Rzeszów, 7 stycznia 2016 r.

dr hab. Jacek Chudziak, prof. UR
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy
Uniwersytet Rzeszowski

Recenzja pracy doktorskiej Pani mgr Wandy Niemyskiej
„O równaniach funkcyjnych związanych z rozdzielnością implikacji rozmytych"

Przedstawiona rozprawa doktorska została przygotowana w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach pod opieką naukową dra hab. Michała Baczyńskiego. Licząca 128 stron praca podzielona jest na pięć rozdziałów:

1. Wprowadzenie
2. Historia badań nad rozdzielnością implikacji rozmytych
3. O równaniu funkcyjnym $f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))$
4. O równaniach rozdzielności dla rozkładalnych uninorm
5. O równaniu $I(x, S(y,z)) = S(I(x,y), I(x,z))$ dla R-implikacji.

We wstępie pani magister Niemyska stwierdza, że „w rozdziałach 3-5 przedstawione są nowe rezultaty uzyskane przez Autorkę we współpracy z M. Baczyńskim, R. Gerem, M. E Kuczmą i T. Szostokiem". Współpraca ta jest, według mnie, bardzo pozytywnym przejawem działalności naukowej doktorantki. Warto podkreślić, że zamieszczone w rozdziale piątym wyniki pochodzące od prof. Romana Gera i dra Marcina E. Kuczmy zostały wyraźnie wyodrębnione (por., odpowiednio, twierdzenia 5.4 i 5.6). W mojej ocenie wskazane byłoby również, w miarę prezyzyjne, określenie wkładu autorki w wyniki uzyskane we współpracy z pozostałą dwójką współautorów, zwłaszcza, że pochodzą one z prac, które zostały już opublikowane.

Rozdziały pierwszy i drugi mają charakter wprowadzający w tematykę rozprawy. W pierwszym autorka zamieszcza definicje pojęć stosowanych w pracy, ich najważniejsze własności oraz przedstawia związki między nimi. Ponadto przedstawia informacje, dotyczące wnioskowania przybliżonego opartego na logice rozmytej i znaczenia rozdzielności implikacji rozmytych w ramach tej logiki.

W rozdziale drugim przedstawione są najważniejsze wyniki dotychczasowych badań nad rozdzielnością implikacji rozmytych. W szczególności autorka omawia rezultaty dotyczące rozwiązań następujących czterech równań funkcyjnych:

$$I(x, C_1(y,z)) = C_2(I(x,y), I(x,z)) \quad \text{dla} \quad x,y,z \in [0,1], \tag{1}$$

$$I(x, D_1(y,z)) = D_2(I(x,y), I(x,z)) \quad \text{dla} \quad x,y,z \in [0,1], \tag{2}$$

$$I(C(x,y), z) = D(I(x,z), I(y,z)) \quad \text{dla} \quad x,y,z \in [0,1], \tag{3}$$

$$I(D(x,y), z) = C(I(x,z), I(y,z)) \quad \text{dla} \quad x,y,z \in [0,1], \tag{4}$$

gdzie $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ jest uogólnieniem klasycznej implikacji, $C, C_1, C_2 : [0,1]^2 \to [0,1]$ są uogólnieniami klasycznej koniunkcji, zaś $D, D_1, D_2 : [0,1]^2 \to [0,1]$ są uogólnieniami klasycznej alternatywy. Najpierw przedstawione są rezultaty w przypadku, gdy implikacja I jest dana.

W twierdzeniach 2.1-2.4 zaprezentowane są wyniki, pochodzące z prac [26] i [74] (w całej recenzji przyjmuję numerację prac przedstawioną w rozprawie). Następnie omówiony jest przypadek, gdy implikacja I jest szukana, zaś funkcje C, C_1, C_2 oraz D, D_1, D_2 to, odpowiednio, t-normy oraz t-konormy, spełniające pewne dodatkowe założenia (ciągłe i archimedesowe, ciągłe, rozkładalne). Sporo miejsca poświęcono również omówieniu najważniejszych wyników dotyczących równań:

$$I(x, U_1(y, z)) = U_2(I(x, z), I(x, z)) \quad \text{dla} \quad x, y, z \in [0, 1], \tag{5}$$

$$I(U_1(x, y), z) = U_2(I(x, z), I(y, z)) \quad \text{dla} \quad x, y, z \in [0, 1], \tag{6}$$

gdzie $U_1, U_2 : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ są uninormami.

