Recenzja

dorobku naukowego i działalności doktora Adama Woryny
w związku z postępowaniem o nadanie mu stopnia doktora habilitowanego

Doktor Adam Woryna prowadzi badania w zakresie teorii grup. Zajmuje się głównie podgrupami grupy automorfizmów zbioru słów nad danym alfabetem (także zmiennym w czasie), w szczególności podgrupami zdefiniowanymi przez automaty.

Stany automatu przetwornika - automatu Mealy'ego - definiują permutacje zbioru słów. Grupy generowane przez takie permutacje nazywamy grupami automatowymi. Pojęcie to wprowadzone zostało przez Glushkova w roku 1968 w związku z problemem Burnside'a istnienia nieskończonej grupy torsyjnej skończenie generowanej. Grupę taką wskazał Aleshin w 1972 r. Ważna grupa Grigorchuka, która jest grupą o wzroście pośrednim, średniowalną, ale nie elementarnie średniowalną - może być także określona jako grupa automatowa.

Jest to ważny krąg zagadnień algebraicznych i przykładów związanych z hipotezami o wzroście grup, problemami rozstrzygalności, czy też pojęciem średniowalności wprowadzonym przez von Neumanna.

Grupa Grigorchuka jest nieskończoną 2-grupą określoną przez automat mający 5 stanów. Grigorchuk w 1985 pokazał, że nie istnieje 2-stanowy automat nad p-literowym alfabetem, który generuje nieskończoną p-grupę dla $p \geq 3$. Niedawno habilitant wskazał automat 2-stanowy generujący grupę, w którą można zanurzyć dowolną skończoną p-grupę. Wynik ten referował w Kijowie w 2016 r. i na Uniwersytecie Genewskim w 2017 r.

Zbiór słów nad danym alfabetem można utożsamić z nieskończonym lokalnie skończonym drzewem z korzeniem. Drzewo takie jest regularne, tj. każdy wierzchołek ma taką samą liczbę potomków.

Habilitant zajmuje się sytuacją ogólniejszą - rozważa słowa nad alfabetem zmiennym w czasie - wtedy liczba potomków wierzchołka może zależeć od poziomu, na którym on się znajduje. Podobnie, rozważa się automaty przetworniki nad zmiennym alfabetem $X = (X_i)$. Grupa automorfizmów języka X^* jest grupą proskończoną (tj. granicą systemu odwrotnego grup skończonych) i może być także opisana jako nieskończenie iterowany splot grup.

Dla dwóch grup permutacji (G, X) i (H, Y) zbiorów X i Y splot oznaczany $G \wr_X H$ można określić jako grupę permutacji zbioru $X \times Y$, który wyobrażamy sobie jako dwupoziomowe drzewo z korzeniem, w którym zbiorem potomków korzenia jest X, zaś zbiorem potomków dowolnego $x \in X$ jest $\{x\} \times Y$. W skład grupy splotowej wchodzą wszystkie automorfizmy tego drzewa, które działają jak G na X i jak H na zbiorach potomków każdego $x \in X$ z osobna. Konstrukcję tę można iterować. Grupa automorfizmów $Aut(X^*)$ jest nieskończenie iterowanym splotem pełnych grup permutacji poszczególnych alfabetów X_i.

W pracach [Bhattacharjee, *Israel J. Math.* 1994], [Quick, *Int. J. Alg. Comp.* 2006], [Detomi,Luchcini, *Forum Math.* 2013], [Bondarenko, *Arch. Math.* 2015] badano następujące zagadnienie: weźmy ciąg (G_i) podgrup grup permutacji alfabetów X_i i rozważmy splot tego ciągu. Co można powiedzieć o minimalnej liczbie topologicznych generatorów tej grupy? Tego typu problemy stanowią jedną z głównych motywacji badań habilitanta.

Na osiągnięcie badawcze *Automaty przetworniki a topologiczne generowanie splotów grup* (które będę nazywał rozprawą) składa się 8 prac opublikowanych w bardzo dobrych czasopismach: *Communications in Algebra, Archiv der Mathematik, Forum Mathematicum, Journal of Algebra, Journal of Pure and Applied Algebra.* We wszystkich przypadkach dr Woryna jest jedynym autorem. Wyniki badań habilitant przedstawia w obszernym, precyzyjnie

S.K.

napisanym autoreferacie zawierającym, poza niezbędnymi pojęciami oraz sformułowaniami twierdzeń, także elementy głównych dowodów oraz wyniki innych autorów pozwalające zrozumieć lepiej motywacje habilitanta i zobaczyć jego dorobek w szerszym kontekście.

