$F(t,x) = g(g^{-1}(x) + t), \quad x \in I,\, t \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

mamy

$$|G(t,x) - F(t,x)| \leq 9\delta, \quad x \in I,\, t \in \mathbb{R}.$$

W pracy [A] zakładam, że I jest dowolnym przedziałem w $\mathbb{R}$, a funkcja $G\colon \mathbb{R} \times I \to I$ jest ciągła ze względu na każdą ze zmiennych z osobna i spełniona jest nierówność

$$|G(s, G(t,x)) - G(t+s, x)| \leq \delta, \quad s, t \in \mathbb{R},\, x \in I, \tag{2.4}$$

dla pewnej liczby $\delta > 0$. Okazuje się, że z przedziału $V := G(\mathbb{R} \times I)$ można wyodrębnić pewną rodzinę $\mathcal{U}$ podprzedziałów otwartych przedziału I, dla których spełnione są założenia (H) nawet z nawiązką, tzn. wybierając dowolny punkt x z przedziału $U \in \mathcal{U}$, otrzymujemy, że jego trajektoria $\mathbb{R} \ni t \mapsto G(t,x) \in I$ jest surjekcją na U. Tak więc na przedziałach $U \in \mathcal{U}$ można zadać F wzorem (2.3). Dowodzę, że poza $\bigcup \mathcal{U}$ punkty $x \in V$ mają "krótkie" trajektorie, tzn. przedziały $G(\mathbb{R} \times \{x\})$ są długości mniejszej niż 8δ, można więc funkcję $t \mapsto G(t,x)$ przybliżać przez stałą funkcję $t \mapsto G(0,x) =: F(t,x)$. Dla punktów $x \notin V$ o określeniu $F(t,x)$ decyduje wartość $G(0,x)$. Pozostaje jeszcze tak zmodyfikować określaną grupę iteracji F na brzegu przedziału V, aby zadbać o "zlepienie" poszczególnych części. To zaowocowało następującym wzorem:

$$F(t,x) = \begin{cases} g_\lambda(g_\lambda^{-1}(f(x)) + t), & \text{jeśli } f(x) \in U_\lambda,\ t \in \mathbb{R}; \\ f(x), & \text{jesli } f(x) \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda,\ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

gdzie $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ natomiast f określona jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \in [G(0, \inf V), G(0, \sup V)] \cap I, \\ G(0, \inf V), & \text{gdy } x \in [\inf V, G(0, \inf V)] \cap I, \\ G(0, \sup V), & \text{gdy } x \in [G(0, \sup V), \sup V] \cap I, \\ G(0, x), & \text{gdy } x \in I \setminus V \text{ oraz } G(0, x) \in [G(0, \inf V), G(0, \sup V)], \\ G(0, \inf V), & \text{gdy } x \in I \setminus V \text{ oraz } G(0, x) \in [\inf V, G(0, \inf V)], \\ G(0, \sup V), & \text{gdy } x \in I \setminus V \text{ oraz } G(0, x) \in [G(0, \sup V), \sup V]. \end{cases}$$

Tak w skrócie[7] można opisać dowód stabilności równania translacji zamieszczony w pracy [A], czyli dowód poniższego twierdzenia:

Twierdzenie 2.1. *Załóżmy, że $I \subseteq \mathbb{R}$ jest przedziałem, $\delta \in (0, \infty)$, a $G \colon \mathbb{R} \times I \to I$ jest ciągłym ze względu na każdą ze zmiennych rozwiązaniem nierówności* (2.4)*. Wtedy istnieje ciągła grupa iteracji $F \colon \mathbb{R} \times I \to I$, dla której*

$$|G(t, x) - F(t, x)| \leq 10\delta, \quad x \in I,\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Jednakże w samej wypowiedzi Twierdzenia 2.1 zgubione są pewne ważne i ciekawe informacje łączące F i G. Samo oszacowanie (2.5) wydaje się za grube w okolicy punktów stałych, nie pokazuje rozbicia I na osobne niezmiennicze podprzedziały, którymi często zajmowano się osobno, badając grupy iteracji. Aby bardziej uwypuklić zależności otrzymane a ukryte w dowodzie Twierdzenia 2.1 napisana została praca [C]. Z większą dokładnością wypisuję w niej, co wynika z (2.4) (w [C, Theorem 2.2]), oraz odwracam to twierdzenie wypisując warunki, które razem z (2.5) zagwarantują spełnianie (2.4) (w [C, Theorem 3.1]).

Zanim wyniki te tu przytoczę, przypomnę znaną[8] charakteryzację ciągłych rozwiązań równania translacji (w przypadku $I \subseteq \mathbb{R}$ będącego przedziałem, $T = \mathbb{R}$), aby lepiej było widać podobieństwo postaci funkcji spełniających przybliżone równanie translacji do funkcji spełniających równanie translacji.

Twierdzenie 2.2. *Niech $F \colon \mathbb{R} \times I \to I$ będzie ciągłym rozwiązaniem równania translacji, $V = F(\mathbb{R} \times I)$. Wtedy istnieją takie otwarte, rozłączne przedziały $U_\lambda \subset V$, $\lambda \in \Lambda$, i takie homeomorfizmy $h_\lambda \colon \mathbb{R} \to U_\lambda$, że dla każdego $x \in U_\lambda$ mamy*

$$F(t, x) = h_\lambda(h_\lambda^{-1}(x) + t), \quad t \in \mathbb{R}$$

[7]Pełny dowód składa się z szeregu lematów, wniosków zamieszczonych w paragrafie 2. pracy [A] oraz "właściwego dowodu" umieszczonego w paragrafie 3. tejże pracy (strony 1982-1986).

[8]Nie umiem wskazać gdzie, po raz pierwszy, pojawiła się ta charakteryzacja; można ją znaleźć na przykład w książce Z. Mosznera [87], Rozdział IX, 4D/ bądź wywnioskować z wyników z monografii [101].

oraz

$$F(t,x) = x, \quad x \in V \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda,\ t \in \mathbb{R}.$$

Ponadto, istnieje taka ciągła funkcja $f\colon I \to V$, że $f(x) = x$ dla $x \in V$ oraz

$$F(t,x) = F(t, f(x)), \quad t \in \mathbb{R}, x \in I \setminus V.$$

Na odwrót, dla każdej takiej ciągłej funkcji $f\colon I \to I$, że $f \circ f = f$, oraz rodziny otwartych rozłącznych przedziałów $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ takich, że $U_\lambda \subset f(I)$ i rodziny homeomorfizmów $\{h_\lambda\colon \mathbb{R} \to U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, funkcja F dana wzorem

$$F(t,x) = \begin{cases} h_\lambda(h_\lambda^{-1}(f(x)) + t), & \textit{jeśli } f(x) \in U_\lambda,\ t \in \mathbb{R}; \\ f(x), & \textit{jeśli } f(x) \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda,\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\left(\textit{czyli wzorem } F(t,x) = \begin{cases} h_\lambda(h_\lambda^{-1}(x) + t), & \textit{jeśli } x \in U_\lambda,\ t \in \mathbb{R}; \\ x, & \textit{jeśli } x \in f(I) \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda,\ t \in \mathbb{R}; \\ F(t, f(x)), & \textit{jeśli } x \in I \setminus f(I) \end{cases} \right)$$

jest ciągłym rozwiązaniem równania translacji.

Poniżej wypiszę warunki, jakie wynikają z (2.4) ([C, Theorem 2.2]). Oczywiście każda ciągła grupa iteracji F spełnia (2.4) z $\delta = 0$, spełnia więc też poniższe warunki (a)–(m) z $\delta = 0$.

Załóżmy, że $G\colon \mathbb{R} \times I \to I$ jest ciągłym rozwiązaniem nierówności

$$|G(s, G(t,x)) - G(s+t, x)| \le \delta, \quad x \in I,\ s,t \in \mathbb{R}.$$

Wówczas:

(a) istnieją takie rodziny $\mathcal{U} = \{U_\lambda \subset I : \lambda \in \Lambda\}$ otwartych i rozłącznych przedziałów długości większej lub równej 6δ oraz $\{h_\lambda\colon \mathbb{R} \to U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ homeomorfizmów i taka ciągła funkcja $f\colon I \to I$, że $f \circ f = f$, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \subset f(I)$,

$$|G(t,x) - f(x)| \le 10\delta, \qquad t \in \mathbb{R},\ f(x) \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda,$$

$$|G(t,x) - h_\lambda(h_\lambda^{-1}(f(x)) + t)| \le 10\delta, \qquad t \in \mathbb{R},\ f(x) \in U_\lambda,\ \lambda \in \Lambda$$

(w szczególności istnieje takie ciągłe rozwiązanie F (dane wzorem (2.6)) równania translacji, że $|G - F| \le 10\delta$);

(b) $\forall_{(x\in I,\ U\in\mathcal{U})}\ (f(x) \in U \ \Rightarrow\ G(\mathbb{R} \times \{x\}) = U)$

(jeśli $f(x) \in U \in \mathcal{U}$, to trajektoria takiego x jest surjekcją na U);

(c) $\forall_{(x\in I)}\ (x \in \bigcup \mathcal{U} \ \Rightarrow\ f(x) = x)$;

(d) $\forall_{(x\in I, t\in\mathbb{R})}\ (|f(G(t,x)) - G(t,x)| \le 2\delta)$

(tzn. dla y ze zbioru wartości funkcji G, wartość $f(y)$ jest blisko y);

(e) $\forall_{(x\in I)}\ (f(x)\notin\bigcup\mathcal{U}\ \Rightarrow\ (\forall_{t\in\mathbb{R}}\, f(G(t,x))\notin\bigcup\mathcal{U}))\,;$

(f) $\forall_{(x\in I)}\ (f(x)\notin\bigcup\mathcal{U}\ \Rightarrow\ (\forall_{s_1,s_2\in\mathbb{R}}\, |G(s_1,x)-G(s_2,x)|\le 6\delta))$

(trajektorie takich punktów x, że $f(x)\notin\bigcup\mathcal{U}$, są "krótkie");

(g) zbiór wartości funkcji f jest zawarty w zbiorze wartości funkcji G,

(h) każdy przedział $U\in\mathcal{U}$ jest "niezmienniczy", tzn.

$$G(\mathbb{R}\times\{x\})=U,\qquad x\in U\in\mathcal{U},$$

oraz

$$G(\{t\}\times U)=U,\qquad t\in\mathbb{R},\, U\in\mathcal{U};$$

(i) albo h_λ jest rosnącym homeomorfizmem, i wtedy

$$\lim_{t\to\infty}G(t,x)=\sup U_\lambda=:b_\lambda,\quad \lim_{t\to-\infty}G(t,x)=\inf U_\lambda=:a_\lambda,\qquad x\in U_\lambda,$$

oraz dla każdego $t\in\mathbb{R}$ mamy $G(s,x)>G(t,x)-2\delta$ dla $s>t$;

albo h_λ jest malejącym homeomorfizmem, i wtedy

$$\lim_{t\to\infty}G(t,x)=a_\lambda,\quad \lim_{t\to-\infty}G(t,x)=b_\lambda,\qquad x\in U_\lambda,$$

oraz dla każdego $t\in\mathbb{R}$ mamy $G(s,x)<G(t,x)+2\delta$ dla $s>t$

(w tym punkcie zawarty jest opis trajektorii punktów $x\in U_\lambda$: jeśli h_λ jest rosnącym homeomorfizmem, to i $G(\cdot,x)$ jest "prawie rosnąca", jeśli h_λ jest malejącym homeomorfizmem, to i $G(\cdot,x)$ jest "prawie malejąca");

(j) dla każdego takiego $\lambda\in\Lambda$, że $a_\lambda\in I$:

$$G(t,a_\lambda)=a_\lambda,\qquad t\in\mathbb{R};$$

dla każdego takiego $\lambda\in\Lambda$, że $b_\lambda\in I$:

$$G(t,b_\lambda)=b_\lambda,\qquad t\in\mathbb{R}$$

(końce przedziałów U_λ mają stałe trajektorie);

(k) dla każdego $x\in I$ spełniającego $x\notin\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$, dla którego istnieją takie $n,m\in\Lambda$, że $b_n\le x\le a_m$, mamy

$$|G(t,x)-x|\le 6\delta,\qquad t\in\mathbb{R}$$

(dla x znajdujących się pomiędzy dwoma przedziałami z rodziny $\mathcal{U}$, wartości $G(t,x)$ są blisko x);

(l)

$$|G(t,x) - G(t,f(x))| \le 10\delta, \qquad t \in \mathbb{R},\ x \in I;$$

ponadto

(m) dla każdego $\lambda \in \Lambda$ zachodzi jedna z dwóch możliwości:

- albo istnieje taka $\eta_\lambda > 0$, że

$$|t_1 - t_2| \le \eta_\lambda \ \Rightarrow |h_\lambda(t_1) - h_\lambda(t_2)| \le 21\delta, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

  i wtedy dla $\eta^*_\lambda := \sup\{\eta_\lambda > 0 :\ (2.7)\} \in (0, \infty]$ mamy

$$h_\lambda(t - \eta^*_\lambda + h_\lambda^{-1}(f(x))) \le G(t,x) \le h_\lambda(t + \eta^*_\lambda + h_\lambda^{-1}(f(x))), \quad t \in \mathbb{R},\ f(x) \in U_\lambda,$$

  gdy h_λ jest rosnącym homeomorfizmem (przez $h_\lambda(\pm\infty)$ rozumiem $\lim\limits_{t\to\pm\infty} h_\lambda(t)$) oraz

$$h_\lambda(t - \eta^*_\lambda + h_\lambda^{-1}(f(x))) \ge G(t,x) \ge h_\lambda(t + \eta^*_\lambda + h_\lambda^{-1}(f(x))), \quad t \in \mathbb{R},\ f(x) \in U_\lambda,$$

  gdy h_λ jest malejącym homeomorfizmem,

- albo nie istnieje taka η_λ, dla której (2.7) zachodzi i wtedy

$$G(t,x) = h_\lambda(t + h_\lambda^{-1}(f(x)), \quad t \in \mathbb{R},\ f(x) \in U_\lambda$$

To daje lepsze oszacowanie odległości między $G(t,x)$ a $h_\lambda(t + h_\lambda^{-1}(f(x))$ dla takich x, że $f(x) \in U_\lambda$ dla pewnego $\lambda \in \Lambda$, niż jest to zapisane w punkcie (a). Albo ta odległość jest równa zero (czyli w istocie G obcięte do $\mathbb{R} \times U_\lambda$ jest dokładnym rozwiązaniem równania translacji, a nie tylko przybliżonym). Albo tempo wzrostu h_λ jest "kontrolowane" i wtedy wprawdzie równości między $G(t,x)$ a $h_\lambda(t + h_\lambda^{-1}(f(x))$ być nie musi, ale też nierówności podane w punkcie (m) pokazują, jak blisko $G(t,x)$ są wartości $h_\lambda(t+h_\lambda^{-1}(f(x))$ – szczególnie dla t bliskich $\pm\infty$. W szczególności wynika z tych nierówności, że

$$\lim_{t\to\pm\infty} |G(t,x) - h_\lambda(t + h_\lambda^{-1}(f(x))| = 0.$$

Wiadomo[9], że obecność rozwiązania F równania translacji w otoczeniu funkcji G, tj. spełnianie nierówności (2.5), nie gwarantuje spełniania przez G przybliżonego równania translacji, czyli (2.4). Poniższe twierdzenie ([C, Theorem 3.1]) podaje warunki, jakie razem z (2.5) zagwarantują (2.4).

Twierdzenie 2.3. *Niech I będzie niezdegenerowanym przedziałem rzeczywistym, δ, A_1, A_2, B, C, $D > 0$, załóżmy, że $H\colon \mathbb{R} \times I \to I$ jest ciągłą funkcją. Załóżmy, że*

[9]zob. Theorem 4.4 i Theorem 4.5 w pracy [X].

