Bielsko–Biała, 24 stycznia 2016

**dr hab. Szymon Wąsowicz, prof. ATH**

Katedra Matematyki
Akademia Techniczno–Humanistyczna
ul. Willowa 2, 43–309 Bielsko–Biała

# Recenzja rozprawy doktorskiej Pani mgr Wandy Niemyskiej

zatytułowanej

***O równaniach funkcyjnych związanych z rozdzielnością implikacji rozmytych***

Przedstawiona do recenzji rozprawa liczy 128 stron i składa się ze wstępu, pięciu rozdziałów oraz spisu literatury, w którym wymieniono 82 pozycje. Imponujące to dane mając na uwadze, że rozprawy doktorskie tworzy się raczej na początku kariery naukowej. Główną myślą dysertacji jest wykazanie interakcji między logiką a równaniami funkcyjnymi. Rozdzielność implikacji rozmytych znajduje bowiem zastosowanie w logice rozmytej. Prowadzi mianowicie do otrzymania interesujących równań funkcyjnych. Otrzymane ich rozwiązania można zastosować w zagadnieniach związanych ze zmniejszaniem złożoności obliczeniowej działania reguł rozmytych we wnioskowaniu przybliżonym opartym na metodzie CRI.

## Omówienie wyników rozprawy

Trzystronicowy wstęp wprowadza rozdzielność działań dwuargumentowych z odniesieniami do klasycznego rachunku zdań oraz teorii mnogości. Krótko prezentuje też tematykę rozprawy.

Rozdział pierwszy zaznajamia czytelnika z podstawowymi pojęciami logiki rozmytej. Wartościowania dwuargumentowych spójników logicznych można utożsamić z funkcjami odwzorowującymi produkt $\{0,1\} \times \{0,1\}$ w zbiór $\{0,1\}$. Ponieważ w teorii zbiorów rozmytych funkcje charakterystyczne zastępuje się funkcjami przyjmującymi wartości w przedziale $[0,1]$, powstaje problem przedłużenia wartościowań na produkt $[0,1] \times [0,1]$. Istnieje wiele tego rodzaju przedłużeń. Np. uogólnieniem klasycznej koniunkcji może być zarówno funkcja $f(x,y) = xy$, jak i funkcja $g(x,y) = \min\{x,y\}$ itp. W rozprawie podejście do zbiorów rozmytych jest jednak ogólniejsze — zamiast przedziału $[0,1]$ rozważa się kratę. W kratach zupełnych uogólnieniami koniunkcji są *t–normy*, a uogólnieniami alternatywy są *t–konormy*. Wspólnym podejściem do obu tych pojęć są tzw. *uninormy*. Dość szeroko omawia się znane z prac różnych autorów, a potrzebne w rozprawie własności tych pojęć. Następnie wprowadza się kluczowe dla dysertacji pojęcie *implikacji rozmytej*. Omawia się $(S,N)$*–implikacje* (realizujące uogólnienie znanej tautologii $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$), $R$*–implikacje*, $QL$*–implikacje* oraz $f$*–implikacje*. Rozdział kończy omówienie mechanizmu wnioskowania przybliżonego opartego na logice rozmytej. Zdanie *jeśli temperatura powietrza jest wysoka, to ciśnienie atmosferyczne jest niskie* pozbawione jest matematycznej precyzji. Jednak tego typu wypowiedzi można badać metodami logiki rozmytej. Stosując rozdzielność implikacji rozmytych można znacznie zmniejszyć złożoność obliczeniową algorytmów wnioskowania rozmytego opartych na *metodzie CRI* (*Compositional Rule of Inference*). Idące w tym kierunku badania dalekie są od kompletności, na co doktorantka wskazuje cytując dwa znamienne zdania z prac Dicka i Kandela oraz Mendela i Lianga. Omawiany rozdział jest bardzo obszerny jak na jego charakter: zajmuje ok. 13% rozprawy. Bardzo dobrze służy to jednak zrozumieniu jej zasadniczych treści.