Zawartość dwóch pierwszych rozdziałów znacznie ułatwia lekturę zasadniczej części pracy, świadcząc jednocześnie o dobrej orientacji doktorantki w tematyce prowadzonych w ostatnim czasie badań nad rozdzielnością implikacji rozmytych.

Rozdział trzeci w całości poświęcony jest badaniu rozwiązań równania funkcyjnego

$$f(m_1(x + y)) = m_2(f(x) + f(y)) \quad \text{dla} \quad x, y \in [0, r_1], \tag{7}$$

w klasie funkcji $f : [0, r_1] \to [0, r_2]$, gdzie $r_1, r_2 \in (0, \infty]$ są ustalone, $m_1 : [0, 2r_1] \to [0, r_1]$ oraz $m_2 : [0, 2r_2] \to [0, r_2]$. W podrozdziale 3.1 rozważany jest przypadek, gdy funkcja m_2 jest różnowartościowa. Autorka pokazuje (por. lemat 3.1), że w takim przypadku funkcja f spełnia równanie Jensena

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad \text{dla} \quad x, y \in [0, r_1].$$

Następnie wyznacza rozwiązania tego równania. Korzystając z tych wyników, przedstawia twierdzenia 3.15-3.17 i 3.21, podające postać rozwiązań równania (7), odpowiednio, w przypadkach:

- $r_1, r_2 \in (0, \infty)$,
- $r_1 = \infty, r_2 \in (0, \infty)$,
- $r_1 \in (0, \infty), r_2 = \infty$,
- $r_1 = r_2 = \infty$.

W podrozdziale 3.2 rozważany jest przypadek, gdy funkcja m_2 nie jest różnowartościowa. Należy jednak zaznaczyć, że założenie o różnowartościowości funkcji m_2 zostało zastąpione stosunkowo mocnymi założeniami, dotyczącymi nie tylko tej funkcji, lecz również funkcji m_1. Założenia te są szczegółowo wymienione w twierdzeniu 3.24, będącym głównym rezultatem tej części rozprawy. Pani magister Niemyska przedstawia następnie kilka wniosków, wynikających z twierdzenia 3.24 oraz szereg przykładów ilustrujących uzyskane wyniki.

W rozdziale czwartym rozważane są równania rozdzielności dla rozkładalnych uninorm na kracie $\mathcal{L}^I$. W podrozdziale 4.1 autorka pokazuje, że kluczową rolę w rozwiązaniu rozważanych problemów odgrywa równanie funkcyjne

$$f(v_1 + v_1, u_2 + v_2) = f(u_1, u_2) + f(v_1, v_2) \quad \text{dla} \quad (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in L^{\overline{\infty}}, \tag{8}$$

gdzie $L^{\overline{\infty}} := \{(x_1, x_2) \in [-\infty, \infty]^2 : x_1 \leqslant x_2\}$. Podrozdział 4.2 poświęcony jest w całości rozważaniom dotyczącym rozwiązań równania (8). Okazuje się, że postać rozwiązań równania (8) w istotny sposób zależy od tego, które z następujących dwóch założeń przyjmiemy w dziedzinie i przeciwdziedzinie funkcji f:

(A−) $\quad (-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = -\infty$,

(A+) $\quad (-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = \infty$.

W związku z tym rozważane są cztery przypadki, a rezultaty otrzymane w każdym z nich są przedstawione w twierdzeniach 4.3-4.7, będących głównymi wynikami tej części rozprawy. Wypowiedź twierdzenia 4.3 i jego dowód, polegający na rozważeniu dużej liczby przypadków, zajmują blisko 10 stron. Dowody pozostałych trzech twierdzeń zostały pominięte. Doktorantka ogranicza się do stwierdzenia, że przebiegają one analogicznie do dowodu twierdzenia 4.3. W podrozdziale 4.3 autorka pokazuje, w jaki sposób wyniki uzyskane w poprzednim podrozdziale mogą zostać wykorzystane do badań na wyjściowym problemem rozdzielności dla uninorm rozkładalnych.