(a') *istnieją otwarte rozłączne przedziały $U_n \subset I$, $n \in N$, gdzie $N \subset \mathbb{N}$ jest pewnym zbiorem wskaźników, homeomorfizmy $h_n\colon \mathbb{R} \to U_n$, $n \in N$, i ciągła funkcja $f\colon I \to I$ takie, że $f \circ f = f$, $U_n \subset f(I)$, $n \in N$,*

$$|H(t,x) - f(x)| \leq A_1\delta, \qquad t \in \mathbb{R},\ f(x) \notin \bigcup_{n\in N} U_n,$$

$$|H(t,x) - h_n(h_n^{-1}(f(x)) + t)| \leq A_2\delta, \qquad t \in \mathbb{R},\ f(x) \in U_n,\ n \in N;$$

(b') $\forall_{(x\in I,\, n\in N)}\ (f(x) \in U_n \ \Rightarrow\ H(\mathbb{R}, x) \subset U_n)$;

(c') $\forall_{(x\in I,\, n\in N)}\ (x \in U_n \ \Rightarrow\ f(x) = x)$;

(d') $\forall_{(x\in I,\, t\in\mathbb{R})}\ (|f(H(t,x)) - H(t,x)| \leq B\delta)$;

(e') $\forall_{x\in I} \left(f(x) \notin \bigcup_{n\in N} U_n \ \Rightarrow\ \left(\forall_{t\in\mathbb{R}}\, f(H(t,x)) \notin \bigcup_{n\in N} U_n\right)\right)$;

(f') $\forall_{x\in I} \left(f(x) \notin \bigcup_{n\in N} U_n \ \Rightarrow\ (\forall_{s_1,s_2\in\mathbb{R}}\, |H(s_1,x) - H(s_2,x)| \leq C\delta)\right)$;

(m') *ponadto, dla każdego $n \in N$ zachodzi jedna z dwóch następujących możliwości:*

- *albo istnieje taka $\eta_n > 0$, że*

$$|t_1 - t_2| \leq \eta_n \ \Rightarrow |h_n(t_1) - h_n(t_2)| \leq D\delta, \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

i dla $\eta_n^* := \sup\{\eta_n > 0 :\ (2.8)\} \in (0,\infty]$ mamy

$$h_n(t - \eta_n^* + h_n^{-1}(f(x))) \leq H(t,x) \leq h_n(t + \eta_n^* + h_n^{-1}(f(x))), \qquad t \in \mathbb{R},\ f(x) \in U_n,$$

gdy homeomorfizm h_n jest rosnący, natomiast

$$h_n(t - \eta_n^* + h_n^{-1}(f(x))) \geq H(t,x) \geq h_n(t + \eta_n^* + h_n^{-1}(f(x))), \qquad t \in \mathbb{R},\ f(x) \in U_n,$$

gdy homeomorfizm h_n jest malejący,

- *albo nie istniej taka η_n, dla której (2.8) zachodzi i wtedy*

$$H(t,x) = h_n(t + h_n^{-1}(f(x))), \qquad t \in \mathbb{R},\ f(x) \in U_n.$$

Wtedy

$$|H(s, H(t,x)) - H(t+s,x)| \leq E\delta, \qquad s,t \in \mathbb{R},\ x \in I,$$

gdzie $E := \max\{(2A_2 + D), \min\{3A_1 + B, A_1 + B + C\}\}$.

Drugim celem pracy [A] było zbadanie stabilności równania translacji w klasie funkcji będących surjekcjami oraz stabilności układu równań funkcyjnych

$$\begin{cases} H(s, H(t,x)) = H(t+s,x), \\ H(0,x) = x. \end{cases}$$

Okazało się, że równanie translacji jest stabilne w klasie funkcji będących surjekcjami, a wspomniany wyżej układ nie jest stabilny, gdy $I \subsetneq \mathbb{R}$, a przecież H spełniająca równanie translacji jest surjekcją wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek początkowy $H(0,x) = x$. To zapoczątkowało współpracę z prof. Zenonem Musznerem dotyczącą badania stabilności (w sensie różnych definicji) układów dynamicznych (również w sensie różnych definicji). Wyniki tych badań zawiera praca [X] (badania te kontynuował Z. Moszner w [89] i [90]).

2.3 Inne wyniki dotyczące problemu Ulama dla równania translacji

W artykule [77] badana jest b-stabilność[10] i stabilność w sensie Hyersa-Ulama[11] równania (2.1). Praca ta zawiera kilka uwag[12] dotyczących pewnych szczególnych przypadków[13].

---

[10] Niech $(T, +)$ będzie monoidem (z elementem neutralnym 0), (X, ρ) przestrzenią metryczną. Mówimy, że równanie (2.1) jest *b-stabilne*, jeśli dla każdej funkcji $G\colon T \times X \to X$ zachodzi implikacja: jeśli zbiór

$$\{\rho(G(s, G(t,x)), G(t+s,x)) : x \in X,\ s,t \in T\}$$

jest ograniczony, to istnieje takie rozwiązanie F równania (2.1), że zbiór

$$\{\rho(G(s,x), F(s,x)) : x \in X,\ s \in T\}$$

jest ograniczony.

[11] Mówimy, że równanie (2.1) jest *stabilne w sensie Hyersa-Ulama*, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla każdej funkcji $G\colon T \times X \to X$ spełniającej

$$\rho(G(s, G(t,x)), G(t+s,x)) \leq \delta, \quad x \in X,\ s,t \in T, \tag{2.9}$$

istnieje takie rozwiązanie F równania (2.1), że

$$\rho(G(s,x), F(s,x)) \leq \varepsilon, \quad x \in X,\ s \in T. \tag{2.10}$$

[12] Pierwsze trzy pochodzą z wcześniejszej pracy [85].

[13] są to:

- gdy T jest grupą wolną generowaną przez 2 elementy, a X jest zbiorem liczb całkowitych z naturalną metryką, to równanie (2.1) nie jest b-stabilne;
- gdy T jest dowolnym grupoidem, a X jest zbiorem liczb całkowitych z naturalną metryką, to równanie (2.1) jest stabilne w sensie Hyersa-Ulama;
- gdy $T = \{0\}$ jest grupą trywialną, a X dowolną przestrzenią metryczną, równanie (2.1) jest b-stabilne i stabilne w sensie Hyersa-Ulama;
- niech $T = \{0, 1\}$ będzie dwuelementową grupą, $X = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ z naturalną metryką, wtedy nie jest prawdą, że:

dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla każdej funkcji $G\colon T \times X \to X$ spełniającej (2.9) istnieje takie rozwiązanie F równania (2.1), że

$$F(0,x) = x, \quad x \in X$$

oraz zachodzi (2.10).

Główne wyniki[14] pracy [77] dotyczą stabilności równania (2.1) w klasach funkcji

$$\mathcal{B} = \{H\colon T \times X \to X :\ H(\cdot, x_0) \text{ jest bijekcją dla pewnego } x_0 \in X\}$$

oraz

$$\mathcal{I} = \{H\colon T \times X \to X :\ \ H(\cdot, x_0) \text{ jest injekcją}$$
$$\text{oraz } H(T \times \{x_0\}) = H(\{0\} \times X) \ \text{ dla pewnego } x_0 \in X\}$$

W pracy [48] autorzy rozważają stabilność równania translacji w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych[15] $\mathbb{K}[X]$ nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dowodzą, że równanie translacji jest stabilne[16] przy pewnych założeniach o grupie G (zob. [48, Theorem 2 i Theorem 3]).

---

[14] W [77] pokazano, że gdy $G \in \mathcal{B}$ oraz $g := G(\cdot, x_0)\colon T \to X$ jest bijekcją, to funkcja $F\colon T \times X \to X$ dana wzorem $F(t, x) = g(g^{-1}(x) + t)$ jest rozwiązaniem równania translacji i należy do klasy $\mathcal{B}$ (a dokładniej, że $F(\cdot, g(0))$ jest bijekcją). Ponadto

$$G(t, x) = G(t, G(g^{-1}(x), x_0)), \quad t \in T, x \in X,$$

oraz

$$F(t, x) = G(g^{-1}(x) + t, x_0).$$

Tak więc równanie (2.1) jest stabilne w sposób oczywisty. Natomiast, jeśli $G \in \mathcal{I}$, $g := G(\cdot, x_0)\colon T \to X$ jest injekcją oraz $G(T \times \{x_0\}) = G(\{0\} \times X) =: X_0$, to funkcja $F\colon T \times X \to X$ dana wzorem

$$F(t, x) = g(g^{-1}(f(x)) + t),$$

gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dla } x \in X_0, \\ G(0, x), & \text{dla } x \in X \setminus X_0, \end{cases}$$

jest rozwiązaniem równania translacji i należy do klasy $\mathcal{I}$. Implikacja (2.9) $\Rightarrow$ (2.10) zachodzi z $\epsilon = 2\delta$.

[15] Tu $F(t, X)$ jest formalnym szeregiem potęgowym, czyli jest postaci $\sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) X^i$ dla pewnych współczynników $c_i\colon G \to \mathbb{K}$, ponadto przez $F(t, F(s, X))$ rozumie się szereg otrzymany przez podstawienie $\sum_{i=1}^{\infty} c_i(t)(F(s, X))^i$. Dla szeregu $p(X) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i X^i$ definiuje się $\operatorname{ord}(p(X))$ jako $\min\{i \in \mathbb{N} \cup \{0\} : c_i \neq 0\}$.

[16] Równanie translacji $F(t, F(s, X)) = F(s + t, X)$ jest *stabilne* według [48], gdy dla każdej liczby naturalnej N możemy znaleźć taką liczbę naturalną M, że dla każdej rodziny $(F(t, X))_{t \in G}$ formalnych szeregów potęgowych,

$$F(t, X) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) X^i, \quad t \in G,$$

jeśli

$$\operatorname{ord}(F(t + s, X) - F(s, F(t, X))) > M, \quad s, t \in G,$$

to istnieje taka grupa $(\bar{F}(t, X))_{t \in G}$ formalnych szeregów potęgowych,

$$\bar{F}(t, X) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{c}_i X^i, \quad t \in G,$$

że

$$\operatorname{ord}(F(t, X) - \bar{F}(t, X)) > N, \quad t \in G,$$

3.1 Wprowadzenie

W pracach [B] oraz [D] wypracowana została pewna technika pozwalająca badać stabilność niektórych równań funkcyjnych. Oparta jest na twierdzeniach o wspólnym punkcie stałym, a konkretniej, w pracach [B] i [D] używałam następujących twierdzeń:

Twierdzenie 3.1 (A. Markow [79], S. Kakutani [59], [99]). *Niech $\mathcal{X}$ będzie przestrzenią liniowo-topologiczną, $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ jej zwartym, wypukłym i niepustym podzbiorem. Załóżmy, że $\mathcal{F}$ jest taką rodziną odwzorowań ciągłych afinicznych zbioru $\mathcal{K}$ w siebie, że*

$$F \circ G = G \circ F, \quad F, G \in \mathcal{F}.$$

Wtedy istnieje taki punkt $y \in \mathcal{K}$, że $F(y) = y$ dla wszystkich $F \in \mathcal{F}$.

Twierdzenie 3.2 (R. DeMarr [20], [76]). *Niech $(C, \leq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, zupełnym, posiadającym element największy. Załóżmy, że $\mathcal{F}$ jest komutującą*[17] *rodziną odzworowań słabo rosnących zbioru C w siebie. Wtedy w zbiorze C istnieje wspólny punkt stały wszystkich odwzorowań z rodziny $\mathcal{F}$.*

3.2 Nowy dowód Twierdzenia Hyersa

Przedstawię teraz szkic dowodu następującej wersji twierdzenia Hyersa[18] pochodzący z pracy [B]:

Twierdzenie 3.3 (D. H. Hyers, [42]). *Niech $(S, +)$ będzie półgrupą abelową, $\varepsilon \geq 0$, $\varphi\colon S \to \mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Załóżmy, że*

$$|\varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon, \quad x, y \in S.$$

Wtedy istnieje addytywna funkcja $a\colon S \to \mathbb{K}$ dla której

$$|a(s) - \varphi(s)| \leq \varepsilon, \quad s \in S.$$

Szkic dowodu. Oznaczmy przez $\mathcal{X} = \ell_\infty(S)$, czyli przestrzeń funkcji ograniczonych określonych na S i o wartościach w $\mathbb{K}$ z normą supremum. Niech $\ell_1(S)$ będzie przestrzenią funkcji sumowalnych określonych na S o wartościach w $\mathbb{K}$ z normą $\|f\| = \sum_{s\in S} |f(s)|$. Jako, że

(czyli $c_i = \bar{c}_i$ dla $1 \leq i \leq N$).

[17] a więc spełniającą

$$F \circ G = G \circ F \quad \text{dla} \quad F, G \in \mathcal{F}$$

[18] Przypomnę, że oryginalne twierdzenie Hyersa dotyczyło przybliżonych homomorfizmów pomiędzy przestrzeniami Banacha, przypomnę też Twierdzenie 1.3 w celu usprawiedliwienia dlaczego przestrzeń wartości w Twierdzeniu 3.3 to “tylko” $\mathbb{R}$ bądź $\mathbb{C}$.

$\mathcal{X} = (\ell_1(S))^*$, możemy rozpatrywać przestrzeń $\mathcal{X}$ z *-słabą topologią i z tą topologią $\mathcal{X}$ jest przestrzenią liniowo–topologiczną. Rodzina $\mathcal{F} = \{T_x \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X};\ x \in S\}$, gdzie

$$T_x(f) := f(x+\cdot) + \varphi(x+\cdot) - f(x) - \varphi(x) - \varphi(\cdot), \quad x \in S,$$

jest komutującą rodziną ciągłych afinicznych odwzorowań przestrzeni $\mathcal{X}$ w siebie. Ponadto zbiór

$$\mathcal{C} := \{f \in Y : \|f\| \le \varepsilon,\ \|T_x(f)\| \le \varepsilon,\ x \in S\}$$

jest niepusty, wypukły oraz $T_x(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ dla każdego $x \in S$. Jego *-słabe domknięcie $\mathcal{K}$ jest niepustym zbiorem *-słabo zwartym, wypukłym i niezmienniczym dla każdego T_x, gdzie $x \in S$. Z Twierdzenia Markowa–Kakutaniego wnosimy, że istnieje $f \in \mathcal{K}$, dla którego $T_x(f) = f$ dla wszystkich $x \in S$. Kładąc $a := f + \varphi$ dostajemy, że $a\colon S \to \mathbb{K}$ jest addytywna oraz $\|a - \varphi\| = \|f\| \le \varepsilon$. □

Przedstawione powyżej rozumowanie wskazuje kolejną metodę dowodu Twierdzenia 3.3 (po tzw. metodzie "ciągów Hyersa" [42], metodzie opartej na twierdzeniach typu Banacha o punkcie stałym [96], [13] oraz metodzie średnich niezmienniczych [106]).

3.3 Zastosowanie twierdzeń o wspólnym punkcie stałym do badania stabilności innych równań funkcyjnych

W pracy [D] pokazuję użyteczność twierdzeń o wspólnym punkcie stałym badając stabilność równania funkcyjnego postaci

$$f(s \diamond x) = F(s, f(x)), \quad s \in G, x \in X, \tag{3.1}$$

gdzie G jest grupą abelową działającą na zbiorze X, Y jest zbiorem, $F\colon G \times Y \to Y$ jest daną funkcją, a niewiadoma funkcja f określona jest na zbiorze X i przyjmuje wartości w Y. Inspiracją do badania takiego równania było rozważane w monografii [1] równanie funkcyjne

$$f(sx) = F(s, f(x)), \quad s \in S, x \in X, \tag{3.2}$$

z niewiadomą funkcją $f\colon S \to S$, gdzie S jest półgrupą z elementem neutralnym, $F\colon S \times S \to S$ jest daną funkcją. Warto zwrócić uwagę, że szczególnymi przypadkami równania (3.1) są

- równanie jednorodności:

$$f(sx) = s^p f(x), \quad s \in \mathbb{K}_0,\ x \in X, \tag{3.3}$$

  gdzie $\mathbb{K}_0$ jest podgrupą grupy $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ bądź też grupy $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, a X i Y są przestrzeniami liniowymi nad, odpowiednio, $\mathbb{R}$ bądź $\mathbb{C}$;

- równanie funkcji okresowej

$$f(x+kp) = f(x), \quad x \in X,\, k \in \mathbb{Z}, \tag{3.4}$$

gdzie X jest grupą, p jej ustalonym elementem;
- równanie funkcji mikrookresowej

$$f(x+qp) = f(x), \quad x \in X,\, q \in \mathbb{Q}, \tag{3.5}$$

gdzie X jest przestrzenią liniową, p jej ustalonym elementem;
- równanie

$$f(x^y) = yf(x), \quad x \in (0,\infty),\, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \tag{3.6}$$

- równanie

$$f(s+t) = s + f(t), \quad s \in G_0,\, t \in G, \tag{3.7}$$

gdzie G_0 jest podgrupą grupy G;
- równanie

$$f(x^p) = f(x)^p, \quad x \in (0,\infty),\, p \in G, \tag{3.8}$$

gdzie G jest podgrupą grupy $((0,\infty),\cdot)$.

Stabilność równań (3.3), (3.6) oraz (3.7), a więc szczególnych przypadków równania (3.1), była badana już wcześniej w pracach [45, 46, 47, 49, 56, 69, 108, 111, 116]. Pokazywano tam więcej, a mianowicie, że równania (3.3) i (3.6) są superstabilne, tzn. każde "przybliżone rozwiązanie" jest "dokładnym rozwiązaniem". W pracy [D] metodą wykorzystującą twierdzenia o wspólnym punkcie stałym otrzymuję jedynie stabilność tych równań, jednak w [D, Corollary 5.1] pokazuję, że z już udowodnionej stabilności tych równań, ich superstabilność można wyprowadzić w prosty sposób.

