profesor Witold Jarczyk

Uniwersytet Zielonogórski

Recenzja rozprawy doktorskiej pana mgra Dawida Kotrysa

pt. *Silnie wypukłe procesy stochastyczne*

Recenzowana praca poświęcona jest procesom stochastycznym spełniającym różne warunki zbliżone do wypukłości, mianowicie warunki silnej wypukłości (rozdział 2), silnej wypukłości w sensie Jensena (rozdział 3) i silnej wypukłości w sensie Wrighta (rozdział 4). Przez proces stochastyczny Autor rozumie funkcję rzeczywistą, która, przy ustalonym przedziale I i przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, jest określona na produkcie $I \times \Omega$ i $\mathcal{A}$-mierzalna ze względu na drugą zmienną.

Rozdział pierwszy, czyli Wprowadzenie, zawiera podstawowe definicje: różnych rodzajów wypukłości, P-ograniczoności, ciągłości i pochodnej według prawdopodobieństwa, a także ciągłości, różniczkowalności i całkowalności średniokwadratowej. Większość wyników rozdziałów 2-4 to odpowiedniki znanych z literatury rezultatów dotyczących funkcji silnie wypukłych, silnie wypukłych w sensie Jensena i w sensie Wrighta, a także wypukłych procesów stochastycznych. Te oryginalne twierdzenia deterministyczne, poświęcone funkcjom, należą do bogatego dorobku teorii wypukłości, te drugie zostały udowodnione między innymi przez Kazimierza Nikodema i Arkadiusza Skowrońskiego. W rozdziale 2 znajdziemy różne charakteryzacje silnej wypukłości procesów stochastycznych: poprzez istnienie stosownej funkcji podpierającej (twierdzenie 8), odpowiednio szybki wzrost pierwszej pochodnej procesu (twierdzenie 10), a także przy użyciu drugiej pochodnej procesu (twierdzenie 12). Rozdział ten zawiera także odpowiedniki dyskretnej i całkowej nierówności Jensena dla procesów silnie wypukłych (twierdzenia 11 i 13), nierówności Hermite'a-Hadamarda dla procesów wypukłych (twierdzenia 15 i 18) i ściśle wypukłych (twierdzenia 19 i 20) oraz nierówności Fejera dla silnie wypukłych procesów stochastycznych (twierdzenie 22). Rozdział 3 przynosi odpowiedniki klasycznej nierówności Jensena (twierdzenia 26 i 27) dla funkcji silnie wypukłych w sensie Jensena, a także wersje klasycznych twierdzeń: Kuhna dla silnie λ-wypukłych procesów stochastycznych (twierdzenie 29), Bernsteina-Doetscha (twierdzenie 31) i Sierpińskiego (twierdzenie 34) dla procesów silnie wypukłych w sensie Jensena. Rozprawę kończy krótki rozdział 4 poświęcony procesom stochastycznym silnie wypukłym w sensie Wrighta. Jego główne wyniki to twierdzenie 36, będące odpowiednikiem charakteryzacji funkcji wypukłych w sensie Wrighta podanej przez Ng, oraz twierdzenie 39, stanowiące wersję rezultatu dotyczącego funkcji wypukłej w sensie Jensena ograniczonej z góry przez funkcję wklęsłą w sensie Jensena.

Przeniesienie klasycznych wyników analizy wypukłej na procesy stochastyczne wydaje się dość naturalne i oczywiście potrzebne, choć nie do końca jestem przekonany czy są to zagadnienia pierwszoplanowe w badanej tematyce. Rozprawa jest praktycznie pozbawiona przykładów pokazujących, że takie uogólnienia są celowe i dostatecznie interesujące. Mówimy jednak o rozprawie doktorskiej i, jak sądzę, na tym etapie badań jej zawartość może być uznana za odpowiednią. Metody użyte w pracy są całkowicie elementarne (czego, co podkreślam, nie uważam za wadę), często wiernie naśladują te zastosowane w twierdzeniach oryginalnych. Być może dlatego trudno mi wyróżnić jakiś rezultat.