Kończący rozprawę rozdział piąty, dotyczy równania funkcyjnego

$$I(x, S(y,z)) = S(I(x,y), I(x,z)), \tag{9}$$

w klasie par funkcji (S, I), gdzie $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ jest funkcją symetryczną, rosnącą ze względu na każdą zmienną i spełniającą warunek $S(x, 0) = x$ dla $x \in [0,1]$, zaś $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ jest R-implikacją generowaną przez ścisłą t-normę T, tzn.

$$I(x,y) = \sup\{t \in [0,1] : T(x,t) \leqslant y\} \quad \text{dla} \quad x, y \in [0,1].$$

Na podstawie lematu 1.45, każda taka implikacja jest postaci

$$I(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad x \leqslant y, \\ \phi^{-1}\left(\frac{\phi(y)}{\phi(x)}\right), & \text{gdy} \quad x > y, \end{cases}$$

gdzie $\phi : [0,1] \to [0,1]$ jest rosnącą bijekcją. Głównym rezultatem tego rozdziału jest twierdzenie 5.8. Autorka dowodzi w nim, że para (S, I) spełnia równanie (9) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedna z nastepujących możliwości:

- $$S(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\}, & \text{gdy} \quad xy = 0, \\ 1, & \text{gdy} \quad xy \neq 0; \end{cases}$$
- istnieje taka funkcja rosnąca $g : (0,1] \to [1,\infty)$, że
$$S(x,y) = \phi^{-1}\left(\min\left\{g\left(\frac{\phi(y)}{\phi(x)}\right) \cdot \phi(x), 1\right\}\right) \quad \text{dla} \quad x, y \in [0,1].$$

W podrozdziale 5.1 sporo miejsca poświecono rozwiązaniom równań funkcyjnych

$$h(xg(y)) = h(x) + h(xy) \quad \text{dla} \quad x, y \in (0,\infty) \tag{10}$$

oraz

$$h(\min\{xg(y), 1\}) = \min\{h(x) + h(xy), 1\}. \tag{11}$$

Równanie (11) odgrywa kluczową rolę w dowodzie wniosku 5.11. Warto zaznaczyć, że w twierdzeniach 5.4 i 5.6 przedstawione są niepublikowane dotąd wyniki, dotyczące rozwiązań równania (10) w klasie par funkcji (g, h), odwzorowujących przedział $(0,\infty)$ w $(0,\infty)$ takich, że, odpowiednio, funkcja h jest bijekcją oraz funkcja h jest ciągła. Zgodnie z oświadczeniem doktorantki, zamieszczonym na s. 107 rozprawy, twierdzenie 5.4 zostało udowodnione przez prof. R. Gera, zaś twierdzenie 5.6 przez dra M. E. Kuczmę w trakcie dyskusji prowadzonych z autorką. Żadne z nich nie znajduje bezpośredniego zastosowania w rozprawie. Natomiast, opierając się na metodzie zastosowanej w dowodzie twierdzenia 5.6, pani magister Niemyska przeprowadza dowód lematu 5.7, dotyczącego rozwiązań równania (11).

W końcowej części podrozdziału 5.1 pokazany jest sposób sprowadzenia równania (10) do równania

$$H(v) + H(u + G(v)) = H(u) + H(v + G(u)) \quad \text{dla} \quad u, v \in \mathbb{R},$$

które, jak pisze doktorantka, „przypomina" równanie

$$v + H(u + G(v)) = u + H(v + G(u)) \quad \text{dla} \quad u, v \in \mathbb{R},$$

rozważane m.in. w pracach [31], [55], [69] i [70]. Warto tym miejscu zauważyć, że rozwiązania równania funkcyjnego, znacznie bliższego równaniu (11), a mianowicie

$$f(x) = f(xy) + f(xg(y)) \quad \text{dla} \quad x, xg(y) \in [0,k), y \in [0,1], \tag{12}$$

