# Recenzja pracy doktorskiej „Istnienie gęstości niezmienniczych dla semiukładów dynamicznych ze skokami'' autorstwa mgr Weroniki Biedrzyckiej

Praca mgr Biedrzyckiej dotyczy teorii kawałkami deterministycznych procesów Markowa i ich zastosowaniami. Mówiąc dokładniej, w pracy analizowane są modele procesów które zachodzą w sposób ciągły, ale są co jakiś czas, określony losowo, zaburzane, również w sposób losowy, ale w obrębie tego samego modelu deterministycznego. Przykładowo, można rozważać układ dynamiczny z określonymi trajektoriami i ruch, który początkowo odbywa się po jakiejś trajektorii ale co jakiś czas przeskakuje na inne, wybrane losowo, trajektorie tego samego układu. Są to procesy bardzo ważne w zastosowaniach, np przy opisie migracji, gdzie układ deterministyczny może być układem McKendricka opisującym starzenie sie populacji rozmieszczonych na różnych obszarach, zaś część stochastyczna opisuje odpywające się co jakiś czas migracje pomiędzy różnymi obszarami. Inne zastosowania to np procesy fragmentacji i koagulacji ze wzrostem, gdzie wzrost obiektów jest modelowany deterministycznym równaniem transportu, zaś część stochastyczna opisuje losowy proces rozpadu cząsteczek, lub transport na sieciach, gdzie redystrybucja cząsteczek w węzłach może być opisywana metodami probabilistycznymi. Jak w większości podobnych przypadków, modele takie mogą być opisywane metodymi czysto analitycznymi, bądź czysto probabilistycznymi, przy czym każde z tych podejść ma swoje wady i zalety, gdyż każda z metod czegoś nie widzi w modelu, a coś dostrzega lepiej. Wielką zaletą tej pracy, jak też i wyników uzyskanych wcześnie przez jej promotorkę, jest połączenie metod probailistycznych i funkcjonalno analitycznych w jedno narzędzie. Efektywność takiego połączenia jest szczególnie widoczna w Rozdziale 6 gdzie, dzięki zastosowaniu technik z obu działów matematyki i odpowiedniej interpretacji obiektów probabilistycznych, zostało udowodnione twierdzenie o warunkach dostatecznych i wystarczających dla opisu długoczasowegi zachowania się rozwiązań równań fragmentacji przy znacznie słabszych założeniach niż istniejące w literaturze.

Praca składa się z sześciu rozdziałów, wstępu i spisu literatury. W Rozdziale 1 autorka wprowadza podstawowe definicje, głównie probabilistyczne, służące konstrukcji kawałkami deterministycznego procesu Markowa. Rozdział 2 omawia struktury z pogranicza analizy funkcjonalnej i rachunku prawdopodobieństawa, które będą głównymi narzedziami używanymi w pracy. Są to operatory i półgrupy stochastyczne i podstochastyczne, częściowo całkowe, operatory preharisowskie, operatory Perrona-Frobeniusa, gęstości niezmiennicze i podniezmiennicze,etc. Ponieważ głównym celem pracy jest badanie zachowaań długoczasowych kawałkami deterministycznych procesów Markowa, Rozdział 2 podaje też twierdzenia klasyfikujące możliwe zachowania się takich operatorów. Interesujące jest tutaj badanie wprowadzenie operatora $\sup_{\lambda>0}R(\lambda, A)$, który będzie poźniej odgrywać istotną rolę w analizie. Rozdział 3 poświęcony jest analizie półgrup stochastycznych. Autorka przypomina twierdzenie perturbacyjne Kato (Voigta) w nieco uproszczonej formie, jednak główna część dotyczy istnienia gęstości niezmienniczych, które to istnienie odgrywa podstawową rolę w analizie asymptotyki długoczasowej tych półgrup. Istotną rolę znów odgrywa pewien operator skonstruowany jako $K= \lim_{\lambda\to0}P(\varphi R(\lambda, A))$. Gęstości niezmienicze buduje się, o ile to możliwe, za pomocą gęstości podniezmienniczych operatora K. W Rozdziale 4 autorka stosuje teorię rozwiniętą w poprzednim rozdziale do tytułowych kawałkami deterministycznych procesów Markowa. Opierając się na wynikach uzyskanych przez promotorkę w pracy „Substochastic semigroups and densities of piecewise deterministic Markov processes'' J. Math. Anal. Appl. 357 (2009), no. 2, 385–402, a dotyczących powiązania dyskretnego procesu Markowa z odpowiednią półgrupą stochastyczną, autorka dowodzi głównego twierdzenia tego rozdziału, Twierdzenia 4.2, które wiąże istnienie niezmienniczej miary probabilistycznej łańcucha Markowa z właściwościami procesu ciągłego. W tym twierdzeniu pojawia się warunek na skończoność wartości oczekiwanej prierwszego przeskoku który odgrwywa centralną role w analizie asymptotyki długoczasowej procesów fragmentacji. We wszystkich twierdzenia podstawowym założeniem jest istnienie jedynej gęstości/miary niezmienniczej i w nawiązaniu do tego wymogu, w Podrozdziale 4.2 autorka podaje bardzo techniczne warunki wystarczające na istnienie takiej gęstości. Rozdziały 5 i 6 zawierają zastosowania zaprezentowanej teorii. W Rozdziale 5 autorka omawia model dwuwymiarowego procesu opisującego ewolucję mRNA i białek w którym cząsteczki mRNA podlegają ciągłemu rozpadowi przerywanemy w losowych momentach, kiedy pojawiają się nowe cząsteczki z intensywnością zależną od aktualnego poziomu białek. W Rozdziale 6 mamy do czynienia z procesem fragmentacji. Wiadomo, że w takim procesie rozkład cząsteczek musi zmierzać do dystrybucji Diraca (pomnożenej przez x). Aby nadać tej teorii bardziej ilościową postać, poprzez odpowiednie skalowanie równanie fragmentacji można przekształcić do równania fragmentacji ze wzrostem. To podejście zostało zastosowane n.p. w pracy „General relative entropy inequality: An illustration on growth models, Journal des Mathematiques Pures et Appliquees, 84(9), 1235-1260'' autorstwa P. Michela, S. Mischlera i B. Perthama, gdzie do wykazania zbieżności zastosowali metde względnej entropii. W recenzowanej pracy autorka wykorzystuje fakt, że po opisanej wyżej transformacji otrzymujemy rozwiązanie transportu ze Markowowską perturbacją całkową, do którego można zastosować rozwiniętą teorię kawałkami deterministycznych procesów Markowa. Jak wspomniałem już na początku, zastosowanie tej teorii pozwala znacznie osłabić założenia, które pojawiały się w tym kontekście w literaturze przedmiotu. W szczególności, warunak na skończoność wartości oczekiwanej pierwszego skoku, przetłumaczony na język teorii fragmentacji okazuje się być warunkiem koniecznym i wystarczającym aby zachodziła zbieżność dowolnych rozwiązań równania fragmentacji do rozwiązania samopodobnego. Pracę kończy kilka przykładów, gdzie zostały policzone rozwiązania samopodobne dla równań znanych z literatury.