Autor jest dobrze zorientowany w dotychczasowej literaturze tematu, sprawnie posługuje się metodami teorii funkcji wypukłych i niewątpliwie wykazał umiejętność abstrahowania i uogólniania wyników deterministycznych na przypadek losowy. Właśnie to uważam za największą zaletę rozprawy.

Wartość rozprawy obniżają dwie istotne, jak się wydaje, luki. Pierwsza dotyczy przejścia od warunku (18) do nierówności (19) w dowodzie twierdzenia 18, które gwarantuje wypukłość ciągłego średniokwadratowo procesu stochastycznego spełniającego choć jedną z nierówności Hermite'a-Hadamarda. Na podstawie rozprawy nie widzę dlaczego nierówność (19) zachodzi dla wszystkich $\lambda \in (0,1)$. Druga istotna kwestia to wyprowadzanie przed znak całki średniokwadratowej czynnika, który jest zmienną losową stałą ze względu na zmienną całkowania. Autor postępuje tak, na przykład, w kilku istotnych miejscach dowodów lematu 21 i twierdzenia 22 dotyczących stochastycznej wersji nierówności Fejera, ale w żaden sposób nie uzasadnia takiej możliwości. Jest to o tyle dziwne, że bardzo szczególne przypadki tej własności zostały szczegółowo udowodnione w lematach 2 i 3, gdzie jednak, co podkreślam, wymagane jest założenie skończoności wartości oczekiwanych odpowiednich zmiennych losowych. W korespondencji mejlowej Autor dostarczył mi rachunki i wyjaśnienia obu problemów. Uznałem je za wystarczające, choć, co ważne, nie są wcale oczywiste i powinny być zawarte w rozprawie.

Spośród innych usterek wymienię tylko te ważniejsze, w kolejności w jakiej się pojawiają.
1. W definicji procesu stochastycznego nie jest jasno napisane, czy zbiór wyjątkowy miary zero, występujący w warunku (1), jest uniwersalny, czy też może zależeć od zmiennych u,v i λ.
2. Wydaje się, że pojęcia ciągłości według drugiego momentu (występujące tylko raz w rozprawie, w uwadze 1) i ciągłości średniokwadratowej są tożsame. Użycie tego pierwszego jest niepotrzebne i mylące.
3. Zmienna losowa, będąca wartością procesu X w chwili t, powinna być notowana jako $X(t,\cdot)$, a nie $X(t)$ (por., na przykład, początek paragrafu 1.3). Takich niekonsekwencji i braku precyzji dotyczących zapisu funkcji jest w pracy więcej.
4. Definicje pochodnej i całki średniokwadratowej wymagają jakiejś jednoznaczności zmiennych losowych będących kandydatami na te wielkości. W pracy brak komentarza na ten temat. Jaki to rodzaj jednoznaczności?
5. Czy jednostkowa zmienna losowa, oznaczana w pracy literą J, jest równa 1 p.w.? Tak się wydaje. Jeśli tak jest, to jej użycie jest zbędne.
6. Rachunek u dołu strony 6 wymaga uzupełnień.
7. W dowodzie lematu 9 pojawiło się sformułowanie „Z podstawowych własności całki średniokwadratowej (zobacz [28]...". Może lepiej byłoby je po prostu przytoczyć? Bez nich prawdziwość obu równości w wierszu 7 od dołu strony 11 jest niewidoczna.