Rozdział drugi przynosi obszerny przegląd historii badań równań funkcyjnych związanych z rozdzielnością implikacji rozmytych. Rozważmy następującą tautologię klasycznego rachunku zdań:

$$\big((p \wedge q) \implies r\big) \iff \big((p \implies r) \vee (q \implies r)\big).$$

Przechodząc do logiki rozmytej zastąpmy koniunkcję $t$–normą $T$, alternatywę $t$–konormą $S$ a implikację — implikacją rozmytą $I$. W ten sposób otrzymujemy równanie funkcyjne (w rozprawie oznaczone jako (D3); rozważa się jednak cztery równania tego typu)

$$I\big(T(x, y), z\big) = S\big(I(x, z), I(y, z)\big)$$

postulowane dla $x, y, z \in [0,1]$. Prezentowane są dwa podejścia: albo implikacja $I$ jest dana, a poszukuje się funkcji $S, T$, albo dane są $S, T$, a implikacja $I$ jest szukana. Nakładając pewne dodatkowe ograniczenia na $S, T$ równania (D1)–(D4) (zob. str. 6 rozprawy) można zapisać w postaci

$$\spadesuit \qquad f\big(\min(x + y, r_1)\big) = \min\big(f(x) + f(y), r_2\big),$$

gdzie $x, y \in [0, r_1]$, $r_1, r_2 \in (0, \infty]$, a $f : [0, r_1] \to [0, r_2]$ jest nieznaną funkcją, związaną z poszukiwaną implikacją $I$ (choć nie jest nią bezpośrednio). W szczególności, jeśli $r_1 = r_2 = \infty$, dochodzimy do równania Cauchy'ego dla $f : [0, \infty] \to [0, \infty]$. Przy innego rodzaju ograniczeniach na $S, T$ otrzymuje się też równanie Cauchy'ego postulowane dla $f : [-\infty, \infty] \to [-\infty, \infty]$. Przy jeszcze innych założeniach na $S, T$ dochodzi się do równania typu Cauchy'ego

$$f\big(\min(u_1 + v_1, r_1), \min(u_2 + v_2, r_1)\big) = \min\big((f(u_1, u_2) + f(v_1, v_2), r_2\big),$$

gdzie $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in [0, r_1]^2$, takie że $u_1 \geqslant u_2$, $v_1 \geqslant v_2$ oraz $r_1, r_2$ są dowolnymi dodatnimi stałymi, skończonymi lub nieskończonymi.

Występujące w Rozdziale 2 wyniki nie należą do autorki, a zostały opublikowane w pracach prominentnych badaczy związanych z logiką rozmytą. Niektóre z nich opatrzono dowodami. Służy to doskonale nakreśleniu kontekstu zasadniczej części rozprawy.

Trzeci rozdział dysertacji zawiera wyniki badań autorki zrealizowanych wspólnie z Michałem Baczyńskim oraz Tomaszem Szostokiem. Ich istota polega na zastąpieniu występujących w równaniu $\spadesuit$ minimów ogólniejszymi funkcjami $m_1, m_2$. W ten sposób obiektem rozważań staje się równanie funkcyjne

$$\heartsuit \qquad f\big(m_1(x + y)\big) = m_2\big(f(x) + f(y)\big),$$

gdzie $m_1 \colon [0, 2r_1] \to [0, r_1]$, $m_2 \colon [0, 2r_2] \to [0, r_2]$ dla pewnych stałych $r_1, r_2 \in (0, \infty]$, które mogą być skończone lub nieskończone. Jak widać, jest to równanie funkcyjne typu Cauchy'ego. Łatwo spostrzegamy, że $m_1, m_2$ zastępują minimum i/lub identyczność w zależności od tego czy $r_1, r_2$ są skończone bądź nie. Uzasadnionym było więc wyodrębnienie dwóch przypadków: różnowartościowej (zamiast identyczności) bądź nieróżnowartościowej (zamiast minimum) funkcji $m_2$. W dalszej części rozdziału przyjmuje się też pewne założenia o funkcji $m_1$.