Twierdzenie 3.4 ([D], Theorem 3.2). *Załóżmy, że*

(i) *G jest grupą abelową działającą na zbiorze X, Y jest przestrzenią liniowo–topologiczną;*

(ii) *$F\colon G \times Y \to Y$ spełnia równanie translacji:*

$$F(s, F(t,x)) = F(st, x), \quad s,t \in G,\, y \in Y;$$

(iii) *$F(t,\cdot)\colon Y \to Y$ są ciągłe i afiniczne dla każdego $t \in G$;*

(iv) *$K \subset Y$ jest zbiorem zwartym, wypukłym, zawierającym 0, $f_0\colon X \to Y$ oraz*

$$F(s, f_0(x)) - f_0(s \diamond x) \in K, \quad x \in X,\, s \in G.$$

Wtedy istnieje takie rozwiązanie $f\colon X \to Y$ równania (3.1), że

$$f(x) - f_0(x) \in K, \quad x \in X. \tag{3.9}$$

Założenie (ii) wydaje się dość silne, jednakże jest ono spełnione w każdym z wyżej wymienionych szczególnych przypadków równania (3.1); ponadto, jak wykazano w [1], spełnianie równania translacji w przynajmniej jednym punkcie jest warunkiem równoważnym na istnienie rozwiązań równania (3.2); co więcej, założenie, że tylko w jednym punkcie spełnione jest równanie translacji nie wystarcza do uzyskania stabilności ([D, Example 5.2]). Założenie (iii) jest spełnione w przykładach (3.3)–(3.7). Założenie (iv) wyraża fakt, że $f_0 \colon X \to Y$ spełnia równanie (3.1) w sposób przybliżony. Natomiast (3.9) mówi, że f jest "blisko" f_0.
Szkic dowodu Twierdzenia 3.4. Rozważamy $\mathcal{X} := Y^X$ z topologią Tichonowa. Definiujemy $G_t \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, dla $t \in G$, wzorem

$$G_t(f)(x) = F(t, f(t^{-1} \diamond x)), \quad f \in \mathcal{X},\, x \in X.$$

Niech zbiór $\mathcal{K}$ składa się z tych funkcji $f \in \mathcal{X}$, dla których $f(x) - f_0(x) \in K$ dla $x \in X$ oraz $G_t(f)(x) - f_0(x) \in K$ dla wszelkich $x \in X$ i $t \in G$. Wystarczy sprawdzić, że wszystkie założenia Twierdzenia 3.1 (z $\mathcal{F} := \{G_t,\, t \in G\}$) są spełnione, by dostać istnienie $f \in \mathcal{K}$ (skąd w szczególności mamy (3.9)) dla której $G_t(f) = f$ dla wszystkich $t \in G$ (a to oznacza, że f jest rozwiązaniem (3.1)). □

W [D, Theorem 4.2] zakładam, że:
– Y jest zbiorem częściowo uporządkowanym;
– $f_0 \colon X \to Y$ spełnia równania (3.1) w sposób przybliżony, co wyrażone jest przez rozważanie funkcji $a, b \colon X \to Y$, dla których $a(x) \le b(x)$ oraz

$$f_0(x), F(t, f_0(t^{-1} \diamond x)) \in [a(x), b(x)], \quad x \in X,\, t \in G,$$

– $F \colon G \times Y \to Y$ spełnia równania translacji, jest rosnąca i "ciągła" ze względu na drugą zmienną[19] (te założenia o F pozwalają skorzystać z Twierdzenia 3.2; podkreślę też, że wszystkie one są spełnione w przypadku równań (3.3)–(3.8) przy stosownie dobranych zbiorach X, Y, G).
Szkic dowodu stabilności równania (3.1)*, czyli* [D, Theorem 4.2]. Rozważamy $Z = Y^X$ z częściowym porządkiem wprowadzonym przez

$$f \le g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \le g(x) \ \text{ dla } \ x \in X.$$

Definiujemy $G_t \colon Z \to Z$ dla $t \in G$ wzorem

$$G_t(f)(x) = F(t, f(t^{-1} \diamond x)).$$

Dla rodziny

$$\mathcal{F} = \{G_t,\, t \in G\}$$

[19]zob. [D, Theorem 4.2, assumptions (B)].

i zbioru

$$\mathcal{C} = \{f \in Z : \ f(x), G_t(f)(x) \in [a(x), b(x)] \text{ dla } \ x \in X, \, t \in G\}$$

spełnione są założenia Twierdzenia 3.2, więc istnieje w $\mathcal{C}$ wspólny punkt stały f rodziny $\mathcal{F}$. Z faktu bycia punktem stałym każdego z odwzorowań G_t oraz należenia do $\mathcal{C}$ wnosimy odpowiednio, że
– f jest rozwiązaniem równania (3.1),
– f jest blisko f_0 w tym sensie, że

$$f_0(x), f(x) \in [a(x), b(x)], \quad x \in X,$$

co w realiach [D, Theorem 4.2] oznacza, że równanie (3.1) jest stabilne. □

4. Problem typu Ulama dla homomorfizmów krat

4.1 Wprowadzenie

Odwzorowanie $f\colon X \to Y$, gdzie X i Y są kratami, nazywamy:
$\vee$-*homomorfizmem*, gdy

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \quad x, y \in X;$$

$\wedge$-*homomorfizmem*, gdy

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), \quad x, y \in X;$$

homomorfizmem, gdy jest zarówno $\vee$-homomorfizmem jak i $\wedge$-homomorfizmem. Do tej pory ukazało się niewiele prac, w których badano problem stabilności (homomorfizmów) w kratach. Wskażę dwie takie prace. Pierwsza to praca N. J. Kaltona i J. W. Robertsa z klasycznym już wynikiem:

Twierdzenie 4.1 (N. J. Kalton & J. W. Roberts [60])**.** *Niech X będzie algebrą Booole'a, a $f\colon X \to \mathbb{R}$ funkcją spełniającą nierówność*

$$|f(x \vee y) - f(x) - f(y)| \leq 1 \quad \text{dla } x, y \in X \text{ takich, że } x \wedge y = 0.$$

Wtedy istnieje takie odwzorowanie $g\colon X \to \mathbb{R}$, że

$$g(x \vee y) = g(x) + g(y) \qquad \text{dla } x, y \in X \text{ takich, że } x \wedge y = 0$$

oraz $|f(x) - g(x)| < 45$ dla każdego $x \in X$.

Jest to wynik głęboki i ważny w analizie funkcjonalnej, z którego korzystamy np. w teorii sum skrętnych przestrzeni Banacha (zobacz [62]), a także w problemie stabilności miar wektorowych (zobacz [66]).

Drugą pracą, która związana jest z problemem Ulama dla krat, jest publikacja I. Faraha [23] z następującym twierdzeniem natury kombinatorycznej.

Twierdzenie 4.2 (I. Farah [23])**.** *Niech* $n, m \in \mathbb{N}$, $X = 2^{\{1,2,\ldots,m\}}$ *oraz* $Y = 2^{\{1,2,\ldots,n\}}$. *Załóżmy, że* $\varphi\colon Y \to [0,\infty]$ *jest podmiarą, tzn.,* $\varphi(\emptyset) = 0$, $\varphi(A) \leq \varphi(A \cup B)$, *dla* $A, B \subset Y$ *oraz* $\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$, *dla* $A, B \subset Y$. *Ponadto załóżmy, że* φ *jest niepatologiczna, tzn. że jest równa supremum wszystkich miar, które dominuje. Niech* $\varepsilon > 0$ *i* $f\colon X \to Y$ *będą takie, że*

$$\varphi(f(x \cup y) \div (f(x) \cup f(y)) < \varepsilon \quad dla\ x, y \in X,$$

$$\varphi(f(X \setminus x) \div (Y \setminus f(x))) < \varepsilon \quad dla\ x \in X.$$

Wtedy istnieje homomorfizm krat $g\colon X \to Y$, *dla którego* $\varphi(f(x) \div g(x)) < 521\varepsilon$ *dla każdego* $x \in X$.

4.2 Omówienie wyników z pracy [G]

W [G] zaproponowaliśmy dwa sposoby na wyrażenie faktu, że $f\colon X \to Y$ jest przybliżonym $\vee$-homomorfizmem krat X i Y. Pierwszy z tych sposobów wykorzystuje tzw. funkcję kontrolną, drugi używa systemu otoczeń.

Dowody dwóch głównych wyników z pracy [G] opieramy na następującym lemacie o oddzielaniu[20].

Lemat 4.1. *Niech* X *będzie kratą rozdzielną, a* Y *kratą warunkowo zupełną*[21]. *Załóżmy, że* $\Phi, \Psi\colon X \to Y$ *spełniają warunki:* $\Phi \leq \Psi$,

$$\Phi(x \vee y) \leq \Phi(x) \vee \Phi(y) \quad x, y \in X,$$

oraz

$$\Psi(x \vee y) \geq \Psi(x) \vee \Psi(y) \quad x, y \in X.$$

Wtedy istnieje $\vee$*-homomorfizm* $F\colon X \to Y$, *oddzielający* Ψ *i* Φ, *tzn.* $\Phi \leq F \leq \Psi$.

---

[20] W pracy [G] wspominamy też, że można wyprowadzić pewien wniosek o oddzielaniu z Lematu 4.1 oraz następującego twierdzenia:

Twierdzenie 4.3 (W. Kubiś [71])**.** *Niech* L *będzie kratą rozdzielną,* $\mathbb{B}$ *zupełną algebrą Boole'a,* $f, g\colon L \to \mathbb{B}$ *oraz* $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, $g(x \vee y) = g(x) \vee g(y)$ *dla wszelkich* $x, y \in L$. *Załóżmy ponadto, że* $f(x) \leq g(x)$ *dla* $x \in L$. *Wtedy istnieje taki homomorfizm krat* $h\colon L \to \mathbb{B}$, *że*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad x \in L.$$

Wniosek ten zanotowany jest przed wypowiedzią Theorem 7 w [G].

[21] tzn. każdy ograniczony podzbiór niepusty ma element najmniejszy i największy.

Dowód jest konstruktywny.

Rozważanie problemu Ulama ze stałą funkcją kontrolną trywializuje się, dlatego w pracy [G] prezentujemy dwa inne możliwe podejścia. Pierwsze wykorzystuje funkcje kontrolne (patrz (4.1) poniżej dla wyrażenia faktu, że odwzorowanie f jest przybliżonym $\vee$-homomorfizmem oraz (4.2), które precyzuje, że f i F są blisko).

Twierdzenie 4.4. *Niech X i Y będą rozdzielnymi kratami, załóżmy, że Y jest warunkowo zupełna i spełnia warunek*

$$y \vee \inf S = \inf\{y \vee s \colon s \in S\},$$

dla wszystkich $y \in Y$ i ograniczonych z dołu i niepustych zbiorów $S \subset Y$. Załóżmy, że odwzorowania $f \colon X \to Y$ oraz $\phi, \psi \colon X \times X \to Y$ spełniają następujące warunki:

$$\phi(z,z) \le \phi(x,y) \quad \textit{dla } x,y,z \in X \textit{ takich, że } x,y \le z,$$

$$\psi(x,y) \le \psi(z,z) \quad \textit{dla } x,y,z \in X \textit{ takich, że } x,y \le z$$

oraz

$$\phi(x,y) \wedge f(x \vee y) \le f(x) \vee f(y) \le f(x \vee y) \vee \psi(x,y) \quad \textit{dla } x,y \in X. \tag{4.1}$$

Wtedy istnieje taki $\vee$-homomorfizm $F \colon X \to Y$, że

$$\phi(x,x) \wedge f(x) \le F(x) \le f(x) \vee \psi(x,x) \quad \textit{dla } x \in X. \tag{4.2}$$

Również ten dowód jest konstruktywny. Wpierw definiujemy odwzorowania Φ i Ψ jako

$$\Phi(x) = \inf\big\{f(x_1) \vee \ldots \vee f(x_n) \colon n \in \mathbb{N},\, x_1, \ldots, x_n \in X,\, x = x_1 \vee \ldots \vee x_n\big\}$$

oraz

$$\Psi(x) = \sup\big\{f(x_1) \vee \ldots \vee f(x_n) \colon n \in \mathbb{N},\, x_1, \ldots, x_n \in X,\, x = x_1 \vee \ldots \vee x_n\big\},$$

a następnie pokazujemy, że

$$\phi(x,x) \wedge f(x) \le \Phi(x) \le f(x), \quad x \in X,$$

$$f(x) \le \Psi(x) \le f(x) \vee \psi(x,x), \quad x \in X.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\Phi(x \vee y) \le \Phi(x) \vee \Phi(y), \quad x,y \in X,$$

oraz

$$\Psi(x \vee y) \ge \Psi(x) \vee \Psi(y), \quad x,y \in X.$$

To pozwala skorzystać z Lematu 4.1: funkcja F określona wzorem

$$F(x) = \sup\{\Phi(z);\, z \le x\}, \quad x \in X.$$

ma żądane własności.

Nasze drugie podejście do problemu Ulama w kratach wykorzystuje system otoczeń (patrz (4.3) oraz (4.4)).

Twierdzenie 4.5. *Niech X i Y będą rozdzielnymi kratami, załóżmy, że Y jest warunkowo zupełna i spełnia warunek*

$$y \vee \inf S = \inf\{y \vee s\colon s \in S\}$$

dla wszystkich $y \in Y$ i ograniczonych z dołu i niepustych zbiorów $S \subset Y$. Załóżmy ponadto, że dana jest funkcja $\mathcal{N}\colon Y \to 2^Y$ o wartościach będących ograniczonymi zbiorami i spełniająca warunki:

(i) *$y \in \mathcal{N}(y)$ dla każdego $y \in Y$;*
(ii) *jeśli $t, u \in \mathcal{N}(z)$ i $t \leq y \leq u$, to $y \in \mathcal{N}(z)$;*
(iii) $\sup \mathcal{N}(y) \in \mathcal{N}(y)$ *oraz* $\inf \mathcal{N}(y) \in \mathcal{N}(y)$ *dla każdego $y \in Y$;*
(iv) *jeśli $t \in \mathcal{N}(u)$ oraz $u \vee y \in \mathcal{N}(z)$, to $t \vee y \in \mathcal{N}(z)$.*

Wtedy dla każdego odwzorowania $f\colon X \to Y$ spełniającego

$$f(x) \vee f(y) \in \mathcal{N}(f(x \vee y)) \quad \text{dla } x, y \in X \tag{4.3}$$

istnieje taki $\vee$-homomorfizm $F\colon X \to Y$, że

$$F(x) \in \mathcal{N}(f(x)), \qquad \text{dla każdego } x \in X. \tag{4.4}$$

W pracy [G] podaliśmy kilka naturalnych przykładów funkcji $\mathcal{N}$ spełniającej warunki (i)–(iv).

Odnotujmy również, że w obydwu twierdzeniach można zamienić $\vee$ na $\wedge$ i dostać analogiczne rezultaty dla przybliżonych $\wedge$-homomorfizmów.

Chcąc porównać otrzymane przez nas wyniki ze znanymi twierdzeniami odnieśliśmy je do naturalnego przypadku, a mianowicie do stabilności funkcji monotonicznych.

Zauważmy, że $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jest
– rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy $\max\{f(x), f(y)\} = f(\max\{x, y\})$ dla wszystkich $x, y \in D$,
– malejąca, wtedy i tylko wtedy, gdy $\max\{f(x), f(y)\} = f(\min\{x, y\})$ dla wszystkich $x, y \in D$.

Wniosek 4.1. *Załóżmy, że $D \subset \mathbb{R}$, $\varepsilon \geq 0$, $f\colon D \to \mathbb{R}$.*

(a) *Jeśli*

$$\max\{f(x), f(y)\} - f(\max\{x, y\}) \leq \varepsilon \quad \text{dla } x, y \in D,$$

to istnieje taka rosnąca funkcja $g\colon D \to \mathbb{R}$*, że*

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon/2, \quad \text{dla każdego } x \in D.$$

(b) *Jeśli*

$$\max\{f(x), f(y)\} - f(\min\{x, y\}) \leq \varepsilon \quad \text{dla } x, y \in D,$$

to istnieje taka malejąca funkcja $g\colon D \to \mathbb{R}$*, że*

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon/2, \quad \text{dla każdego } x \in D.$$

Można stąd wyprowadzić następujący rezultat[22].

Twierdzenie 4.6 (W. Förg-Rob, K. Nikodem, Zs. Páles [30])**.** *Niech* $I \subset \mathbb{R}$ *będzie przedziałem,* $\varepsilon \geq 0$ *i załóżmy, że funkcja* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *spełnia*

$$\min\{f(x), f(y)\} - \varepsilon \leq f(tx + (1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} + \varepsilon$$

dla $x, y \in I$*,* $t \in [0,1]$*. Wtedy istnieje taka monotoniczna funkcja* $g\colon I \to \mathbb{R}$*, że*

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon/2, \quad \text{dla każdego } x \in I.$$

Zauważyliśmy też[23], że można uogólnić Wniosek 4.1 do następującego:

Wniosek 4.2. *Niech* D *oraz* E *będą zbiorami liniowo uporządkowanymi i załóżmy, że* E *jest warunkowo zupełny. Niech* $\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *będzie ustalonym pokryciem zbioru* E*, gdzie każdy zbiór* I_λ *jest przedziałem. Załóżmy, że funkcja* $f\colon D \to E$ *spełnia warunek: dla każdych* $x, y \in D$ *istnieje taka* $\lambda \in \Lambda$*, że*

$$\{f(x \vee y), f(x) \vee f(y)\} \subset I_\lambda.$$

Załóżmy także, że dla każdego $x \in D$ *zbiór*

$$I(x) := \bigcup\{I_\lambda : x \in I_\lambda\}$$

jest ograniczony z góry. Wtedy istnieje taka rosnąca funkcja $F\colon D \to E$*, że* $f(x) \leq F(x) \leq \sup I(x)$ *dla każdego* $x \in D$*.*

---

[22] Ale (w przypadku, gdy D jest przedziałem) Wniosek 4.1 można też wyprowadzić z Twierdzenia 4.6.