8. Pod koniec dowodu twierdzenia 10, po założeniu nierówności (7), pojawia się definicja pochodnej H'. Należało wpierw zdefiniować proces H. Wtedy wzór na jego pochodną byłby konsekwencją określenia H.
9. Rażą błędy językowe, na przykład używanie niepoprawnych konstrukcji „ponieważ... , to... " (str. 14 i 30), czy też „jeżeli... , wówczas... " (str. 17).
10. Żeby w dowodzie twierdzenia 14 móc zastosować nierówność (11) do liczby m trzeba wiedzieć, że jest ona punktem wewnętrznym przedziału I. A co w przypadku, gdy m jest jego końcem?
11. W dowodzie twierdzenia 15 Autor dwukrotnie korzysta z lematu 2, jednak nie sprawdzając wymaganych założeń, a to, jak się wydaje, może nie być takie proste.
12. Brakuje mi szczegółowego dowodu obserwacji 16.
13. W definicji wypukłości procesu stochastycznego brak założeń dotyczących skończoności jakichkolwiek wartości oczekiwanych, a więc w obserwacji 17, w przeciwieństwie do obserwacji 16, potrzebne są założenia tego typu. W przeciwnym razie funkcja φ może mieć wartości nieskończone.
14. Wydaje się, że lemat 21 uogólnia twierdzenie 15. Jeśli tak jest, to może warto było o tym wspomnieć.
15. Dowód lematu 24 jest właściwie kopią dowodu lematu 6. W ich miejsce można było udowodnić lemat charakteryzujący t-wypukłość procesu stochastycznego przy ustalonym $t\in(0,1)$.
16. W dowodzie twierdzenia 27 należało jednak napisać czym są $k_1,\ldots,k_n,l_1,\ldots,l_n$. Niby wszyscy to wiedzą, ale...
17. Definicja procesu silnie wypukłego w sensie Jensena ze str. 29 jest powtórzeniem tej ze strony 26.
18. Drugie zdanie dowodu twierdzenia 30: „Z gęstości istnieje ciąg liczb wymiernych..." jest potworkiem logiczno-językowym.
19. W ostatnim zdaniu dowodu twierdzenia 31 brak na samym początku słowa „silna".
20. W wypowiedzi twierdzenia 34 Autor dopuszcza, że proces stochastyczny może przyjmować wartości nieskończone, ale w definicji na str. 1 żąda by były one skończone.

Poniższe dwie sugestie być może okażą się przydatne w przyszłej pracy Autora.
A. Czy lematy 2 i 3 nie mogłyby zostać zastąpione ogólniejszym rezultatem dla procesów X postaci

$$X(t, \omega) = f(t)A(\omega),$$

gdzie funkcja f i zmienna losowa A spełniają odpowiednie założenia? A może da się udowodnić coś jeszcze ogólniejszego?
B. Funkcja G, pojawiająca się po raz pierwszy w lemacie 21, jako funkcja pierwszej zmiennej jest symetryczną gęstością miary probabilistycznej dla p.w. ω. Czy istnieje uogólnienie pojęcia całki średniokwadratowej, gdzie całkuje się względem miary, niekoniecznie z gęstością? Jeśli tak, to można by próbować udowodnić odpowiednik nierówności (28), w którym pojawiłaby się taka całka. Pozwoliłoby to na uogólnienie lematu 21, a być może też twierdzenia 22.

Rozprawa jest zwarta i krótka. Ale nie chodzi mi o to, że zawiera zbyt mało rezultatów. Tych jest dostatecznie dużo i mają odpowiednio dużą wagę. Problemem jest raczej to, że Autor opuścił lub skrócił sporą część rachunków, pozostawiając ich przeprowadzenie recenzentowi. Szkoda, bo, w przeciwieństwie do oryginalnej publikacji w czasopiśmie, rozprawa doktorska daje możliwość wykazania przez autora jego sprawności rachunkowej. Poziom języka trochę razi, choć jest akceptowalny. Podobnie redakcja całości.

Podsumowując uważam, że rozprawa, choć nie jest na najwyższym poziomie, stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego. Wykazuje, że Autor potrafi prowadzić badania naukowe, ma dobre rozeznanie w dotychczasowych osiągnięciach dziedziny, którą się zajmuje, a także spore umiejętności matematyczne. W mojej opinii rozprawa spełnia zarówno wymogi formalne, to jest artykuł 13 ustęp 1 *Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki* z 14 marca 2003 roku, jak i wymogi zwyczajowe. Wnoszę o dopuszczenie mgra Dawida Kotrysa do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Zielona Góra, 14 sierpnia 2015 roku