Jeśli $m_2$ jest funkcją różnowartościową, łatwo pokazuje się, że funkcja $f : [0, r_1] \to [0, r_2]$ spełniająca równanie $\heartsuit$, spełnia też równanie Jensena. Rozwiązano je w czterech możliwych przypadkach dotyczących skończoności $r_1, r_2$, ale także dla funkcji $f : [-\infty, \infty] \to [-\infty, \infty]$. W tym ostatnim przypadku funkcje jensenowskie $f$ mają tę własność, że $f - f(0)$ jest funkcją addytywną, ale implikacja odwrotna jest nieprawdziwa (zachowanie to jest odmiennie od przypadku $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie mamy równoważność). Toteż równanie Jensena trzeba wtedy rozwiązywać bez znajomości rozwiązań równania Cauchy'ego. Otrzymane wyniki stosuje się następnie do podania postaci rozwiązań równania $\heartsuit$. Ciężar badania implikacji rozmytych przerzucono więc sprytnie na klasyczne równanie funkcyjne. Jak widać, nie wszystko co dotyczy równania Jensena zostało jeszcze rozwiązane, a autorka wraz ze współautorami znaleźli dla siebie dobrą niszę.

W przypadku nieróżnowartościowej funkcji $m_2$ na funkcje $m_1, m_2$ nakłada się dodatkowe ograniczenia. autorka stwierdza, że są one związane z uogólnieniem minimum oraz identyczności. W opinii recenzenta założenia te są bardzo techniczne. Brak szerszej dyskusji nad ważnością tych założeń i nad ich naturalnością. Przyjęte założenia pozwalają jednak na badanie uogólnień równań typu $\spadesuit$. Oprócz odtworzenia ich rozwiązań otrzymuje się też istotnie nowe rozwiązania. To dobra cecha uogólnienia.

W rozdziale czwartym bada się równania rozdzielności

$$\mathcal{I}\big(x, \mathcal{U}_1(y,z)\big) = \mathcal{U}_2\big(\mathcal{I}(x,y), \mathcal{I}(x,z)\big),$$
$$\mathcal{I}\big(\mathcal{U}_1(x,y), z\big) = \mathcal{U}_2\big(\mathcal{I}(x,z), \mathcal{I}(y,z)\big)$$

przy danych *uninormach rozkładalnych* $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$. Implikacja $\mathcal{I}$ jest natomiast szukana. Wyniki tego rozdziału zostały uzyskane we współpracy z Michałem Baczyńskim. Jak widać w całej pracy, autorka umiejętnie sprowadza równania związane z logiką rozmytą do bardziej klasycznych równań funkcyjnych. Tutaj tę rolę spełnia równanie

$$\diamondsuit \qquad f(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = f(u_1, u_2) + f(v_1, v_2)$$

rozważane w zbiorze $A = \big\{(x_1, x_2) \in [-\infty, \infty]^2 \ : \ x_1 \leqslant x_2\big\}$ dla funkcji $f : A \to [-\infty, \infty]$. Opisu rozwiązań tego równania dokonano z użyciem wyników Rozdziału 2 dotyczących równania Cauchy'ego rozważanego dla funkcji $f : [-\infty, \infty] \to [-\infty, \infty]$. Wypowiedź twierdzenia 4.3, jednego z głównych rezultatów rozdziału, zajmuje dwie strony formatu A4. Nie służy to dobrze percepcji czytelnika. Z drugiej jednak strony powodem tak rozbudowanej wypowiedzi jest duża liczba przypadków, które trzeba rozważyć w badaniu równania $\diamondsuit$. Dowód też nie należy do najkrótszych (7 stron), a szczegółowo rozważa się tylko jeden z czterech przypadków związanych z interpretacją symbolu nieoznaczonego $\infty - \infty$ w dziedzinie i w przeciwdziedzinie (przypadki te wyodrębnia się w osobnych twierdzeniach z tak samo długimi wypowiedziami). Omawiane twierdzenia mają charakter pomocniczy, bowiem dalszą część rozdziału wypełniają rozumowania związane z tytułowymi równaniami rozdzielności. Dobrze zredagowane streszczenie badań świetnie wprowadza w prezentowane rozumowanie, które znów jest analizą jednego tylko przypadku. Nie sposób szczegółowo rozważyć wszystkich. Zważywszy na długość dowodów, rozprawa rozrosłaby się do niebotycznych rozmiarów. W opinii recenzenta zupełnie wystarczy anons o tym, że pozostałe przypadki analizuje się podobnie.