[23] dzięki recenzentowi [G].

5. Miarowy problem Ulama

5.1 Wprowadzenie

P. Erdős [22] postawił następujący problem:

Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus Z,$$

gdzie $Z \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest zbiorem miary Lebesgue'a zero. Czy istnieje taka funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \quad \text{dla wszystkich } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

oraz

$$g(x) = f(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus U,$$

gdzie $U \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem miary Lebesgue'a zero?

Pozytywną odpowiedź na to pytanie znajdziemy w pracy W. B. Jurkata [57] oraz N. G. de Bruijna [9]; zob. także prace R. Gera [32] i Ja. Tabora [110].

R. Ger w [33] połączył problem Ulama z pytaniem Erdősa i udowodnił (pod pewnymi założeniami o grupach G, H oraz σ-ideałach w grupach G i G^2), że jeśli

$$d(f(x+y), f(x) + f(y)) \leq \delta, \quad \text{dla "prawie wszystkich" } (x,y) \in G^2,$$

to istnieje taka funkcja addytywna $g\colon G \to H$, że

$$d(f(x), g(x)) \leq \delta, \quad \text{dla "prawie wszystkich" } x \in G.$$

W podobnym duchu utrzymane są wyniki z pracy I. Faraha [24], choć ich autor wskazuje, że jego motywacja była inna. Niech G i H będą grupami, a μ miarą probabilistyczną w G spełniającą warunki

$$\mu(a+X) = \mu(X), \;\; \mu(X+a) = \mu(X), \;\; \text{oraz } \; \mu(\{-x : x \in X\}) = \mu(X),$$

dla mierzalnych podzbiorów X grupy G i $a \in G$. Odwzorowanie $f\colon G \to H$ nazywać będziemy *δ-przybliżonym homomorfizmem typu I ze względu na* μ, gdy

$$\mu^2(\{(x,y) \in G \times G : \; f(x) + f(y) \neq f(x+y)\}) \leq \delta \tag{5.1}$$

oraz

$$\mu(\{x \in G : \; f(x) \neq -f(-x)\}) \leq \delta. \tag{5.2}$$

I. Farah udowodnił następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.1 (I. Farah, [24]). *Załóżmy, że G jest skończoną grupą, μ jednostajną miarą probabilistyczną*[24] *na G, $\delta \le \frac{1}{11}$ a $f\colon G \to H$ jest δ-przybliżonym homomorfizmem typu I, ze względu na μ. Wtedy istnieje taki homomorfizm $h\colon G \to H$, że*

$$\mu(\{x : f(x) \neq h(x)\}) \le \frac{\delta}{1-3\delta}.$$

5.2 Omówienie wyników uzyskanych w pracach [E] oraz [F]

W pracy [E] dowodzę twierdzenia podobnego do Twierdzenia 5.1, ale pozbywam się założenia (5.2), natomiast dokładam założenie o przemienności grup G i H ([E, Theorem 2.1]). Poniżej wypowiedź nieco ogólniejszej wersji tego twierdzenia, gdzie w założeniu (5.1) żądamy, aby było "mało" tych par (x, y), dla których nie tyle wartość $f(x+y)$ jest różna od sumy $f(x)+f(y)$, co dostatecznie odległa od niej.

Twierdzenie 5.2 ([E] Theorem 2.2). *Niech G będzie skończoną grupą abelową, $\varepsilon \ge 0$. Załóżmy, że H jest grupą abelową, $d\colon H^2 \to [0,\infty)$ metryką niezmienniczą na przesunięcia, $f\colon G \to H$, $\delta \in (0, 1-\frac{\sqrt{3}}{2})$. Załóżmy, że*

$$\mu^2(\{(x,y) :\, d(f(x)+f(y), f(x+y)) > \varepsilon\}) \le \delta.$$

Wtedy istnieje taka funkcja $h\colon G \to H$, że

$$d(h(a+b), h(a)+h(b)) \le 20\varepsilon, \quad a, b \in G$$

oraz

$$\mu(\{x :\, d(f(x), h(x)) > 7\varepsilon\}) \le \frac{\delta}{1-2\delta}.$$

W pracy [F] nie zakładamy już skończoności grupy G. Zgodnie z twierdzeniem M. M. Daya [21] istnienie skończenie addytywnej prawostronnie niezmienniczej miary probalistycznej na rodzinie $\mathcal{P}(G)$ wszystkich podzbiorów grupy G jest równoważne istnieniu średniej prawostronnie niezmienniczej na G. Zakładamy zatem o grupie G, że dopuszcza prawostronnie niezmienniczą średnią M, a tym samym określona jest na niej skończenie addytywna miara probabilistyczna μ, związana z M wzorem

$$\mu(A) = M(\chi_A), \quad A \subset G.$$

Definiujemy w naturalny sposób, tj. wzorem[25]

$$\mu^2(Z) = M_y(\mu(Z^y)), \quad Z \subset G \times G,$$

[24] tzn. $\mu(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} G}$.

[25] we wzorze tym indeks dolny y oznacza, że $M_y(\mu(Z^y))$ jest wartością średniej niezmienniczej M na funkcji $y \mapsto \mu(Z^y)$ (o zmiennej y), a $Z^y := \{x :\, (x,y) \in Z\}$.

skończenie addytywną miarę probabilistyczną $\mu^2\colon \mathcal{P}(G\times G)\to[0,1]$. Okazuje się, że

$$\mu^2(A\times B)=\mu(A)\mu(B),\quad A,B\subset G.$$

Twierdzenie 5.2 można zatem uogólnić na grupy dopuszczające średnią niezmienniczą.

Twierdzenie 5.3 ([F], Theorem 1.3)**.** *Niech G będzie grupą dopuszczającą średnią prawostronnie niezmienniczą, a $\mu:\mathcal{P}(G)\to[0,1]$ będzie prawostronnie niezmienniczą skończenie addytywną miarą probabilistyczną. Załóżmy ponadto, że H jest grupą, w której określona jest niezmiennicza na przesunięcia metryka $d:H\times H\to[0,+\infty)$, $\varepsilon\geq 0$, $0\leq\delta<\frac{1}{12}$. Jeśli funkcja $f\colon G\to H$ spełnia*

$$\mu^2\big(\{(x,y)\ :\ d\big(f(x+y),f(x)+f(y)\big)>\varepsilon\}\big)\leq\delta,$$

to dla każdej liczby $\zeta>0$ istnieje takie odwzorowanie $F:G\to H$, że

$$d\big(F(x+y),F(x)+F(y)\big)\leq 24\varepsilon,\ \ x,y\in G \tag{5.3}$$

oraz

$$\mu\big(\{x\ :\ d(f(x),F(x))>\varepsilon\}\big)\leq 4\delta+\zeta.$$

Dowód tego twierdzenia został podzielony na kilka kroków[26]. Określiliśmy zbiory

$$Z=\{(x,y)\ :\ d(f(xy),f(x)f(y))>\varepsilon\}$$

oraz (dla stosownie dobranej liczby $\eta>0$)

$$\begin{aligned}U&=\{y\in G\ :\ \mu(\{x\in G\ :\ d(f(xy),f(x)f(y))>\varepsilon\})>\eta\}\\&=\{y\in G\ :\ \mu(Z^y)>\eta\}.\end{aligned}$$

Szacując miary zbiorów można było wywnioskować, że dla każdego $x\in G$ zbiór

$$A_x:=G\setminus[U\cup(Ux^{-1})]$$

jest niepusty oraz dla każdego $x\in G\setminus U$ zbiór

$$B_x:=G\setminus[U\cup(Ux^{-1})\cup Z^x]$$

jest niepusty.

Mogliśmy zatem tak wybrać elementy y_x (dla $x\in G$), aby

$$y_x\in\begin{cases}A_x, & \text{gdy } x\in U,\\ B_x, & \text{gdy } x\in G\setminus U.\end{cases}$$

[26]Pełny dowód tego twierdzenia jest dość długi i mozolny, znaleźć go można na stronach 516–519 pracy [F].

To pozwoliło nam określić funkcję $F : G \to H$ wzorem

$$F(x) = [f(y_x)]^{-1} f(y_x x), \quad x \in G.$$

Pokazaliśmy, że ma ona zapowiedziane własności.

Każda grupa przemienna dopuszcza średnią niezmienniczą, tak więc dla grup przemiennych można zastosować Twierdzenie 5.3, ale okazuje się, że prowadząc osobny dowód (analogiczny do dowodu Twierdzenia 5.2) dla grup przemiennych można uzyskać nieco inną tezę. Stąd osobne sformułowanie i dowód w pracy [F] następującego twierdzenia:

Twierdzenie 5.4 ([F], Theorem 3.1)**.** *Niech G i H będą przemiennymi grupami, $\varepsilon \geq 0$, $0 \leq \delta \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Załóżmy, że $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ jest niezmienniczą, skończenie addytywną miarą probabilistyczną na G oraz $d : H \times H \to [0, +\infty)$ jest niezmienniczą metryką na grupie H. Jeśli funkcja $f : G \to H$ spełnia*

$$\mu^2(\{(x,y) \ : \ d(f(x+y), f(x) + f(y)) > \varepsilon\}) \leq \delta,$$

to istnieje takie odwzorowanie $F : G \to H$, że

$$d(F(x+y), F(x) + F(y)) \leq 20\varepsilon, \ \ x, y \in G \tag{5.4}$$

oraz

$$\mu(\{x \ : \ d(f(x), F(x)) > 7\varepsilon\}) \leq \frac{\delta}{1 - 2\delta}.$$

Zarówno w Twierdzeniu 5.3 jak i 5.4 otrzymalismy w tezie istnienie funkcji $F \colon G \to H$ spełniającej warunek addytywności z pewnym przybliżeniem (por. (5.3), (5.4)). Dokładając do obu tych twierdzeń założenie zapewniające stabilność równania Cauchy'ego, zagwarantujemy sobie istnienie funkcji addytywnej, dla której na większości (w sensie miary μ) argumentów wartości jej i funkcji f różnią się niewiele.

Aby zachować czytelność wyników odwołajmy się do klasycznego Twierdzenia Hyersa.

Wniosek 5.1 ([F], Corollary 3.2)**.** *Załóżmy, że $\varepsilon \geq 0$, $0 \leq \delta \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ jest niezmienniczą, skończenie addytywną miarą probabilistyczną na przemiennej grupie G, a Y jest przestrzenią Banacha. Jeśli funkcja $f : G \to Y$ spełnia warunek*

$$\mu^2(\{(x,y) \in G^2 \ : \ \|f(x+y) - (f(x) + f(y))\| > \varepsilon\}) \leq \delta,$$

to istnieje takie odwzorowanie $h : G \to Y$, że

$$h(x+y) = h(x) + h(y), \quad x, y \in G$$

oraz

$$\mu(\{x \in G \ : \ \|f(x) - h(x)\| > 27\varepsilon\}) \leq \frac{\delta}{1 - 2\delta}.$$

W przypadku grupy dopuszczającej średnią niezmienniczą możemy użyć, na przykład, [26, Theorem 3] oraz [106] i dostać następujący wniosek.

Wniosek 5.2 ([F], Corollary 3.3)**.** *Niech G będzie grupą, $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ będzie prawostronnie niezmienniczą skończenie addytywną miarą probabilistyczną. Załóżmy ponadto, że Y jest przestrzenią Banacha, $\varepsilon \geq 0$, $0 \leq \delta < \frac{1}{12}$. Jeśli funkcja $f\colon G \to Y$ spełnia*

$$\mu^2\big(\{(x,y)\ :\ \|f(x+y)-f(x)-f(y)\| > \varepsilon\}\big) \leq \delta,$$

to dla każdej liczby $\zeta > 0$ istnieje takie odwzorowanie $F : G \to Y$, że

$$F(x+y) = F(x) + F(y), \ \ x, y \in G,$$

oraz

$$\mu\big(\{x\ :\ \|f(x) - F(x)\| > 25\varepsilon\}\big) \leq 4\delta + \zeta.$$

5. Omówienie pozostałego dorobku

Wykaz prac habilitantki niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego napisanych po doktoracie:

[I] Barbara Przebieracz, *On the stability of the translation equation*, Publicationes Mathematicae Debrecen, 75 (2009), 285–298.

[II] Roman Badora, Barbara Przebieracz, Peter Volkmann, *Stability of the Pexider functional equation*, Annales Math. Silesianae 24 (2010), 7–13.

[III] Barbara Przebieracz, *Superstability of some functional equation*, Series Mathematicae Catoviciensis et Debreceniensis, No. 31, (2010), 4 pp., http://www.math.us.edu.pl/smdk.

[IV] Barbara Przebieracz, *Stability of the Baron-Volkmann functional equations*, Math. Inequalities and Applications 14(1) (2011), 193–201.

[V] Barbara Przebieracz, *The stability of the functional equation* $\min\{f(x+y), f(x-y)\} = |f(x)-f(y)|$, Journal of Inequalities and Applications 2011:22 (2011).

[VI] Barbara Przebieracz, *On some Pexider-type functional equations connected with the absolute value of additive functions. Part I*, Bull. Aust. Math. Soc. 85, No. 2 (2012), 191–201.

[VII] Barbara Przebieracz, *On some Pexider-type functional equations connected with the absolute value of additive functions. Part II*, Bull. Aust. Math. Soc. 85, No. 2 (2012), 202–216.

[VIII] Roman Badora, Barbara Przebieracz, Peter Volkmann, *On Tabor groupoids and stability of some functional equations*, Aequationes Math. 87 (2014), 165–171.

[IX] Roman Badora, Barbara Przebieracz, Peter Volkmann, *Stability of generalized Cauchy equations.* Aequationes Math. 89 (1) (2015), 49–56.

[X] Zenon Moszner, Barbara Przebieracz, *Is the dynamical system stable?*. Aequationes Math. 89 (2) (2015), 279–296.

[XI] Barbara Przebieracz, *A proof of the Mazur-Orlicz theorem via the Markov-Kakutani common fixed point theorem, and vice versa*, Fixed Point Theory Appl. 2015, 2015:10, 9 pp.

[XII] Roman Badora, Barbara Przebieracz, Peter Volkmann, *More on Hyers' Theorem*, Journal of Math. Analysis and Applications, 447 (2) (2017), 1116–1125.

[XIII] Barbara Przebieracz, *Recent Developments in the translation equation and its stability*, In: J. Brzdęk, et al. (eds) Developments in Functional Equations and Related Topics. Springer International Publishing, Cham (2017), 215–229.

6. Równania charakteryzujące moduł funkcji addytywnej

Wprowadzenie

W tej części omówię wyniki dotyczące rozwiązań i stabilności następujących równań funkcyjnych:

$$\max\{f(x+y), f(x-y)\} = f(x) + f(y), \tag{6.1}$$

$$\min\{f(x+y), f(x-y)\} = |f(x) - f(y)|, \tag{6.2}$$

$$\max\{f(x+y), f(x-y)\} = f(x)f(y), \tag{6.3}$$

$$(6.4) \qquad \sup\{f(x+\lambda y):\ \lambda\in T\} = f(x)+f(y),$$

$$(6.5) \qquad \inf\{f(x+\lambda y):\ \lambda\in T\} = |f(x)-f(y)|,$$

$$(6.6) \qquad \sup\{f(x+\lambda y):\lambda\in T\} = f(x)f(y),$$

$$(6.7) \qquad \sup\{f(x+l(y)):\ l\in L\} = f(x)f(y),$$

$$(6.8) \qquad \min\{f(x+y),f(x-y)\} = f(x)f(y),$$

$$(6.9) \qquad \max\{f(x+y),f(x-y)\} = g(x)h(y),$$

$$(6.10) \qquad \max\{f(x+y),f(x-y)\} = f(x)g(y)+h(y),$$

$$(6.11) \qquad \max\{f(x+y),f(x-y)\} = f(y)g(x)+h(x).$$

W równaniach (6.1), (6.2), (6.3), (6.8), (6.9), (6.10), (6.11) rzeczywiste funkcje f, g, h określone są na grupie abelowej G; w równaniach (6.4), (6.5) oraz (6.6) rzeczywista funkcja f określona jest na przestrzeni liniowej V (nad $\mathbb{C}$), a T oznacza okrąg jednostkowy w $\mathbb{C}$; w równaniu (6.7) rzeczywista funkcja f określona jest na grupie abelowej G, $L \subset G^G$, $\mathrm{id}, -\mathrm{id} \in L$.

Wkład habilitantki w ustalanie postaci rozwiązań bądź badanie stabilności tych równań znajduje się pracach [III]–[VIII].

• **O równaniu** (6.1)

Jak wykazali A. Simon i P. Volkmann w [103], równanie (6.1) charakteryzuje wartość bezwzględną funkcji addytywnej (inny dowód tego faktu podali T. Kochanek w [65] oraz W. Fechner [25]). Rezultat ten uzyskał również P. Volkmann w [118] bez założenia przemienności grupy G, ale z łagodniejszym założeniem: $f(xyz) = f(yxz)$ dla $x, y, z \in G$. To dodatkowe założenie udało się pominąć I. Toborg w pracy [115].