W pracach [H1]-[H4] (numeracja wg. Autoreferatu) badane są sploty $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$ w przypadku gdy A_i są skończonymi grupami abelowymi. Prace [H1] i [H4] dotyczą nieskończonego splotu grup cyklicznych. W pierwszej z nich dowodzi się, poprzez wskazanie zbioru topologicznych generatorów, że ranga topologiczna tego splotu jest o 1 większa od rangi topologicznej produktu grup $A_2, A_3, \ldots$ (bez A_1). W drugiej autor konstruuje automat (nad zmiennym alfabetem) realizujący tę grupę. W pracy [H2] uzyskana jest formuła opisująca liczbę topologicznych generatorów $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$ w przypadku skończonych grup abelowych A_i. W obszernej, skomplikowanej technicznie pracy [H3] wskazuje się m.in. rozkład topologiczny iterowanego splotu grup abelowych (w przypadku gdy ranga toplogiczna produktu kartezjańskiego tych grup jest skończona) na dwie izomorficzne abelowe grupy wolne (tj. przekrój tych tych grup jest trywialny, a ich suma mnogościowa generuje gęstą podgrupę splotu). Konstrukcje opisane w tej pracy pozwoliły wykazać też, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje automat A nad zmiennym alfabetem X taki, że ranga grupy G generowanej przez ten automat jest o n większa od rangi domknięcia grupy G (w grupie $Aut(X^*)$). W omawianej pracy habilitant wprowadza pojęcia automorfizmu jednorodnego i pęknięcia automorfizmu, posługuje się także tzw. metodą rekursji splotowej.

Metodę tę uogólnia na dowolne automaty zmienne w czasie w pracy [H6]. Jednym z głównych wyników tej pracy jest uniwersalna konstrukcja automatu (prawie minimalnego) dla splotu $\wr_{i=1}^{\infty} H_i$ nieabelowych grup prostych. Skonstruowany jest 3-stanowy automat taki, że automorfizmy wyznaczone przez dwa stany tego automatu generują topologicznie splot $\wr_{i=1}^{\infty} H_i$. Badane są własności grupy wyznaczonej przez ten automat, w szczególności wykazano, że grupa ta jest niemal finitarna, nie ma skończonej prezentacji i nie zawiera nieabelowych podgrup wolnych. Jeżeli ciąg (H_i) jest stały, to dodatkowo grupa ta jest średniowalna i ma wzrost wykładniczy. W dowodzie głównego wyniku wykorzystany jest opis prymitywnych grup permutacji [Jones, *J. Group Th.* 2002].

W pracy [H5] skonstruowany jest minimalny automat Mealy'ego realizujący nieskończoną potęgę splotową grupy doskonałej, w szczególności wynik ten może być zastosowany do grupy alternującej co najmniej 5-elementowego zbioru. Praca [H7] zawiera charakteryzację ciągów (G_i), w przypadku których splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ jest generowany przez automat. Charakteryzacja jest dość prosta: ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg rang grup G_i jest ograniczony oraz ranga topologiczna produktu abelianizacji grup G_i jest skończona. Konstrukcja automatu jest jednak znów skomplikowana.

W pracy [H8] badana jest średniowalność grup generowanych przez automorfizmy jednorodne X^*. Problem jest inspirowany wynikiem Juschenki, Nekrashevycha i de la Salle [*Invent. Math.* (2016)], którzy m.in. podali pewien warunek na średniowalność grup automorfizmów ograniczonych. W szczególności, jeśli podgrupa G grupy $Aut(X^*)$ jest niemal finitarna, to jest średniowalna.

Omówione prace tworzą spójny tematycznie ciąg. Są skomplikowane technicznie. Dowody - nietrywialne - mają na ogół charakter kombinatoryczny, polegają przeważnie na wskazaniu *explicite* pewnych obiektów: automatów, automorfizmów itp. Najbardziej interesujące wydają mi się wyniki dotyczące średniowalności z [H8] oraz badanie algebraicznych własności grupy wyznaczonej automat w [H6]. Doceniam elegancję wyników [H1], [H2], [H4] i pomysłowość technicznych koncepcji takich jak pęknięcie ([H3]).

Badania, których wyniki złożyły się na rozprawę zostały zapoczątkowane w doktoracie. Rozprawę doktorską nt. *Automaty Mealy'ego zmienne w czasie i grupy generowane przez te automaty* habilitant obronił w roku 2005, promotorem był prof. dr hab. Witalij Suszczański. Wówczas autor rozważał automaty zmienne w czasie w dodatkowym jeszcze znaczeniu - również zbiór stanów był zmienny. W rozprawie habilitacyjnej zmienność dotyczy tylko alfabetów.