Cały czwarty rozdział jest bardzo techniczny i żmudny. Nie jest to zarzut, albowiem prezentowane tu badania ściśle dotyczą tytułu rozprawy i w pełni mieszczą się w jej zakresie. Autorce należy się pochwała za cierpliwość i wytrwałość w dążeniu do celu.

Ostatni, piąty rozdział, poświęcono równaniu rozdzielności

$$\clubsuit \qquad I\big(x, S(y,z)\big) = S\big(I(x,y), I(x,z)\big), \qquad x, y, z \in [0,1]$$

dla funkcji $I, S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, gdzie $I$ jest R–implikacją otrzymaną z $t$–normy ścisłej, a funkcja $S$ jest $t$–konormą. Obszar ten jest już częściowo zbadany, autorka natomiast dostrzega i wypełnia istniejące luki. Chodzi o założenia na dane funkcje $R, S$.

Aby uzyskać główne wyniki rozdziału bada się najpierw dwa klasycznie brzmiące równania funkcyjne. Pierwsze z nich,

$$h\big(xg(y)\big) = h(x) + h(xy),$$

z niewiadomymi funkcjami $f, g$, rozważa się w przedziale $(0, \infty)$. Następnie stosuje się rozwiązania tego równania do otrzymania rozwiązań drugiego z anonsowanych równań, czyli

$$h\Big(\min\big(xg(y), 1\big)\Big) = \min\big(h(x) + h(xy), 1\big)$$

postulowanego dla wszystkich $x \in (0,1)$, $y \in (0,1]$. Jeśli to równanie we wstępnych akapitach rozdziału zyskuje swoje oznaczenie i gra dużą rolę w całym rozdziale, nie można odpowiedniego rezultatu formułować jako Lemat 5.7. Należało nadać mu rangę twierdzenia.

Perełką omawianego podrozdziału 5.1 (a może i całej rozprawy) jest klasyczny Lemat 5.5 mówiący, że jeśli $\alpha$ jest liczbą niewymierną, to zbiór $\{n\alpha \bmod 1 : n \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty na odcinku $[0,1]$. Aż dziwne, że lemat nie był dotychczas znany. A może należało pokusić się o dokładniejsze sprawdzenie istnienia takiego wyniku?

Podrozdział 5.2 przynosi rozwiązania równania $\clubsuit$, które otrzymuje się z użyciem wyników poprzedniego podrozdziału.

Rezultaty Rozdziału 5, wciąż czekające na publikację, otrzymała autorka we współpracy z Michałem Baczyńskim, Romanem Gerem oraz Marcinem Kuczmą.

Jak można zauważyć, zastosowana w całej rozprawie metoda badawcza sprowadza się do otrzymania jako warunki konieczne spełniania równań związanych z rozdzielnością implikacji, klasycznych równań funkcyjnych typu Cauchy'ego czy Jensena. Tego rodzaju równania rozwiązuje się w rozprawie metodami właściwymi dla równań funkcyjnych, a ogólny zarys tej techniki jest dobrze znany badaczom i przez lata z powodzeniem stosowany. Postać rozwiązań tych klasycznych równań jest następnie stosowana w otrzymywaniu rozwiązań badanych równań związanych z logiką rozmytą, szczególnie z implikacjami rozmytymi. W tej części rozprawy stosuje się oczywiście własności immanentnie związane z logiką. Ta dwutorowość dobrze pokazuje, że równania funkcyjne są w matematyce użyteczne.