Dowód stabilności tego równania znajduje się w pracy [52]. Dowód stabilności ogólniejszego równania

$$(6.12) \qquad \max\{f((x\circ y)\circ y); f(x)\} = f(x\circ y)+f(y),$$

gdzie rzeczywista funkcja f określona jest na grupoidzie G z operacją binarną $\circ$ spełniającą warunek

$$(x\circ y)\circ(x\circ y) = (x\circ x)\circ(y\circ y), \quad x, y\in G,$$

i lewostronnym elemencie neutralnym, znajduje się w pracy [38]. Natomiast praca [VIII] poświęcona jest stabilności równania (6.12) przy jeszcze słabszych założeniach o dziedzinie (G jest grupoidem z binarną operacją $\circ$ spełniającą warunek: dla każdych $x, y \in G$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że

$$(x\circ y)^{2^k} = x^{2^k}\circ y^{2^k}, \quad ((x\circ y)\circ y)^{2^k} = (x^{2^k}\circ y^{2^k})\circ y^{2^k},$$

potęgi postaci x^{2^k} definiuje się rekurencyjnie: $x^{2^0} := x$, $x^{2^{k+1}} := x^{2^k} \circ x^{2^k}$).

Ponadto, stabilność równania (6.1) otrzymano w pracy [112] jako wniosek ze stabilności ogólniejszego równania

$$f(x \circ y) \star f(x \diamond y) = f(x \circ y).$$

• **O równaniu** (6.2)

Rozwiązania równania (6.2) pod założeniem, że $G = \mathbb{R}$, a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą podaje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.1 ([52])**.** *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą spełniającą* (6.2)*. Wtedy albo istnieje taka stała $c \geq 0$, że $f(x) = c|x|$, $x \in \mathbb{R}$, albo f jest okresowa z okresem $2p$ i $f(x) = c|x|$ dla $x \in [-p, p]$, z pewną stałą $c > 0$.*

W zasadzie w powyższym twierdzeniu wystarczy założyć ciągłość f choć w jednym punkcie, gdyż to implikuje już ciągłość f na $\mathbb{R}$ ([52]). Także pewne założenia o mierzalności f implikują jej ciągłość, co było badane w pracach [7] i [67].

Ponadto, T. Kochanek zauważył, że każda funkcja f określona na abelowej grupie G postaci $f = g \circ a$, gdzie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem równania (6.2) opisanym w Twierdzeniu 6.1, a $a\colon G \to \mathbb{R}$ jest funkcją addytywną, jest rozwiązaniem równania (6.2).

Artykuł [V] zawiera dowód stabilności równania (6.2) w klasie rzeczywistych funkcji ciągłych na prostej rzeczywistej, tj. następującego twierdzenia:

Twierdzenie 6.2. *Jeśli $\delta \geq 0$ a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągłą funkcją spełniającą*

$$|\min\{f(x+y), f(x-y)\} - |f(x) - f(y)|| \leq \delta, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

to albo f jest ograniczona (i w tym przypadku jest "blisko" rozwiązania $F \equiv 0$ równania (6.2)*) albo istnieje taka stała $c > 0$, że*

$$|f(x) - c|x|| \leq 21\delta, \quad x \in \mathbb{R},$$

tzn. f jest "blisko" rozwiązania $F(x) = c|x|$ równania (6.2)*.*

• **O równaniach** (6.3) **i** (6.7)

Rozwiązania równania (6.3) przy dodatkowym założeniu, że grupa abelowa G jest podzielna przez 6 były przedstawione w [103] (są to funkcje postaci (i) lub (ii) z poniższego twierdzenia), a bez tego założenia w [VI]:

Twierdzenie 6.3. *Niech $f\colon G \to \mathbb{R}$, gdzie G jest grupą abelową. Wtedy f spełnia równanie* (6.3) *wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) $f \equiv 0$

lub

(ii) $f = exp \circ |a|$, *dla pewnej addytywnej funkcji* $a\colon G \to \mathbb{R}$
lub
(iii) *istnieje taka podgrupa* G_0 *grupy* G, *że*

$$x, y \in G \setminus G_0 \Rightarrow (x + y \in G_0 \ \vee x - y \in G_0),$$

oraz

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_0; \\ -1, & x \notin G_0. \end{cases}$$

Superstabilności równania (6.3), a w zasadzie ogólniejszej postaci tego równania, tj. równania (6.7), dowodzę w [III]. Mianowicie, wykorzystując ideę z pracy [5] dowodzę następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.4. *Jeśli funkcja* $f\colon G \to \mathbb{R}$ *spełnia nierówność*

$$|\sup\{f(x + l(y));\ l \in L\} - f(x)f(y)| \leq \varepsilon, \qquad x, y \in G,$$

to albo funkcja f *jest ograniczona albo jest ona rozwiązaniem równania* (6.7).

• **O równaniach** (6.4) **i** (6.5)

Równania (6.4) i (6.5) są analogonami równań, odpowiednio (6.1) i (6.2), dla funkcji określonych na przestrzeniach wektorowych nad $\mathbb{C}$. Okazuje się (patrz [8, Theorem 1]) , że równania (6.4) i (6.5) są równoważne; co więcej, każde z nich charakteryzuje moduł funkcjonału liniowego.

W [IV] badam stabilność równań (6.4) i (6.5):

Twierdzenie 6.5. *Niech* $\delta \geq 0$, *załóżmy, że* $g\colon V \to \mathbb{R}$ *jest przybliżonym rozwiązaniem równania* (6.4), *tzn.*

$$|\sup_{\lambda \in T} g(x + \lambda y) - g(x) - g(y)| \leq \delta, \quad x, y \in V.$$

Wtedy istnieje takie rozwiązanie $f\colon V \to \mathbb{C}$ *równania* (6.4), *że*

$$|f(x) - g(x)| \leq 17\delta, \quad x \in V.$$

Twierdzenie 6.6. *Niech* $\delta \geq 0$, *załóżmy, że* $g\colon V \to \mathbb{R}$ *jest przybliżonym rozwiązaniem równania* (6.5), *tzn.*

$$|\inf_{\lambda \in T} g(x + \lambda y) - |g(x) - g(y)|| \leq \delta, \quad x, y \in V.$$

Wtedy istnieje takie rozwiązanie $f\colon V \to \mathbb{C}$ *równania* (6.5), *że*

$$|f(x) - g(x)| \leq 49\delta, \quad x \in V.$$

• **O równaniu** (6.6)

Rozwiązania równania (6.6) opisałam w [III]:

Twierdzenie 6.7. *Jeżeli* $f\colon V \to \mathbb{R}$ *spełnia równanie* (6.6), *to albo* $f \equiv 0$ *albo istnieje taki funkcjonał liniowy* $\phi\colon V \to \mathbb{C}$, *że* $f(x) = \exp|\phi(x)|$, $x \in V$.

Superstabilność tego równania wynika z Twierdzenia 6.4 ([III, Theorem 1.1]).

• **O równaniu** (6.8)

Poniższy wynik dotyczący postaci rozwiązań równania (6.8) pochodzi z [VI].

Twierdzenie 6.8. *Niech* G *będzie grupą abelową oraz* $f\colon G \to \mathbb{R}$. *Wtedy* f *jest rozwiązaniem równania funkcyjnego* (6.8) *wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednej z następujących postaci:*

1. $f \equiv 0$,

lub

2. $f(x) = \exp(-|a(x)|)$, $x \in G$, *dla pewnej addytywnej funkcji* $a\colon G \to \mathbb{R}$,

lub

3. istnieje podgrupa G_0 *grupy* G *o własności:*

$$x, y \in G \setminus G_0 \;\Rightarrow\; (x + y \in G_0 \wedge x - y \in G_0), \tag{6.13}$$

oraz

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_0, \\ -1, & x \notin G_0, \end{cases}$$

lub

4. istnieje podgrupa G_0 *grupy* G *o własności:*

$$x, y \in G \setminus G_0 \;\Rightarrow\; (x + y \notin G_0 \vee x - y \notin G_0), \tag{6.14}$$

oraz

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_0, \\ 0, & x \notin G_0. \end{cases}$$

• **O równaniu** (6.9)

Jako wniosek z [VII, Theorem 3.1] dostajemy w [VI] postać rozwiązań równania (6.9) na prostej:

Twierdzenie 6.9. *Niech* $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Jeżeli* f *jest ciągła, to*

$$\max\{f(x+y), f(x-y)\} = g(x)h(y) \quad \textit{dla } x, y \in \mathbb{R}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedna z następujących możliwości:

1. $\quad f \equiv 0, \quad g \equiv 0, \quad h$ *− dowolna*;

2. $f \equiv 0, \quad h \equiv 0, \quad g -$ *dowolna;*
3. $f(x) = bce^{a|x-x_0|}, \quad g(x) = be^{a|x-x_0|}, \quad h(x) = ce^{a|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, *gdzie* $a, b, c, x_0 \in \mathbb{R}$, $abc > 0$*;*
4. $f(x) = bce^{ax}, \quad g(x) = be^{ax}, \quad h(x) = ce^{\mathrm{sgn}(bc)|ax|}$, $x \in \mathbb{R}$, *gdzie* $a, b, c \in \mathbb{R}$.

• **O równaniach** (6.10) **i** (6.11)

Inspiracją do prac [VI] oraz [VII] było rozważane w monografii [2] równanie

$$f(x+y) = f(x)g(y) + h(y).$$

Okazuje się, że jego rozwiązania są trojakiego typu: albo "trywialne" ze stałą funkcją f, albo związane z rozwiązaniami równania

$$a(x+y) = a(x) + a(y),$$

albo związane z rozwiązaniami równania

$$e(x+y) = e(x)e(y).$$

Analogicznie rozważam wspólną "pexideryzację" równań (6.1) i (6.3), ale ze względu na niesymetryczną rolę x i y dostaję dwa równania: (6.10) i (6.11). Główny rezultat pracy [VI], to postać rozwiązań równania (6.11). Okazuje się, że oprócz wyników analogicznych do tych z [2], czyli: rozwiązań "trywialnych" ze stałą funkcją f, rozwiązań związanych z równaniem (6.1) oraz rozwiązań związanych z (6.3), niestandardowo w teorii równań funkcyjnych dostajemy jeszcze jeden dodatkowy typ rozwiązań, związany z równaniem (6.8) (i stąd osobne badanie również tego równania).

Twierdzenie 6.10. *Niech* $f, g, h \colon G \to \mathbb{R}$, *gdzie* G *jest grupą abelową. Wtedy* f, g, h *są rozwiązaniami równania* (6.11) *wtedy i tylko wtedy, gdy są jednej z następujących postaci:*
1. $f(x) = b, \quad g -$ *dowolna funkcja,* $\quad h(x) = b(1 - g(x))$, $x \in G$, *gdzie* $b \in \mathbb{R}$*;*
2. $f(x) = c\phi(x) + b, \quad g(x) = \phi(x), \quad h(x) = b(1 - \phi(x))$, $x \in G$, *gdzie* $c, b \in \mathbb{R}$, $c > 0$, *a* $\phi \colon G \to \mathbb{R}$ *jest rozwiązaniem równania* (6.3)*;*
3. $f(x) = c\phi(x) + b, \quad g(x) = \phi(x), \quad h(x) = b(1 - \phi(x))$, $x \in G$, *gdzie* $c, b \in \mathbb{R}$, $c < 0$, *a* $\phi \colon G \to \mathbb{R}$ *jest rozwiązaniem równania* (6.8)*;*
4. $f(x) = \phi(x) + b, \quad g(x) = 1, \quad h(x) = \phi(x)$, $x \in G$, *gdzie* $b \in \mathbb{R}$, *a* $\phi \colon G \to \mathbb{R}$ *jest rozwiązaniem równania* (6.1).

Ogólną postać rozwiązań równania (6.10) wyznaczyłam w [VII] pod dodatkowym założeniem, że funkcje f, g, h są określone na $\mathbb{R}$ i f jest ciągła:

Twierdzenie 6.11. *Załóżmy, że* $f, g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełniają równanie* (6.10)*. Jeżeli* f *jest ciągła, to funkcje* f, g, h *są jednej z następujących postaci:*

1. $f(x) = b$, *g – dowolna funkcja,* $h(x) = b(1 - g(x))$, $x \in \mathbb{R}$, *gdzie* $b \in \mathbb{R}$*;*
2. $f(x) = ce^{a|x-x_0|} + b$, $g(x) = e^{a|x|}$, $h(x) = b(1 - e^{a|x|})$, $x \in \mathbb{R}$, *gdzie* $x_0, b \in \mathbb{R}$, $ac > 0$*;*
3. $f(x) = a|x - x_0| + b$, $g(x) = 1$, $h(x) = a|x|$, $x \in \mathbb{R}$, *gdzie* $b, x_0 \in \mathbb{R}$, $a > 0$*;*
4. $f(x) = ce^{ax} + b$, $g(x) = e^{\mathrm{sgn}(c)|ax|}$, $h(x) = b(1 - e^{\mathrm{sgn}(c)|ax|})$, $x \in \mathbb{R}$, *gdzie* $a, b, c \in \mathbb{R}$*;*
5. $f(x) = ax + b$, $g(x) = 1$, $h(x) = |ax|$, $x \in \mathbb{R}$, *gdzie* $a, b \in \mathbb{R}$.

Na odwrót, jesli f, g, h są jednej z postaci 1-5, to są rozwiązaniem (6.10).

7. Nowe dowody twierdzeń Mazura–Orlicza oraz Markowa–Kakutaniego

7.1 Wprowadzenie

Wiele znanych i ważnych twierdzeń w matematyce posiada dużo różnych dowodów. Tak też jest z Twierdzeniem Markowa–Kakutaniego oraz z Twierdzeniem Mazura–Orlicza. W pracy [XI] pokazuję bezpośredni związek między tymi twierdzeniami, dowodząc jednego z nich przy użyciu drugiego.

7.2 Twierdzenie Mazura–Orlicza i jego dowody

Przypomnijmy wypowiedź Twierdzenia Mazura–Orlicza:

Twierdzenie 7.1. *(S. Mazur & W. Orlicz* [80]*) Niech X będzie przestrzenią liniową, T niepustym zbiorem, $x\colon T \to X$, $\beta\colon T \to \mathbb{R}$, a $p\colon X \to \mathbb{R}$ funkcjonałem podliniowym. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *istnieje taki liniowy funkcjonał $a\colon X \to \mathbb{R}$, że*

$$a(y) \le p(y), \quad y \in X,$$

$$\beta(t) \le a(x(t)), \quad t \in T;$$

(ii) *dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$ i $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0, \infty)$,*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta(t_i) \le p\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x(t_i)\right).$$

Przypomnijmy również odpowiednik twierdzenia Mazura–Orlicza dla grup abelowych:

Twierdzenie 7.2. *Niech G będzie grupą abelową, T niepustym zbiorem, $x\colon T \to G$, $\beta\colon T \to \mathbb{R}$, a $p\colon G \to \mathbb{R}$ podaddytywna. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *istnieje taka funkcja addytywna $a\colon G \to \mathbb{R}$, że*

$$a(y) \le p(y), \quad y \in G,$$

$$\beta(t) \le a(x(t)), \quad t \in T;$$

(ii) *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *i* $t_1, \ldots, t_n \in T$,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta(t_i) \leq p\left(\sum_{i=1}^{n} x(t_i)\right).$$

W obydwu wersjach implikacja (i)⇒ (ii) jest oczywista.

Oprócz długiego i dość trudnego dowodu z [80], jest wiele różnych dowodów twierdzenia Mazura–Orlicza i jego uogólnień. Można je znaleźć na przykład w [15], [19], [63], [74], [92], [95] (chyba najbardziej elementarny i elegancki), [102] i [104].

Dowód zaprezentowany w pracy [XI] opierający się na Twierdzeniu Markowa–Kakutaniego pozwala udowodnić zarówno Twierdzenie 7.1 jak i 7.2 w analogiczny sposób. Nie wymaga też użycia żadnych innych zaawansowanych twierdzeń[27].

7.3 Twierdzenie Markowa–Kakutaniego i jego dowody

Przypomnijmy (jeszcze raz) Twierdzenie Markowa–Kakutaniego.

Twierdzenie 7.3. *(A. Markow* [79]*, S. Kakutani* [58]*) Niech* X *będzie (lokalnie wypukłą*[28]*) przestrzenią liniowo-topologiczną,* $\mathcal{C}$ *niepustym, wypukłym, zwartym podzbiorem* X*,* $\mathcal{F}$ *komutującą rodziną ciągłych, afinicznych odwzorowań zbioru* $\mathcal{C}$ *w siebie. Wtedy istnieje taki* $x \in \mathcal{C}$*, że* $f(x) = x$ *dla każdego* $f \in \mathcal{F}$*.*

Twierdzenia Markowa–Kakutaniego można dowodzić korzystając z różnych wniosków z Twierdzenia Hahna–Banacha. W [119], Twierdzenie Markowa–Kakutaniego było udowodnione przez twierdzenie o oddzielaniu (w lokalnie wypukłych przestrzeniach zwarte, wypukłe i niepuste rozłączne zbiory mogą być silnie rozdzielone). Także z twierdzenia o oddzielaniu (lokalnie wypukła przestrzeń rozdziela punkty) oraz z już wspomnanego [40, Theorem 3.2.2], Twierdzenie Markowa–Kakutaniego jest dowodzone w [40]. Jeszcze inny dowód Twierdzenia Markowa–Kakutaniego, także oparty na twierdzeniu o oddzielaniu, można znaleźć w [98].