gdzie $k > 1$, $f : [0,k) \to [0,\infty)$ i $g : [0,1] \to [0,\infty)$, były przedmiotem badań, których wyniki zostały opublikowane w pracy J. Aczél, R. Ger, A. Jarái, *Solution of a functional equation arising from utility that is both separable and additive*, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 2923-2929. Co więcej, postać nietrywialnych rozwiązań równania (12) jest zbliżona do postaci rozwiązań równania (11). W szczególności funkcja f jest postaci $f(x) = ax^b$ dla $x \in [0,k)$, gdzie $a, b > 0$. Sądzę, że warto przyjrzeć się bliżej ewentualnym związkom zachodzącym między równaniami (10)-(12).

Praca napisana jest w sposób przejrzysty. Autorka stara się precyzyjnie uzasadniać poszczególne fragmenty rozumowań. Z drugiej strony można odnieść wrażenie, że niektóre części tekstu zostały najpierw zredagowane w języku angielskim, a następnie niezbyt starannie przetłumaczone na język polski. Stąd, według mnie, biorą się sformułowania w rodzaju:

- „generalizacja rezultatu" (s. 6, wiersz 16),
- „... negacji $\mathcal{N}$ ze stałym punktem e" (s. 17, wiersz 16),
- „Zatem z twierdzenia 5.8 symetryczne funkcje $S_1, S_2, S_3 : [0,1]^2 \to [0,1]$ są takie, że ..." (s. 119, wiersz 5).

Przejdę teraz do szczegółowego omówienia usterek występujących w pracy. Rozpocznę od dwóch, które moim zdaniem są najistotniejsze.

Pierwsza jest związana ze stosowaniem przez doktorantkę wyników, dotyczących przedłużania rozwiązań równania Cauchy'ego. W wierszu 10, na s. 64 stosowane jest twierdzenie XIII.6.2 z monografii [53]. Dotyczy ono przedłużania rozwiązań równania Cauchy'ego ze zbioru pewnej szczególnej postaci. Stosowanie go w tej części rozumowania wymaga, moim zdaniem, dodatkowego komentarza. Podobne problemy występują w przypadku funkcji f^0 (s. 86, wiersze 1-6) oraz w przypadku funkcji H_λ (s. 108).

Druga uwaga dotyczy sformułowania punktu (iv) w twierdzeniu 3.24. Według mnie, następująca postać (iv) jest znacznie bardziej czytelna i wygodna do zastosowania w przykładach:
(iv) istnieje takie $x_0 \in (0, x_1]$, że $x_0 \leqslant m_1(x_0)$, $km_1(x) = m_2(kx)$ dla $x \in [0, m_{10}^{-1}(x_0))$ oraz

$$f(x) = \begin{cases} m_2(km_{10}^{-1}(x)), & \text{dla } \ x \in [0, m_1(x_0)), \\ r_2 & \text{dla } \ x \in [m_1(x_0), r_1], \end{cases}$$

gdzie $k := \frac{x_2}{x_0}$ i $m_{10} := (m_1)_{|[0,x_1]}$.
Zauważmy, że przy takim sformułowaniu (iv) mamy natychmiast $k \geqslant \frac{x_2}{x_1}$.
W przykładzie 3.31, analizując rozwiązania postaci (iv), wystarczy zauważyć, że równość $k\sqrt{r_1 x} = \sqrt{kr_2 x}$, zachodząca dla dostatecznie małych dodatnich x, oznacza, że $k = \frac{x_2}{x_1}$. Stąd $x_0 = r_1$, gdyż $x_2 = r_2$. W rezultacie $f(x) = \frac{r_2}{r_1}x$ dla $x \in [0, r_1]$. W rozumowaniu przedstawionym w rozprawie występuje y_0 (s. 67, wiersz 4 od dołu), ale nie wiadomo czym jest x_0.
Analiza przeprowadzona w przykładzie 3.32 jest mało czytelna. Jeżeli ustalimy dowolne $x_0 \in (0, x_1]$ i przyjmiemy $k := \frac{x_2}{x_0}$, to dla dowolnego $x \in [0, m_{10}^{-1}(x_0)) = [0, \frac{x_0}{\alpha})$, otrzymamy $\alpha kx < kx_0 = x_2$, co oznacza, że $km_1(x) = k\alpha x = m_2(kx)$. Wobec dowolności $x_0 \in (0, x_1]$, mamy dowolność $k \in \left[\frac{x_2}{x_0}, \infty\right)$. Ponadto, dla każdego $x \in [0, m_1(x_0)) = [0, \alpha x_0)$, mamy $k\frac{x}{\alpha} < kx_0 = x_2$, skąd wynika, że $f(x) = m_2(km_{10}^{-1}(x)) = m_2\left(k\frac{x}{\alpha}\right) = kx$. Ponieważ $k\alpha x_0 = r_2$, otrzymujemy ostatecznie, że $f(x) = \max\{kx, r_2\}$ dla $x \in [0, r_1]$.
Podobne uwagi dotyczą przykładów 3.33, 3.34, 3.41 i 3.42.