Rozprawa ma wysoką wartość naukową, zawiera wiele nietrywialnych wyników dotyczących struktury i własności podgrup grupy automorfizmów $Aut(X^*)$. Skonstruowane przykłady i wypracowane techniki mają duży potencjał i stanowią dobry punkt wyjścia do dalszych badań nad ważnymi zagadnieniami teorii grup.

Także prace [P1]-[P7] - dorobek uzyskany po doktoracie niewchodzący w skład rozprawy - dotyczą tematyki bardzo bliskiej tematyce rozprawy. Warto zaznaczyć, że także ten cykl publikacji zawiera wiele nietrywialnych rezultatów - cały dorobek habilitanta wskazuje na jego bardzo dużą aktywność naukową. Autor m.in. wskazuje realizacje automatowe dla różnych grup. Uzyskuje przy okazji algorytmy rozwiązujące problem słów dla uogólnionej grupy diedralnej. Rozważa także pewne klasy automatów: automaty rewersyjne i birewersyjne - jest to uogólnienie pojęć znanych dla automatów Mealy'ego na automaty nad zmiennym alfabetem. W szczególności podaje klasyfikację grup generowanych przez 2-stanowe automaty birewersyjne.

O dociekliwości, pomysłowości i naukowej ciekawości habilitanta świadczą jego prace spoza teorii grup: mamy tu wyniki dotyczące zagadnień o charakterze popularnonaukowym, a także, zainspirowane prowadzonymi zajęciami dydaktycznymi - związane z teorią kodowania.

Dorobek dydaktyczny habilitanta jest zdeterminowany jego miejscem zatrudnienia. Podkreślić należy fakt, że dr. Woryna opiekował się Kołem Naukowym Matematyków, pracował ze studentami w ramach Indywidualnego Planu Studiów, wielokrotnie brał udział w seminariach i konferencjach o charakterze popularnonaukowym i naukowym. To przekonuje mnie, że jest on dobrym dydaktykiem, który może sprawować opiekę naukową nad studentami na różnych etapach edukacji.

Słabością dorobku habilitanta jest, mimo związków z ważnymi zagadnieniami teorii grup, stosunkowo wąska tematyka i zasób metod. Związane jest to z dość ograniczoną współpracą z innymi matematykami. Zwraca uwagę fakt, że dr Woryna jest jedynym autorem wszystkich swoich publikacji. Prace dr. Woryny są zacytowane przez 11 innych autorów.

Dr Woryna regularnie uczestniczy w międzynarodowych konferencjach naukowych *Groups and Their Actions* organizowanych cyklicznie w Będlewie, wygłaszał referat na konferencji *Groups and actions: geometry and dynamics* w Kijowie w 2016 r. a także na seminarium *Groupes et Géométrie* na Uniwersytecie Genewskim w 2017 r.

Należałoby życzyć habilitantowi rozszerzenia zakresu badań i - co równie ważne - intensyfikacji współpracy naukowej z innymi badaczami. Biorąc pod uwagę jego potencjał naukowy, a także nawiązane kontakty z prof. Grigorchukiem i prof. Bartholdim, uważam, że jest to możliwe. Sprzyjać temu będzie planowany dłuższy wyjazd badawczy do Texas A&M University na zaproszenie prof. Grigorchuka oraz wyjazd badawczy do Uniwersytetu ENS w Paryżu w celu współpracy naukowej z prof. Bartholdim.

Wyjazd ten będzie elementem realizacji grantu Miniatura *Konstrukcja grup rozgałęzionych oparta o automaty 2-stanowe* przyznanego habilitantowi przez NCN.

Podsumowując stwierdzam, że dr Woryna ma niewątpliwie duży potencjał naukowy, jest dociekliwym badaczem, a jego osiągnięcia związane są z ważnymi zagadnieniami algebraicznymi i stanowią istotny wkład w rozwój teorii grup.

Mimo sformułowanych wyżej uwag krytycznych, osiągnięcie naukowe dr. Adama Woryny pt. *Automaty przetworniki a topologiczne generowanie splotów grup* wraz z pozostałym dorobkiem spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane w przewodach habilitacyjnych.

Popieram wniosek o nadanie dr. Adamowi Worynie stopnia doktora habilitowanego.

Toruń, dnia 20 kwietnia 2018 r.

Stanisław Kasjan

S. Kasjan