[27] Może się wydawać, że również w [40] podobnie pokazuje się Twierdzenie Mazura–Orlicza bazując na Twierdzeniu Markowa–Kakutaniego. Aby uwypuklić różnicę pomiędzy dowodem z [40] a moim dowodem z [XI] omówię krótko dowód z [40]. Najpierw w [40, Lemma 4.5.1] (powtarzając rezultat z [58]) wniosek z Twierdzenia Markowa–Kakutaniego był użyty, aby udowodnić twierdzenie Hahna-Banacha. Jednak, aby udowodnić twierdzenie Mazura-Orlicza autorzy [40] wykorzystują jeszcze pewien lemat o podpieraniu funkcjonałów podliniowych funkcjonałami liniowymi oraz ważny rezultat z teorii nieskończonych układów nierówności [40, Theorem 3.2.2]

[28] Założenie lokalnej wypukłości nie jest konieczne, aczkolwiek wiele znanych dowodów tego twierdzenia ogranicza się do takich przestrzeni.

Wspomnę jeszcze, że dowód Twierdzenia Markowa–Kakutaniego z pracy [58] można znaleźć w monografii [99], a moim zdaniem najbardziej elementarny i najbardziej elegancki należy do J. Jachymskiego [50].

Przedstawiony w [XI] dowód twierdzenia Markowa–Kakutaniego bezpośrednio opiera się na twierdzeniu Mazura–Orlicza i jest prowadzony tak, jak w [40, 79, 98, 119], w lokalnie wypukłych przestrzeniach liniowo-topologicznych.

7.4 Szkic dowodu (pochodzącego z [XI]**) implikacji** (ii) $\Rightarrow$ (i) **Twierdzenia Mazura–Orlicza**

• W przypadku Twierdzenia 7.2 rozważamy $\mathbb{R}^G$ z topologią Tichonowa oraz odwzorowania $F_y \colon \mathbb{R}^G \to \mathbb{R}^G$, $y \in G$, określone wzorem

$$F_y f(z) = f(z+y) - f(y), \quad z \in G, f \in \mathbb{R}^G.$$

Odwzorowania F_y są ciągłe i afiniczne oraz

$$F_y \circ F_z = F_{y+z}, \quad y, z \in G,$$

a więc rodzina $\{F_y; y \in G\}$ jest komutująca. Wybierzmy $t_0 \in T$ i niech $s := p(x(t_0)) - \beta(t_0)$. Połóżmy

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \{f \in \mathbb{R}^G : &- p(-y) \le f(y) \le p(y) + s,\ y \in G, \\ &- p(-y) \le F_z f(y) \le p(y),\ y, z \in G, \\ &\beta(t) \le f(x(t)), t \in T, \\ &\beta(t) \le F_y f(x(t)), t \in T, y \in G\}. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Markowa–Kakutaniego wnosimy, że istnieje $a \in \mathcal{C}$, które jest punktem stałym wszystkich F_y, dla $y \in G$. To oznacza, że

$$a(y+z) = a(y) + a(z), \quad y, z \in G,$$

$$\beta(t) \le a(x(t)), \quad t \in T$$

oraz

$$a(y) \le p(y) + s, \quad y \in G.$$

Z ostatniej nierówności można wywnioskować, że

$$a(y) \le p(y), \quad y \in G.$$

• W przypadku Twierdzenia 7.1 podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 7.2 otrzymujemy istnienie stosownej funkcji addytywnej a, o której łatwo można pokazać, że jest liniowa.

7.5 Szkic pierwszego kroku dowodu (pochodzącego z [XI]**) twierdzenia Markowa–Kakutaniego**

Często dowód Twierdzenia Markowa–Kakutaniego podzielony jest na dwa kroki. Najpierw pokazuje się twierdzenie[29]:

Twierdzenie 7.4. *Niech X będzie lokalnie wypukłą przestrzenią liniowo-topologiczną, $\mathcal{C} \subset X$ jest zbiorem niepustym, wypukłym i zwartym, a $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ jest ciągła i afiniczna. Wtedy F ma punkt stały.*

W dowodzie można użyć Twierdzenia 7.1 lub Twierdzenia 7.2. Połóżmy

$$B = \{F(x) - x : x \in \mathcal{C}\}.$$

Przypuśćmy, że $0 \notin B$. Zbiór B jest niepusty, wypukły i zwarty. Niech $U \subset X \setminus B$ będzie wypukłym i zbalansowanym otoczeniem zera. Oczywiście U jest zbiorem pochłaniającym. Niech $p\colon X \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem Minkowskiego zbioru U, tzn.

$$p(x) = \inf\{r > 0; x \in rU\}, \quad x \in X.$$

Funkcjonał p jest podliniowy oraz $\{x \in X; p(x) < 1\} \subset U$. Ze zwartości zbioru $\mathcal{C}$ wnosimy, że istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że $\mathcal{C} \subset NU$, skąd

$$p(x) \leq N, \quad x \in \mathcal{C}. \tag{7.1}$$

Niech $T = \mathcal{C}$ oraz $\beta(t) = 1$, $x(t) = F(t) - t$ dla $t \in T$. Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$ oraz $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in (0, \infty)$, mamy

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta(t_i) \leq p\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x(t_i)\right).$$

Zatem warunek (ii) Twierdzenia Mazura–Orlicza jest spełniony. Wnosimy stąd, że istnieje funkcjonał liniowy $a\colon X \to \mathbb{R}$, spełniający

$$a(x) \leq p(x), \quad x \in X$$

oraz

$$1 = \beta(t) \leq a(x(t)) = a(F(t) - t), \quad t \in \mathcal{C}.$$

Dla $x \in \mathcal{C}$ i $n \in \mathbb{N}$ przeliczamy, że

$$a(F^n(x)) \geq a(x) + n, \quad x \in \mathcal{C}, n \in \mathbb{N},$$

co wobec (7.1), wymusza, że

$$N \geq p(F^n(x)) \geq a(F^n(x)) \geq a(x) + n, \quad x \in \mathcal{C}, n \in \mathbb{N}.$$

[29] Drugi krok (czyli dokończenie dowodu Twierdzenia Markowa-Kakutaniego w oparciu o Twierdzenie 7.4) jaki pokazałam w pracy [XI], jest “standardowy”, taki sam można znaleźć w [40], [119], [98], [50], dlatego nie będę go już tu powtarzać.

Otrzymujemy sprzeczność, a więc $0 \in B$, co od razu daje istnienie punktu stałego dla odwzorowania F.

8. Omówienie dorobku dotyczącego stabilności równania translacji i "układów dynamicznych", niewchodzącego w skład "osiągnięcia naukowego"

8.1 Wprowadzenie

Jednym z zainteresowań naukowych Z. Mosznera jest badanie związków między różnymi podejściami do problemu stabilności równań funkcyjnych (por. [83], [86], [88], [89], [90]), a także pewnymi paradoksami związanymi z tym tematem ([78], [90]). W pracy [X] zbadaliśmy wspólnie, czy układy równań funkcyjnych, które definiują układ dynamiczny, bądź równanie translacji w pewnych klasach (takich, w których rozwiązanie równania translacji jest układem dynamicznym) są stabilne (tu również były wzięte pod uwagę różne definicje stabliności, większość z nich przytoczę poniżej). Wyniki z tej pracy zostały jeszcze uzupełnione w pracach [89] i [90].

8.2 Układy dynamiczne

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie niezdegenerowanym przedziałem oraz niech $F\colon \mathbb{R} \times I \to I$. Przez F^0 rozumiemy funkcję $F(0, \cdot)$.

Definicja 8.1. Ciągłą funkcję $F\colon \mathbb{R} \times I \to I$ nazywamy *układem dynamicznym*, gdy spełnione jest równanie translacji:

$$F(t, F(s,x)) = F(s+t, x), \quad s,t \in \mathbb{R},\ x \in I; \tag{8.1}$$

oraz

$$F(0,x) = x, \quad x \in I. \tag{8.2}$$

Okazuje się, że warunek (8.2) w powyższej definicji układu dynamicznego może zostać zastąpiony przez którykolwiek z poniższych warunków:

(1) funkcja F^0 jest różniczkowalna oraz

$$(F^0)'(x) = 1, \quad x \in I. \tag{8.3}$$

(2) F^0 jest ściśle rosnąca.

(3) F nie jest stała oraz funkcja F^0 jest różniczkowalna.

(4) F jest surjekcją.

W pracy [X] piszemy więc dla uproszczenia o układach dynamicznych w sensie jednej z pięciu (równoważnych) definicji.

8.3 Różne rodzaje stabilności

Dla uproszczenia wypowiedzi poniższych definicji wprowadźmy etykiety:

$$|H(s,H(t,x)) - H(t+s,x)| \le \delta, \quad s,t \in \mathbb{R},\, x \in I; \tag{8.4}$$

$$|H(0,x) - x| \le \delta, \quad x \in I; \tag{8.5}$$

$$|(H^0)'(x) - 1| \le \delta, \quad x \in I. \tag{8.6}$$

Niech ponadto

$$\mathcal{H} := \{H\colon \mathbb{R}\times I \to I:\ H \text{ ciągła}\};$$

$\mathcal{F}_j := \{F\colon \mathbb{R}\times I \to I:\ F \text{ jest ciągłym rozwiązaniem układu: (8.1) \& (8.j)}\}$ dla $j = 2,3$;

$\mathcal{H}_k := \{H\colon \mathbb{R}\times I \to I:\ H \text{ jest ciągłym rozwiązaniem układu: (8.4) \& (8.k)}\}$ dla $k = 5,6$.

Mówimy, że układ równań funkcyjnych: (8.1) & (8.j), dla $j = 2,3$, jest:

- *stabilny w sensie Hyersa-Ulama*, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\,\forall_{H\in\mathcal{H}}\ \Big[\text{jeśli } H\in\mathcal{H}_{j+3},\ \text{to } \exists_{F\in\mathcal{F}_j}\ |H(s,x)-F(s,x)| \le \varepsilon \text{ dla } s\in\mathbb{R},\, x\in I\Big]\,;$$

- *b-stabilny*, gdy

$$\forall_{\delta>0}\,\forall_{H\in\mathcal{H}}\ \Big[\text{jeśli } H\in\mathcal{H}_{j+3},\ \text{to } \exists_{\varepsilon>0}\,\exists_{F\in\mathcal{F}_j}\ |H(s,x)-F(s,x)| \le \varepsilon \text{ dla } s\in\mathbb{R},\, x\in I\Big]\,;$$

- *jednostajnie b-stabilny*, gdy

$$\forall_{\delta>0}\,\exists_{\varepsilon>0}\,\forall_{H\in\mathcal{H}}\ \Big[\text{jeśli } H\in\mathcal{H}_{j+3},\ \text{to } \exists_{F\in\mathcal{F}_j}\ |H(s,x)-F(s,x)| \le \varepsilon \text{ dla } s\in\mathbb{R},\, x\in I\Big]\,;$$

- *odwrotnie stabilny*, gdy

$$\forall_{\delta>0}\,\exists_{\varepsilon>0}\,\forall_{H\in\mathcal{H}}\ \Big[\text{jeśli } \exists_{F\in\mathcal{F}_j}\ |H(s,x)-F(s,x)| \le \varepsilon \text{ dla } s\in\mathbb{R},\, x\in I,\ \text{to } H\in\mathcal{H}_{j+3}\Big]\,;$$

- *odwrotnie b-stabilny*, gdy

$$\forall_{H\in\mathcal{H}}\ \Big[\text{jeśli } \exists_{\varepsilon>0}\,\exists_{F\in\mathcal{F}_j}\ |H(s,x)-F(s,x)| \le \varepsilon \text{ dla } s\in\mathbb{R},\, x\in I,\ \text{to } \exists_{\delta>0}\, H\in\mathcal{H}_{j+3}\Big]\,;$$

- *odwrotnie jednostajnie b-stabilny*, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\,\forall_{H\in\mathcal{H}}\ \Big[\text{jeśli } \exists_{F\in\mathcal{F}_j}\ |H(s,x)-F(s,x)| \le \varepsilon \text{ dla } s\in\mathbb{R},\, x\in I,\ \text{to } H\in\mathcal{H}_{j+3}\Big]\,.$$

Niżej sformułujemy definicje różnych typów stabilności równania translacji w klasie funkcji F, dla których F^0 jest ściśle rosnąca. Zamieniając wyrażenie "F^0 jest ściśle rosnąca" na odpowiednio "F nie jest stała i $(F^0)'$ istnieje" bądź "F jest surjekcją" w poniższych definicjach, dostaniemy definicje stabilności równania translacji odpowiednio w klasie funkcji F takich, że F nie jest stała i $(F^0)'$ istnieje, bądź w klasie surjekcji. Tu również, dla skrócenia wypowiedzi, wprowadzimy pewne oznaczenia. Niech

$$\mathcal{K} := \{F\colon \mathbb{R}\times I \to I:\ F \text{ ciągła},\ F^0 \ \text{ jest ściśle rosnąca}\},$$

$$\mathcal{K}_1 := \{F \in \mathcal{K}: \ F \text{ jest ciągłym rozwiązaniem (8.1)}\},$$

$$\mathcal{K}_4 := \{H\colon \mathbb{R} \times I \to I: \ H \text{ jest ciągłym rozwiązaniem (8.4)}\}.$$

Mówimy, że równanie translacji (8.1) jest

- *stabilne w sensie Hyersa-Ulama w klasie* $\mathcal{K}$, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\,\forall_{H\in\mathcal{K}}\ [\text{jeśli } H \in \mathcal{K}_4, \text{ to } \exists_{F\in\mathcal{K}_1}\,|H(s,x)-F(s,x)| \le \varepsilon \text{ dla } s\in\mathbb{R},\, x\in I]\,;$$

- *b-stabilne w klasie* $\mathcal{K}$, gdy

$$\forall_{\delta>0}\,\forall_{H\in\mathcal{K}}\ [\text{jeśli } H \in \mathcal{K}_4, \text{ to } \exists_{\varepsilon>0}\,\exists_{F\in\mathcal{K}_1}\,|H(s,x)-F(s,x)| \le \varepsilon \text{ dla } s\in\mathbb{R},\, x\in I]\,;$$

- *jednostajnie b-stabilne w klasie* $\mathcal{K}$, gdy

$$\forall_{\delta>0}\,\exists_{\varepsilon>0}\,\forall_{H\in\mathcal{K}}\ [\text{jeśli } H \in \mathcal{K}_4, \text{ to } \exists_{F\in\mathcal{K}_1}\,|H(s,x)-F(s,x)| \le \varepsilon \text{ dla } s\in\mathbb{R},\, x\in I]\,;$$

- *odwrotnie stabilny w klasie* $\mathcal{K}$, gdy

$$\forall_{\delta>0}\,\exists_{\varepsilon>0}\,\forall_{H\in\mathcal{K}}\ [\text{jeśli } \exists_{F\in\mathcal{K}_1}\,|H(s,x)-F(s,x)| \le \varepsilon \text{ dla } s\in\mathbb{R},\, x\in I, \text{ to } H \in \mathcal{K}_4]\,;$$

- *odwrotnie b-stabilny w klasie* $\mathcal{K}$, gdy

$$\forall_{H\in\mathcal{K}}\ [\text{jeśli } \exists_{\varepsilon>0}\,\exists_{F\in\mathcal{K}_1}\,|H(s,x)-F(s,x)| \le \varepsilon \text{ dla } s\in\mathbb{R},\, x\in I, \text{ to } \exists_{\delta>0}\, H \in \mathcal{K}_4]\,;$$

- *odwrotnie jednostajnie b-stabilny w klasie* $\mathcal{K}$, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\,\forall_{H\in\mathcal{K}}\ [\text{jeśli } \exists_{F\in\mathcal{K}_1}\,|H(s,x)-F(s,x)| \le \varepsilon \text{ dla } s\in\mathbb{R},\, x\in I, \text{ to } H \in \mathcal{K}_4]\,.$$

8.4 Podsumowanie wyników uzyskanych w pracy [X]

Rezultaty badania tych różnych typów stabilności (w pracy rozważaliśmy jeszcze kilka innych) układów dynamicznych zebrane są w poniższej tabelce. Jak się okazało, stabilność układu dynamicznego, zależy od ograniczoności przedziału I i od tego, którą z pięciu równoważnych definicji układu dynamicznego bierzemy pod uwagę.