Omówię teraz pozostałe usterki, które dostrzegłem w trakcie czytania rozprawy. Większość z nich dotyczy drobnych niedopatrzeń i błędów stylistycznych.

1. Na s. 30, w wierszu 1, jest mowa o definicji 1.30, która w rozprawie nie występuje.
2. Na s. 31, sformułowanie w wierszu 4 jest nieprecyzyjne. Powinno być wyraźnie zaznaczone, że $r_1, r_2 \in [0, \infty)$ są ustalone.
3. W twierdzeniach 2.6 i 2.7 nie powinno być „et al.", gdyż jedynym autorem pracy [7] jest M. Baczyński.
4. Na s. 34, w ostatnim wierszu przykładu 2.10, zamiast (2.34) powinno być (2.15).
5. W pierwszym zdaniu na s. 36 należy usunąć „nad".
6. W pierwszym zdaniu na s. 45 fragment „równanie (2.2) dane wzorem ..." brzmi co najmniej dziwnie. Podobna uwaga dotyczy pierwszego zdania podrozdziału 3.1.1 na s. 46. Ponadto nie zgadzam się z zawartym w tym zdaniu stwierdzeniem mówiącym, że z lematu 3.1 wynika, iż wyznaczając rozwiązania równania (M), należy rozwiązać równanie (J). Jest to tylko jedna z możliwych dróg do wyznaczenia rozwiązania równania (M).

7. Na s. 47, w wierszu 18 zamiast „$x \in (0, \infty)$" powinno być „$x, y \in (0, \infty)$".

8. Uwaga 3.9 na s. 51 jest w istocie przykładem.

9. Rozwiązaniami równania (M) są trójki funkcji (m_1, m_2, f) (por. ostatni wiersz na s. 54). Wobec tego, jak należy rozumieć stwierdzenie w wierszu 20 na s. 55 mówiące o tym, że „oba rozwiązania w twierdzeniu 3.15 są ciągłe"?

10. Na s. 57, w wierszu 6 od dołu zamiast „$x \in (0, \infty]$" powinno być „$x \in (0, 2r_1]$".

11. W wierszach 6,15 od góry i 3 od dołu na s. 58 oraz w wierszu 6 na s. 59 zamiast (2.7) powinno być (2.10).

12. Na s. 59, zdanie w wierszach 16-18 jest niefortunnie sformułowane, gdyż wniosek 3.18 również jest przedstawiony bez dowodu.

13. Na s. 60, w wierszach 20-18 od dołu znajduje się stwierdzenie, że „Od funkcji f (...) będziemy żądać, aby na pewnym swoim początkowym fragmencie była ciągła i ściśle rosnąca". Warto wyjaśnić, co rozumie się przez „początkowy fragment funkcji".

14. Na s. 62, w wierszu 8, zamiast „jeśli tylko" powinno być „gdyż". Podobna uwaga dotyczy wiersza 6 na s. 76.

15. Na s. 63, w wierszu 2, zamiast „lub" powinno być „oraz", zaś na końcu wiersza należy dodać „„odpowiednio,".

16. Na s. 64, w wierszu 6 nie wystarczy skorzystać z różnowartościowości funkcji m_2 na przedziale $[0, x_2)$. Istotną rolę odgrywa tu również fakt, że funkcja $(m_2)_{|[x_2, 2x_2]}$ jest stała.