Jednakże, mając na uwadze dalszą karierę autorki, wydaje mi się, że warto zwrócić uwagę na pewne, moim zdaniem, braki w sposobie redagowania pracy. Ponieważ tematyka jest nietrywialna i dotyczy styku dwóch dziedzin matematyki, praca by bardzo zyskała gdyby autorka poświęciła więcej czasu na wyjaśnienie, skąd pewne struktury się biorą i po co sie je konstruuje oraz poświęciła więcej uwagi oznaczeniom – to, że zarówno operator stochastyczny i półgrupa oznaczane są tą samą literą P nie pomaga w czytaniu. Podobnie, ponieważ dowody twierdzeń mogą (wręcz być powinny) być czytane przez osoby będące niekoniecznie specjalistami w danej dziedzinie, powinny być one bardziej wyczerpujące, mieć wyraźniejszą strukturę i lepszy system odniesień, a nie stanowić serię puzzli do rozwiązania. Przykładowo:

- dowód Lematu 2.1 kończy się stwierdzeniem ...co prowadzi do sprzeczności z założeniem..., podczas gdy tak naprawdę sprzeczność uzyskujemy z nierównością 7 linijek wcześniej.
- W dowodzie Lematu 2.5 nie zaszkodziloby wyraznie zaznaczyc, gdzie dowodzimy równoważności (1) i (2), a gdzie (1) i (3) i napisać co zakładamy najpierw.
- W sformułowaniu Twierdzenia 4.2 pojawia się symbol $t_1$ – jeśli przyjmujemy, że definicja $t_n$ z Twierdzenia 4.1 jest tutaj wystarczająca, to po co ponownie definiować $t_1$ w Lemacie 4.3.
- W dowodzie lematu 4.3, na początku pojawia się zdanie ...więc aproksumując równanie (4.1)... – aproksymując w jakim sensie? Na pierwszy rzut oka, w równaniu (4.1) pojawiają się zupełnie inne obiekty niż w równaniu w dowodzie – np (4.1) zależy od czasu.
- Brakuje mi trochę porządnego operowania kwantyfikatorami. Np. W Rozdziale 5 rząd odpowiedniej macierzy jest sprawdzony dla $n = 2$, podczas gdy w definicji $\mathcal{O}^+(x)$ pojawia się $n \geq 1$ co by sugerowało, że warunek musi byc zachodzić dla każdego n.

Jest też trochę błędów edytorkich. Przykładowo:

- Str. 9 wydaje mi się, że nazwisko Nikodym powinno być pisane bez akcentu;
- W sformułowaniu Lematu 6.1 pojawia się skrót p.w., zaś w dowodzie jest p.n.?
- Str. 48, 8 linijka od dołu...jak naszymi metodami...;
- Str 49, 3 linijka od góry: polski cudzysłów jest inny;
- Str 53, 9-10 linijka od góry: W zasadzie jako, że..., więc... nie brzmi za dobrze;

Wyniki zaprezentowane w pracy doktorskiej są nietrywialne i znacznie pogłębiają nasze rozumienie procesów takich, jak fragmentacja. Dla mnie interesująca jest rola odgrywana w ogólnej teorii półgrup podstochastycznych przez operator $K= \lim_{\lambda\to 0}P(\varphi R(\lambda, A))$ który był raczej pomijany w analizie. Innym ciekawym problemem jest identyfikacja pewnych założeń nakładanych na proces Markowa w kontekscie opisu deterministycznego. Wyniki zaprezentowane w pracy zostały opublikowane, wspólnie z promotorką, w dwóch dobrych czasopismach. **Podsumowywując, uważam że praca spełnia wymagania stawiane przed praca doktorską i wnioskuję o nadanie pani mgr Weronice Biedrzyckiej stopnia doktora. Jakość wyników może stanowić podstawę do wszczęcia dyskusji, czy praca zasługuje na wyróżnienie.**

Prof. dr hab. Jacek Banasiak

Pretoria, 22 sierpnia 2018