<table>
<tr><th></th><th>def.1
((8.1) &
$F(0,x)=x$)</th><th>def .2
((8.1) &
$(F^0)'(x)=1$)</th><th>def. 3
((8.1) &
$F(0,\cdot)$ ściśle rosnąca)</th><th>def. 4
((8.1) &
$(F^0)'$ istnieje)</th><th>def. 5
((8.1) &
F surjekcja)</th></tr>
<tr><td>stabilność w sensie Hyersa-Ulama</td><td>tylko dla $I=\mathbb{R}$</td><td>dla każdego I</td><td colspan="2">dla żadnego I</td><td>dla każdego I</td></tr>
<tr><td>b-stabilność</td><td rowspan="2">tylko dla I ograniczonych lub $I=\mathbb{R}$</td><td colspan="3" rowspan="2">tylko dla I ograniczonych</td><td rowspan="2">dla każdego I</td></tr>
<tr><td>jednostajna b-stabilność</td></tr>
<tr><td>odwrotna stabilność</td><td colspan="5">dla żadnego I</td></tr>
<tr><td>odwrotna b-stabilność</td><td rowspan="2">tylko dla I ograniczonych</td><td rowspan="2">dla żadnego I</td><td colspan="3" rowspan="2">tylko dla I ograniczonych</td></tr>
<tr><td>odwrotna jednostajna b-stabilność</td></tr>
</table>

8.5 Stabilność równania translacji w klasie funkcji ciągłych $F\colon (0,\infty)\times I \to I$

Na zakończenie tego rozdziału wspomnę jeszcze o wynikach z pracy [I]. Badałam tam stabilność równania translacji w klasie funkcji ciągłych przekształacających $(0,\infty)\times I$ w I, gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem. Nie udało się uzyskać pełnej odpowiedzi na pytanie analogiczne do postawionego przez S. Ulama. Dlatego praca zawiera tylko pewne częściowe rezultaty. W [I, Theorem 3.1] podaję warunki dodatkowe, pod którymi przybliżona półgrupa iteracji jest blisko pewnej półgrupy iteracji. Natomiast [I, Theorem 3.2] pokazuje, że bez tych dodatkowych warunków można δ-półgrupę iteracji $H\colon (0,\infty)\times I \to I$ przybliżać (z dokładnością ε) półgrupą iteracji na zbiorze $\operatorname{cl} H((0,\infty)\times I)\setminus L$, gdzie $|L|\le \eta$ (δ dobieramy do dowolnych ε i $\eta>0$).

9. Stabilność równania Cauchy'ego i Pexidera

9.1 Wyniki z pracy [II]

W pracy [II] udowodniona została stabilność równania Pexidera

$$F(xy)=G(x)+H(y), \quad x,y\in S,$$

przy bardzo słabym założeniu o dziedzinie funkcji[30]. Mianowicie, zakładamy, że S jest grupoidem Tabora, tzn. zbiorem z określonym działaniem $\cdot$, w którym spełniony jest warunek

$$\forall_{x,y\in S}\,\exists_{k\in\mathbb{N}}\,(xy)^{2^k}=x^{2^k}y^{2^k}.$$

[30]Stabilność równania Pexidera badana była też w innych pracach: [91], [39], [68], ale tam założenia o dziedzinie były silniejsze, natomiast o przeciwdziedzinie słabsze niż w pracy [II].

Potęgi postaci x^{2^k} zdefiniowane są rekurencynie:

$$x^{2^0} = x, \quad x^{2^{k+1}} = x^{2^k} x^{2^k}.$$

Twierdzenie 9.1. *Niech S będzie grupoidem Tabora z obustronnym elementem neuralnym. Niech V będzie symetrycznym, ograniczonym, idealnie wypukłym*[31] *podzbiorem przestrzeni Banacha E. Załóżmy, że $f, g, h\colon S \to E$ spełniają warunek*

$$f(xy) - g(x) - h(y) \in V, \quad x, y \in S.$$

Wtedy istnieją takie funkcje $F, G, H\colon S \to E$, że spełnione jest równanie Pexidera

$$F(xy) = G(x) + H(y), \quad x, y \in S,$$

oraz

$$F(x) - f(x) \in 3V,\ G(x) - g(x) \in 4V,\ H(x) - h(x) \in 4V, \quad x \in S.$$

9.2 Wyniki z pracy [VIII]

W pracy [VIII] zamieściliśmy kilka rezultatów dotyczących grupoidów Tabora. Między innymi: warunki wystarczające na to, aby półgrupa z elementem idempotentnym była grupoidem Tabora, przykład grupy, która nie jest grupoidem Tabora oraz przykład nietrywialnego grupoidu Tabora[32]. Ponadto, w pracy tej odnotowany został również następujący wniosek z wcześniejszej pracy P. Volkmanna:

Twierdzenie 9.2. *Niech S będzie grupoidem Tabora, V ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha E, a $f\colon S \to E$ spełnia*

$$f(xy) - f(x) - f(y) \in V, \quad x, y \in S.$$

Wtedy istnieje jedyna taka funkcja addytywna $a\colon S \to E$, że

$$a(x) - f(x) \in V, \quad x \in S.$$

Udowodniona została następująca charakteryzacja ograniczonych perturbacji odwzorowań addytywnych:

Twierdzenie 9.3. *Niech S będzie grupoidem Tabora, A ograniczonym i domkniętym podzbiorem przestrzeni Banacha E, $f\colon S \to E$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

[31] Podzbiór V przestrzeni Banacha E jest idealnie wypukły [75], gdy dla każdego ograniczonego ciągu $d_1, d_2, \ldots \in V$ i każdego takiego ciągu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \geq 0$, że $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = 1$, mamy $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k d_k \in V$.

[32] Inne wyniki dotyczące grupoidów Tabora znaleźć można w pracy [114].

(P) $f = a + r$, *gdzie* $a\colon S \to E$ *jest addytywna,* $r(x) \in A$ *dla* $x \in S$*;*
(Q) istnieją ograniczone zbiory $B, C \subset E$*, dla których*

$$f(xy) - f(x) - f(y) \in B, \quad x, y \in S,$$

$$2^k f(x) - f(x^{2^k}) \in 2^k A + C, \quad x \in S, k \in \mathbb{N}.$$

Praca ta zawiera także wynik dotyczący stabilności równania funkcyjnego (6.12), o czym pisałam już w rozdziale szóstym.

9.3 Wyniki z pracy [IX]

W pracy [IX] dowodzimy poniższego twierdzenia o stabilności następującej wersji równania Pexidera:

$$f(xy) = g(x)h(y) + k(y),$$

dla funkcji określonych na półgrupie dopuszczającej średnią niezmienniczą.

Twierdzenie 9.4. *Niech* S *będzie półgrupą dopuszczającą średnią niezmienniczą z elementem neutralnym,* $f, g, h, k\colon S \to \mathbb{C}$, $\varepsilon \geq 0$,

$$|f(xy) - g(x)h(y) - k(y)| \leq \varepsilon, \quad x, y \in S.$$

Wtedy istnieją takie funkcje $F, G, H, K\colon S \to \mathbb{C}$ *będące rozwiązaniem równania:*

$$F(xy) = G(x)H(y) + K(y), \quad x, y \in S,$$

że funkcje $f - F$, $g - G$, $h - H$ *oraz* $k - K$ *są ograniczone.*

W dowodzie używamy m.in. drugiej po ciągach Hyersa najbardziej popularnej metody dowodzenia stabilności równań funkcyjnych, a mianowicie średniej niezmienniczej.

9.4 Wyniki z pracy [XII]

W pracy [XII] dowodzimy następującej abstrakcyjnej wersji twierdzenia Hyersa:

Twierdzenie 9.5. *Niech* Y *będzie grupą abelową jednoznacznie podzielną przez* 2*, niech* $B \subset Y$ *będzie takim* $\frac{1}{2}$*-wypukłym zbiorem, że*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n}(B - B) = \{0\}.$$

Załóżmy, że dla każdego ciągu $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *punktów grupy* Y *prawdziwa jest następująca implikacja:*
jeśli

$$y_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} B \subseteq y_n + \frac{1}{2^n} B, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

to

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}(y_n+\frac{1}{2^n}B)\neq\emptyset.$$

Wtedy dla dowolnej abelowej półgrupy $(S,+)$ *i dowolnej funkcji* $f\colon S\to Y$ *spełniającej*

$$f(s+t)-f(s)-f(t)\in B,\quad s,t\in S,$$

istnieje jedyna addytywna funkcja $a\colon S\to Y$*, dla której*

$$a(s)-f(s)\in B,\quad s\in S.$$

Jej motywacją była chęć wyjaśnienia, dlaczego w twierdzeniach "typu Hyersa" pojawia się założenie zupełności przeciwdziedziny Y, bądź zwartości "zbioru błędów" B. Wydaje się, że jest to konsekwencja własności przekrojowych (Twierdzenie Cantora dla przestrzeni zupełnych i własność skończonego przekroju rodziny zbiorów zwartych). Dwa wnioski, dla odwzorowań o wartościach w grupach topologicznych – z założeniem ciągowej zupełności Y, bądź zwartości B – uogólniają wiele wcześniejszych rezultatów (całą serię prac z wersjami twierdzenia Hyersa dla odwzorowań o wartościach w pewnych szczególnych przestrzeniach zupełnych – na przykład "2-Banach spaces" [93], zupełnych niearchimedesowych [81], "β-Banach spaces" [97] – bądź wersję twierdzenia Hyersa ze zwartym zbiorem błędów B [XII, Thorem 1.2], [4]).

Przy założeniu zupełności Y mamy:

Wniosek 9.1. *Niech* $B\neq\emptyset$ *będzie* $\frac{1}{2}$*-wypukłym, domkniętym i ograniczonym podzbiorem przemiennej, jednoznacznie podzielnej przez* 2*, ciągowo zupełnej topologicznej grupy Hausdorffa* Y*, nie zawierającej elementów skończonego rzędu. Wtedy dla dowolnej przemiennej półgrupy* $(S,+)$ *i dowolnej funkcji* $f\colon S\to Y$ *spełniającej*

$$f(s+t)-f(s)-f(t)\in B,\quad s,t\in S,$$

istnieje dokładnie jedna taka funkcja addytywna $a\colon S\to Y$*, że*

$$a(s)-f(s)\in B,\quad s\in S.$$

Natomiast w przypadku zwartości zbioru błędów B mamy:

Wniosek 9.2. *Niech* $B\neq\emptyset$ *będzie* $\frac{1}{2}$*-wypukłym i zwartym podzbiorem przemiennej, jednoznacznie podzielnej przez* 2 *topologicznej grupy* Y*. Załóżmy ponadto, że odwzorowanie*

$$Y\ni x\mapsto\frac{1}{2}x\in Y$$

jest ciągłe oraz

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{2^n}(B-B)=\{0\}.$$

Wtedy dla dowolnej przemiennej półgrupy $(S,+)$ *i dowolnej funkcji* $f\colon S\to Y$ *spełniającej*

$$f(s+t)-f(s)-f(t)\in B,\quad s,t\in S,$$

istnieje dokładnie jedna taka funkcja addytywna $a\colon S\to Y$*, że*

$$a(s)-f(s)\in B,\quad s\in S.$$

Wykaz prac zawierających wyniki z doktoratu:

[XIV] Barbara Przebieracz, *Approximately iterable functions*, Proceedings of ECIT06, Grazer Math. Ber., Bericht Nr 351 (2007), 139–157.

[XV] Barbara Przebieracz, *The closure of the set of iterable functions*, Aequationes Math. 75 (2008), 239–250.

[XVI] Barbara Przebieracz, *Weak almost iterability*, Real Analysis Exchange 34(2), (2008/2009), 359–376.

10. Wyniki z doktoratu

W pracy [120] M.C. Zdun scharakteryzował ciągłe przekształcenia odcinka $X \subset \mathbb{R}$, które są zanurzalne w ciągłe półgrupy iteracji, tzn. takie ciągłe funkcje $f\colon X \to X$, dla których istnieje ciągłe rozwiązanie $F\colon (0,\infty) \times X \to X$ równania translacji

$$F(s, F(t,x)) = F(t+s, x), \quad s,t \in (0,\infty),\ x \in X,$$

spełniające

$$f(x) = F(1,x), \quad x \in X.$$

Funkcje zanurzalne w ciągłe półgrupy iteracji nazywamy *iterowalnymi*. W odpowiedzi na problem postawiony przez E. Jen w monografii Gy. Targońskiego [113, problem (3.1.12)], W. Jarczyk zaproponował następującą definicję funkcji w pewnym sensie bliskich iterowalnym:

Ciągłą funkcję $f\colon X \to X$ nazywamy *prawie iterowalną*, gdy istnieje taka iterowalna funkcja $g\colon X \to X$, że

$$\lim_{n\to\infty} (f^n(x) - g^n(x)) = 0, \quad x \in X, \tag{10.1}$$

i zbieżność ta jest jednostajna na każdej składowej zbioru[33] $[a_f, b_f] \setminus \mathrm{Per}(f,1)$.

W [51] można znaleźć pewną charakteryzację prawie iterowalności.

W pracy [XVI] badałam pewne uogólnienia prawie iterowalności, a mianowicie funkcje spełniające warunek (10.1) bez dodatkowego założenia o zbieżności jednostajnej występującego w powyższej definicji prawie iterowalności (takie funkcje nazwałam *słabo prawie iterowalnymi*), bądź spełniające warunek (10.1) dla x z pewnego "dużego zbioru" w sensie miary lub kategorii. Charakteryzację funkcji słabo prawie iterowalnych zawiera następujące twierdzenie:

[33] Przypomnę, że $\mathrm{Per}(f,1)$ oznacza zbiór punktów stałych funkcji f, a $\mathrm{Per}(f,2)$ zbiór punktów okresowych rzędu 2 funkcji f, tj.

$$\mathrm{Per}(f,1) = \{x \in X : f(x) = x\}, \quad \mathrm{Per}(f,2) = \{x \in X : f^2(x) = x,\ f(x) \neq x\},$$

a a_f i b_f oznaczają najmniejszy, odpowiednio największy, punkt stały funkcji f.

Twierdzenie 10.1. *Ciągła funkcja* $f\colon X \to X$ *jest słabo prawie iterowalna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{Per}(f,2) = \emptyset$ *oraz istnieją takie punkty* $a_i, b_i \in \mathrm{Per}(f,1)$, $i \in I$, *że* $[a_f, b_f] = \bigcup_{i\in I}[a_i, b_i]$ *oraz dla każdego* $i \in I$ *zachodzi jedna z możliwości:*

(i) $a_i = b_i$;

(ii) $(a_i, b_i) \cap \mathrm{Per}(f,1) = \emptyset$, $f([a_i, b_i]) = [a_i, b_i]$;

(iii) $(a_i, b_i) \cap \mathrm{Per}(f,1) = \{c_i\}$, $x < f(x) < b_i$, *dla* $x \in (a_i, c_i)$, $a_i < f(x) < x$ *dla* $x \in (c_i, b_i)$;

(iv) $(a_i, b_i) \cap \mathrm{Per}(f,1) = \emptyset$, $b_i = b_f$, $f(x) > x$ *dla* $x \in (a_i, b_i)$;

(v) $(a_i, b_i) \cap \mathrm{Per}(f,1) = \emptyset$, $a_i = a_f$, $f(x) < x$ *dla* $x \in (a_i, b_i)$.

W pracy [XIV] zaproponowałam inną definicję funkcji "bliskich" iterowalnym. Główny wynik tej pracy zawiera następujące twierdzenie:

Twierdzenie 10.2. *Ciągła funkcja* $f\colon X \to X$ *spełnia warunek*

(W) *dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje taka funkcja iterowalna* $g\colon X \to X$ *i liczba naturalna* n_0, *że* $|f^n(x) - g^n(x)| < \varepsilon$ *dla* $n \geq n_0$, $x \in X$,

wtedy i tylko wtedy, gdy

(i) *zacieśnienie* $f|_{[a_f,b_f]}$ *jest funkcją rosnącą*

i zachodzi jeden z poniższych warunków: (ii)–(iv)

(ii) $\mathrm{Per}(f,2) = \emptyset$,

(iii) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X) = [a_f, b_f]$,

(iv) *dla każdego* $x \in X$ *ciąg* $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *jest zbieżny.*

Poniższe warunki równoważne na to, by funkcja należała do domknięcia zbioru funkcji iterowalnych pochodzą z pracy [XV].

Twierdzenie 10.3. *Niech* $f\colon X \to X$ *będzie funkcją ciągłą. Następujące warunki są parami równoważne:*

(1) *Istnieją takie punkty* $x_1, x_2 \in X$, *że*

$$x_1 \leq f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \leq x_2, \quad x \in X,$$

i zacieśnienie $f|_{[x_1,x_2]}$ *jest funkcją rosnącą.*

(2) *Dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje taka iterowalna funkcja* $g\colon X \to X$, *że*

$$|f^n(x) - g^n(x)| < \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}, x \in X.$$

(3) *Dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje taka iterowalna funkcja* $g\colon X \to X$, *że* $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ *dla* $x \in X$.

(4) *Dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje taka* ε*-półgrupa iteracji*[34] $F\colon (0,\infty) \times X \to X$*, że*

$$|f^n(x) - F(n,x)| < \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N},\ x \in X.$$

(5) *Dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje taka* ε*-półgrupa iteracji* $F\colon (0,\infty) \times X \to X$*, że*

$$|f(x) - F(1,x)| < \varepsilon, \quad x \in X.$$

[34] Mówimy, że funkcja ciągła $F\colon (0,\infty) \times X \to X$ jest ε-półgrupą iteracji, gdy spełnia nierówność

$$|F(s, F(t,x)) - F(t+s, x)| \le \varepsilon, \quad \text{dla } x \in X,\ s,t \in (0,\infty).$$

Literatura

[1] J. Aczél, Lectures on functional equations and their applications, Vol. 19 Academic Press, New York-London 1966, xx+510 pp.