## Ocena merytoryczna rozprawy

Uwagi krytyczne sformułowano w omówieniu wyników rozprawy. Tu wskażę pozytywne jej strony, wobec których uwagi te znaczą niewiele. Wszelkie wskazane niedociągnięcia nie obniżają w żadnym stopniu wartości rozprawy.

Autorka wykazuje dużą wiedzę w zakresie badań związanych z tematem jej pracy. Szeroko cytuje prace innych badaczy. Przykłady występujące w rozprawie, zgodnie z oświadczeniem autorki i promotora, są wyłącznym dziełem Pani Niemyskiej. Są one pomysłowe i doskonale ilustrują rozważane zagadnienia. Tematyka rozprawy jest oryginalna i dobrze wiąże się z zagadnieniami praktycznymi, co też w rozprawie umotywowano i wyjaśniono.

Zrozumieniu prezentowanych treści służy dobrze napisane wprowadzenie. Umiejscawia ono wyniki rozprawy w nurcie badań logiki rozmytej wskazując dlaczego rozważa się takie a nie inne problemy. Wprowadzenie to zajmuje w rozprawie stosunkowo dużą część. Może ono (jak też i cała rozprawa) w przyszłości posłużyć jako treść dobrego wykładu monograficznego. W opinii recenzenta znajdujemy w dysertacji doskonałe połączenie pozornie odległych dziedzin matematyki.

Pewne zastanowienie budzą cytowane prace autorki. Wszystkie napisane są we współpracy, bądź to z Michałem Baczyńskim i Tomaszem Szostokiem, bądź to z samym Michałem Baczyńskim. Jednak wkład Pani Niemyskiej jest znaczący, co zgodnie przyznają obaj współautorzy (na dowód udostępnili recenzentowi zapisy z początkowego stadium badań, kiedy to doktorantka jeszcze z nimi nie współpracowała). Braku pracy napisanej samodzielnie recenzent absolutnie nie postrzega jako mankament. Przeciwnie: świadczy on o wysokich umiejętnościach pracy zespołowej autorki, co dobrze wróży jej dalszej karierze naukowej. Badania naukowe prowadzi się we współpracy. Ich celem nie jest zdobywanie kolejnych stopni lecz poznanie prawdy o otaczającej nas rzeczywistości. A przecież logika rozmyta jak najbardziej wiąże się z działalnością człowieka i jego decyzjami. W tym sensie należy jej przypisać pierwiastek humanistyczny.

## Uwagi krytyczne o redakcji rozprawy

Jak w każdej niemal rozprawie naukowej, i tu występuje sporo literówek. Recenzent nie zna chyba osoby, której praca jest od nich wolna. Rażą natomiast sformułowania typu *krótki lemat*. Chodzi o lemat, który względnie łatwo otrzymać. Takich kolokwializmów należy w przyszłości unikać.

Czytelność rozprawy poprawiłoby właściwe skalowanie nawiasów. Komendy systemu LaTeX realizujące to zadanie są powszechnie znane i można było je zastosować.

## Konkluzja

Przedstawiona do recenzji rozprawa spełnia wymagania Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki z dnia 14 marca 2003 roku stawiane rozprawom doktorskim. Stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego i wykazuje ogólną wiedzę teoretyczną autorki w zakresie matematyki, w szczególności równań funkcyjnych. Świadczy też o umiejętności samodzielnego prowadzenia przez Doktorantkę pracy naukowej.

Dlatego zwracam się z prośbą do Rady Instytutu Matematyki na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach o dopuszczenie Pani mgr Wandy Niemyskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego, w szczególności do publicznej obrony rozprawy doktorskiej.

Szymon Wąsowicz