17. Na s .65, w wierszu 8, zamiast „z ostatniego równania" powinno być „z ostatniego oszacowania".

18. Na s. 71, w wierszu 2, zamiast „spełnia wzór" powinno być „jest postaci".

19. Czy na s. 73, w wierszu 10, na pewno chodzi o to, że „zbiór D_f jest skończony"?

20. Na s. 76, w wierszu 7, należało ustalić $x, y \in [0, r_1]$.

21. Na s. 78, w wierszu 1, zamiast „$f = r_2$" powinno być „$f = 0$".

22. Na s. 83, w wierszu 2, zamiast „położymy" powinno być „przyjmiemy".

23. Na s. 85, w wierszu 2 od dołu, zamiast „dziesięć" powinno być „dziesięciu".

24. Na s. 89, pierwsze zdanie w przypadku (2)A. jest niepoprawnie sformułowane.

25. Zapis w trzecim wierszu wzoru (*7) na s. 91 jest niefortunny.

26. Początek pierwszego zdania w podrozdziale 4.3 na s. 96 jest jest jednym z przykładów błędów stylistycznych, często występujących w pracy.

27. Na s. 103, w wierszu 1 chodzi o warunki konieczne? W wierszu 2, na tej samej stronie, powinno być „implikacji", zaś w wierszu 6 oraz w wierszach 6 i 3 od dołu na s.103, zamiast „/", powinno być „\".

28. Komentarz w wierszach 23-29 na s. 106 jest napisany w sposób utrudniający zrozumienie, o co tak naprawdę chodzi.

29. Rozwiązaniami równania (H) są pary funkcji (g, h) (por. s. 107, wiersze 12-13). Wobec tego, zdanie rozpoczynające się w 3 wierszu na tej samej stronie, jest nieprecyzyjnie sformułowane.

30. Na s. 108, w wierszach 3-8 w pewnym momencie powinno pojawić się stwierdzenie, że zdefiniowana została funkcja $c : (0, \infty) \to (0, \infty)$.

31. W wierszu 2 od dołu na stronie 108 oraz w wierszach 6 i 8 na s. 109 zamiast $\mathcal{N}$ powinno być $\mathbb{N}$.

32. Na s. 110, w wierszach 4-5 definiowana jest funkcja k. Formalnie powinna być ona określona następująco: $k(x) = \frac{h(x)}{x^p}$ dla $x \in (0, \infty)$. Wynika stąd, że nawet w przypadku, gdy funkcja $h : [0, 1] \to [0, 1]$ jest ciągła, nie możemy oczekiwać istnienia skończonej granicy prawostronnej funkcji k w punkcie 0. Tymczasem, na s. 111, w dowodzie lematu 5.7, funkcja k jest określona na przedziale [0,1] i zakłada się jej ciągłość na tym przedziale. W dalszym ciągu dowodu lematu 5.7 autorka nie korzysta jednak z ciągłości funkcji k w 0.

33. Na s. 113, nierówność w wierszu 13 od dołu powinna, według mnie, mieć postać

$$1 \geqslant S(1, y) \geqslant \max\{1, y\} = 1.$$

Konkluzja

Stwierdzam, że rozprawa doktorska Pani magister Wandy Niemyskiej pokazuje szereg interesujących zastosowań równań funkcyjnych w badaniu różnych aspektów problemu rozdzielności implikacji rozmytych. Zawiera nowe wyniki, które wpisują się w nurt prowadzonych w ostatnim czasie badań nad tym problemem. Wymienione przeze mnie usterki nie wpływają w sposób istotny na ocenę merytorycznej zawartości rozprawy. Uważam, że spełnia ona zarówno zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim, jak również wymagania ustawowe zawarte w *Ustawie o stopniach i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki.*

Wobec tego **wnioskuję o dopuszczenie Pani magister Wandy Niemyskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

Jacek Chudziak