[2] J. Aczél, J. Dhombres, Functional Equations in Several Variables, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 31 (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).

[3] T. Aoki, *On the stability of the linear transformation in Banach spaces*, J. Math. Soc. Japan 2, (1950) 64–66.

[4] R. Badora, R.Ger, Zs. Páles, *Additive selections and the stability of the Cauchy functional equation.* ANZIAM J. 44 (2003) no. 3, 323–337.

[5] J. A. Baker, *The stability of the cosine equation*, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 411–416.

[6] J. A. Baker, *The stability of certain functional equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), no. 3, 729–732.

[7] K. Baron, *On Baire measurable solutions of some functional equations*, Central European J. Math. 7 (2009), 804–808.

[8] K. Baron, P. Volkmann, *Characterization of the absolute value of complex linear functionals by functional equations*, Series Mathematicae Catoviciensis et Debreceniensis, Nr. 28 (2006), 10 pp. http://www.math.us.edu.pl/smdk/lv28.pdf

[9] N. G. de Bruijn, *On almost additive functions*, Colloq. Math. 15 (1966), 59–63.

[10] M. Burger, N. Ozawa, A. Thom, *On Ulam stability*, Israel J. Math. 193 (2013), no. 1, 109–129.

[11] F. Cabello Sánchez, *Nearly convex functions, perturbations of norms and K-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), 753–758.

[12] F. Cabello Sánchez, J. M. F. Castillo, *Banach space techniques underpinning a theory for nearly additive mappings*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 404 (2002), 73 pp.

[13] L. Cădariu, V. Radu, *On the stability of the Cauchy functional equation: a fixed point approach*, Grazer Math. Ber. 346 (2004), 43–52.

[14] J. Chudziak, *Approximate dynamical systems on interval*, Appl. Math. Lett. 25 (2012) no. 3, 532–537.

[15] W. Chojnacki, *Sur un théorème de Day, un théorème de Mazur-Orlicz et une généralisation de quelques théorèmes de Silverman*, Colloq. Math. 50 (1986) no. 2, 257–262.

[16] W. Chojnacki, *Erratum: "On a theorem of Day, a Mazur-Orlicz theorem and a generalization of some theorems of Silverman*, Colloq. Math. 63 (1992) no. 1, 139.

[17] P. W. Cholewa, *Remarks on the stability of functional equations*, Aequationes Math. 27 (1984), no. 1-2, 76–86.

[18] K. Ciepliński, *Applications of fixed point theorems to the Hyers-Ulam stability of functional equations—a survey*, Ann. Funct. Anal. 3 (2012), no. 1, 151–164.

[19] N. Dăneţ, R.-M. Dăneţ, *Existence and extensions of positive linear operators*, Positivity 13 (2009), 89–106.

[20] R. DeMarr, *Common fixed points for isotone mappings*, Colloq. Math. 13(1964) 45–48.

[21] M. M. Day, *Amenable semigroups*, Ill. J. Math. 1 (1957), 509–544.

[22] P. Erdős, *Problem P310*, Colloq. Math. 7 (1960), 311.

[23] I. Farah, *Approximate homomorphisms*, Combinatorica 18 (1998), 335—348.

[24] I. Farah, *Approximate homomorphisms. II. Group homomorphisms*, Combinatorica 20 (2000), no. 1, 47–60.

[25] W. Fechner, *Functional characterization of a sharpening of the triangle inequality*, Math. Inequal. Appl. 13 (2010), no. 3, 571–578.

[26] G. L. Forti, *The stability of homomorphisms and amenability with applications to functional equations*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 57(1987), 215–226.

[27] G. L. Forti, 18. Remark. In Report of the twenty-seventh International Symposium on Functional Equations. Aequationes Math. 39 (1990), 309–310.

[28] G. L. Forti, *Hyers-Ulam stability of functional equations in several variables*, Aequationes Math. 50 (1995), no. 1-2, 143–190.

[29] G. L. Forti, J. Schwaiger, *Stability of homomorphisms and completeness*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 11(6) (1989), 215–220 .

[30] W. Förg-Rob, K. Nikodem, Zs. Páles, *Separation by monotonic functions*, Math. Pannon. 7 (1996), 191–196.

[31] Z. Gajda, *On stability of the Cauchy equation on semigroups*, Aequationes Math. 36 (1988), 76–79.

[32] R. Ger, *Note on almost additive functions*, Aequationes Math. 17 (1978), 73–76.

[33] R. Ger, *Almost approximately additive mappings*, In: General Inequalities 3 (Oberwolfach 1981), 263—276, Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Stuttgart, 1983.

[34] R. Ger, *Superstability is not natural*, In: Report of the twenty-sixth International Symposium on Functional Equations. Aequationes Math. 37 (1989), 68.

[35] R. Ger, *Superstability is not natural*, Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie 159 (1993), 109–123.

[36] R. Ger, *A survey of recent results on stability of functional equations*, Proceedings of the 4th International Conference on Functional Equations and Inequalities, Pedagogical University in Cracow (1994), 5–36.

[37] R. Ger, P. Šemrl, *The stability of the exponential equation*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), no. 3, 779–787.

[38] A. Gillányi, K. Nagatou, P. Volkmann, *Stability of a functional equation coming from the characterization of the absolute value of additive functions*, Ann. Funct. Anal. 1 (2010), no. 2, 1–6.

[39] E. Głowacki , Z. Kominek, *On stability of the Pexider equation on semigroups*, TH. M. Rassias & J. Tabor (eds.), Stability of Mappings of Hyers-Ulam Type, Hadronic Press, Palm Harbor, Florida 34682-1577, USA. (1994) 111–116.

[40] A. Granas, J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2003. xvi+690 pp.

[41] P. M. Gruber, *Stability of isometries*, Trans. Amer. Math. Soc. 245 (1978), 263–277.

[42] D.H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 27 (1941), 222–224.

[43] D. H. Hyers, G. Isac and Th. M. Rassias, Stability of Functional Equations in Several Variables. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 34. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998. vi+313 pp.

[44] D. H. Hyers, S. M. Ulam, *Approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 3, (1952), 821–828.

[45] W. Jabłoński, *On the stability of the homogeneous equation*, Publ. Math. Debrecen 55 (1999), no. 1-2, 33–45.

[46] W. Jabłoński, *Stability of the Pexider-type homogeneous equation*, Demonstratio Math. 32 (1999), no. 4, 759–766.

[47] W. Jabłoński, *Stability of homogeneity almost everywhere*, Acta Math. Hungar. 117 (2007), no. 3, 219–229.

[48] W. Jabłoński, L. Reich, *Stability of the Translation Equation in Rings of Formal Power Series and Partial Extensibility of One-Parameter Groups of Truncated Formal Power Series*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II 215 (2006), 127–137 (2007) . Sitzungsber. Abt. II (2006) 215: 127–137.

[49] W. Jabłoński, J. Schwaiger, *Stability of the homogeneity and completeness*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II 214(2005), 111–132 (2006).

[50] J. Jachymski, *Another proof of the Markov-Kakutani theorem, and an extension*, Math. Japon. 47 (1998), no. 1, 19–20.

[51] W. Jarczyk, *Almost iterable functions*, Aequationes Math., 42(2-3) (1991), 202–219.

[52] W. Jarczyk, P. Volkmann, *On functional equations in connection with the absolute value of additive functions*, Series Mathematicae Catoviciensis et Debreceniensis, Nr. 32 (2010), 11 pp. http://www.math.us.edu.pl/smdk/JarczykVolk.pdf

[53] K. Jarosz, Perturbations of Banach algebras. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1120. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1985.

[54] B. E. Johnson, *Approximately multiplicative functionals*, J. London Math. Soc. (2) 34 (1986), 489–510.

[55] B. E. Johnson, *Approximately multiplicative maps between Banach algebras*, J. London Math. Soc. 37 (1988), 294–31.

[56] S.-M. Jung, *On the superstability of the functional equation* $f(x^y) = yf(x)$, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 67 (1997), 315–322.

[57] W. B. Jurkat, *On Cauchy's functional equation*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 683–686.

[58] S. Kakutani, *Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets*, Proc. Imperial Acad. Japan 14 (1938), 242–245.

[59] S. Kakutani, *Fixed-point theorems concerning bicompact convex sets*, Proc. Imperial Acad. Japan 14 (1938), 27–31.

[60] N. J. Kalton, J. W. Roberts, *Uniformly exhaustive submeasures and nearly additive set functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 278 (1983), 803–816.

[61] N. J. Kalton, N. T. Peck, J. W. Roberts, An F-space sampler, Lecture Notes Series 89, London Mathematical Society, Cambridge University, 1984.

[62] N. Kalton, *Quasi-Banach spaces*, in: Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2, 1099–1130, North-Holland, Amsterdam 2003 (editors W.B. Johnson and J. Lindenstrauss).

[63] R. Kaufmann, *Interpolation by additive functions*, Studia Math. 27 (1966), 269–272.

[64] D. Kazhdan, *On ε-representations*, Israel J. Math. 43 (1982), 315–323.

[65] T. Kochanek, *On a composite functional equation fulfilled by modulus of an additive function*, Aequationes Math. 80 (2010), No. 1, 155–172.

[66] T. Kochanek, *Stability of vector measures and twisted sums of Banach spaces*, J. Funct. Anal. 264 (2013), 2416–2456.

[67] T. Kochanek, M. Lewicki, *On measurable solutions of a general functional equation on topological groups*, Publ. Math. 78, No. 3-4, (2011) 527–533.

[68] Z. Kominek, *On Hyers-Ulam stability of the Pexider equation*, Demonstratio Math. 37 (2004), 373–376.

[69] Z. Kominek, J. Matkowski, *On stability of the homogeneity condition*, Results in Math. 27 (1995), 373–380.

[70] Z. Kominek, J. Mrowiec, *Nonstability results in the theory of convex functions*, C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. 28 (2006), no. 1, 17–23.

[71] W. Kubiś, *A sandwich theorem for convexity preserving maps*, Tatra Mt. Math. Publ. 24 (2002), 125-131.

[72] M. Laczkovich, *The local stability of convexity, affinity and of the Jensen equation*, Aequationes Math. 58 (1999), no. 1-2, 135–142.

[73] M. Laczkovich, R. Paulin, *Stability constants in linear spaces*, Constr. Approx. 34 (2011), 89-106.

[74] M. Landsberg, W. Schirotzek, *Mazur-Orlicz type theorems with some applications*, Math. Nachr. 79 (1977), 331–341.

[75] E. A. Lifšic, *Ideal'no vypuklye množestva*, Funkcional'. Analiz Priložen. 4 (1970), 76–77.

[76] T.-Ch. Lim, *On the largest common fixed point of a commuting family of isotone maps*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 2005, suppl., 621–623.

[77] A. Mach, Z. Moszner, *On stability of the translation equation in some classes of functions*, Aequationes Math. 72(2006), 191–197.

[78] A. Mach, Z. Moszner, *Unstable (stable) system of stable (unstable) functional equations*, Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math. 9 (2010), 43–47.

[79] A. Markov, *Quelques théorèmes sur ensembles abéliens*, C.R. (Doklady) Acad. Scie. URSS, N.S. 1 (1936), 311–313.

[80] S. Mazur, W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires (II)*, Studia Math. 13 (1953), 137–179.

[81] M.S. Moslehian, Th.M. Rassias, *Stability of functional equations in non-Archimedean spaces*, Appl. Anal. Discrete Math. 1 (2007), 325-–334.

[82] Z. Moszner, *The translation equation and its application*, Demonstratio Math., 6 (1973), 309–327.

[83] Z. Moszner, *Sur la définition de Hyers de la stabilité de l'équation fonctionnelle*, (French) [*On Hyers' definition of the stability of a functional equation*] Opuscula Math. No. 3, 47–57 (1987).

[84] Z. Moszner, *General theory of the translation equation*, Aequationes Math. 50 (1995), 17–37.

[85] Z. Moszner, *Les équations et les inégalites liées à l'équation de translation*, Opuscula Math. 19 (1999), 19–43.

[86] Z. Moszner, *On the stability of functional equations*, Aequationes Math. 77 (2009), no. 1–2, 33–88.

[87] Z. Moszner, Równania funkcyjne w matematyce szkolnej i nie tylko, Wydawnictwo Naukowe Novum, Płock, 2011.

[88] Z. Moszner, *On the inverse stability of functional equations. Recent developments in functional equations and inequalities*, Banach Center Publ., 99, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, (2013), 111–121.

[89] Z. Moszner, *On the normal stability of functional equations*, Ann. Math. Silesianae 30 (2016), 111–128.

[90] Z. Moszner, *Stability has many names*, Aequationes Math. 90 (2016), 983–999.

[91] K. Nikodem, *The stability of the Pexider equation*, Ann. Math. Sil. 5 (1991), 91–93.

[92] K. Nikodem, Zs. Páles, Sz. Wąsowicz, *Abstract separation theorems of Rodé type and their applications*, Ann. Polon. Math. 72 (1999) no. 3, 207–217.

[93] W. G. Park, *Approximate additive mappings in 2-Banach spaces and related topics*, J. Math. Anal. Appl., 376(1) (2011), 193—202.

[94] G. Pólya, G. Szegö, Problems and theorems in analysis, Vol. I, Part One, Ch. 3, Problem 99. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 193. Springer- Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972.

[95] V. Ptak, *On a theorem of Mazur and Orlicz*, Studia Math. 15 (1956), 365–366.

[96] V. Radu, *The fixed point alternative and the stability of functional equations*, Fixed Point Theory, 4(1), (2003), 91–96.

[97] J. M. Rassias and H.-M. Kim, *Generalized Hyers-Ulam stability for general additive functional equations in quasi-β-normed spaces*, J. Math. Anal. Appl., 356(1) (2009), 302—309.

[98] M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional Analysis, Academic Press, New York-London, 1972. xvii+325 pp.

[99] W. Rudin, Functional Analysis. Second edition, International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991. xviii+424 pp.

[100] A. I. Shtern, *Quasirepresentations of amenable groups: results, errors, and hopes*, Russ. J. Math. Phys. 20 (2013), 239–253.

[101] S. Sibirsky, Introduction to topological dynamics, Leyden, Noorhoff, (1975).

[102] R. Sikorski, *On a theorem of Mazur and Orlicz*, Studia Math. 13 (1953), 180–182.

[103] A. Simon (Chaljub-Simon) i P. Volkmann, *Caractérisation du module d'une fonction additive à l'aide d'une équation fonctionnelle*, Aequationes Math. 47 (1994), 60–68.

[104] S. Simons, *Extended and sandwich versions of the Hahn-Banach theorem*, J. Math. Anal. Appl. 21 (1968), 112–122.

[105] L. Székelyhidi, *Note on a stability theorem*, Canad. Math. Bull. 25 (1982), 500–501.

[106] L. Székelyhidi, *Remark 17.* In: The Twenty-Second International Symposium on Functional Equations, December 16 - December 22, 1984, Oberwolfah, Germany, Report of Meeting, Aequationes Math. 29 (1985), 95–96.

[107] L. Székelyhidi, *Note on Hyers' theorem*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 8 (1986). 127–129.

[108] L. Székelyhidi, *The stability of homogeneous functions*, J. Univ. Kuwait Sci. 20 (1993), no. 2, 159–163.

[109] L. Székelyhidi, *Ulam's problem, Hyers's solution—and to where they led*, Functional equations and inequalities, 259–285, Math. Appl., 518, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[110] Ja. Tabor, *Proper families and almost additive functions*, Aequationes Math. 63 (2002), 18–25.

[111] Ja. Tabor, Jó. Tabor, *Homogeneity is superstable*, Publ. Math. Debrecen (1994), no. 1-2, 123–130.

[112] S.-E. Takahasi, M. Tsukada, T. Miura, H. Takagi, K. Tanahashi, *Ulam type stability problems for alternative homomorphisms*, J. Inequal. Appl. 2014, 2014:228, 13 pp.

[113] Gy. Targoński, New Directions and Open Problems in Iteration Theory, Forschungszentrum Graz, Ber. Math.-Stat. Sekt., 229, Graz, 1984.

[114] I. Toborg, *Tabor groups with finiteness conditions*, Aequationes Math., 90(4), (2016), 699–704.

[115] I. Toborg, *On the functional equation* $f(x) + f(y) = \max\{f(xy), f(xy^{-1})\}$ *on groups*, Arch. Math. 109 (2017), 215–221.

[116] T. Trif, *On the superstability of certain functional equations*, Demonstratio Math. 35 (2002), no. 4, 813–820.

[117] S. M. Ulam, A collection of mathematical problems. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 8 Interscience Publishers, New York-London 1960 xiii+150 pp.

[118] P. Volkmann, *Charakterisierung des Betrages reellwertiger additiver Funktionen auf Gruppen*, KIT-open (2017), 4pp.

[119] D. Werner, *A proof of the Markov-Kakutani fixed point theorem via the Hahn-Banach theorem.* Extr. Math. 8, No.1, (1993), 37–38.

[120] M. C. Zdun, *Continuous and Differentiable Iteration Semigroups*, Pr. Nauk. Uniw. Śl. Katow., 308, Wydawn. Uniw. Śląskiego, Katowice, 1979.

Barbara
Przebieracz