Prof. dr hab. Piotr Koszmider,
Instytut Matematyczny,
Polskiej Akademii Nauk.

7 lipca 2017r.

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MAGISTRA SZYMONA DRAGI PT. "SUMOWALNOŚĆ I TYP POTĘGOWY INDEKSU SZLENKA SUM PROSTYCH PRZESTRZENI BANACHA"

1. Tematyka rozprawy doktorskiej

Głównym tematem pracy doktorskiej Pana magistra Szymona Dragi jest rozwijanie narzędzi topologicznych i analitycznych, które służą do badań nieskończenie wymiarowych przestrzeni Banacha.

Centralnym narzędziem, o którym tu mowa jest indeks Szlenka. Jest to wersja indeksu Cantora-Bendixsona, która może być owocnie stosowana w stosunku do kul dualnych niektórych przestrzeni Banacha z topologią słabą*. W przypadku idei Cantora-Bendixsona, zbiór pochodny uzyskuje się poprzez odrzucanie zbiorów otwartych, które mają małą średnicę w metryce dyskretnej, czyli są punktami izolowanymi. W przypadku pochodnej Szlenka odrzucamy zbiory słabo* otwarte, które mają małą średnicę w normie dualnej. Gdy rozważana przestrzeń Banacha jest Asplunda, po pewnej pozaskończonej ilości kroków zużyjemy całą kulę dualną. Liczba porządkowa, która określa ilość potrzebnych do tego zużycia kroków jest indeksem Szlenka przestrzeni Banacha X. Formalna implementacja tych idei wymaga pewnych dodatkowych parametrów, w szczególności rozpatrywania liczby $\varepsilon > 0$, która określi co znaczy zbiór mały w powyższych rozważaniach, określenia odpowiadającego ε-indeksu $Sz(X, \varepsilon)$ a nastçepnie zdefiniowania indeksu Szlenka $Sz(X)$ jako $\sup\{Sz(X, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$.

Autor rozprawy skupia się na pojęciach, które opisują jak wartość ε-indeksu Szlenka zależy od wyboru powyższego $\varepsilon > 0$ w przypadku gdy ε-indeksy Szlenka są wszystkie liczbami naturalnymi. W szczególności dwa pojęcia są podstawowe dla rozprawy, mianowicie pojęcie typu potęgowego indeksu Szlenka przestrzeni Banacha X:

$$p(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln Sz(X, \varepsilon)}{|\ln \varepsilon|}$$

oraz pojęcie przestrzeni Banacha z sumowalnym indeksem Szlenka, tj. takiej, dla której istnieje stała $M > 0$, gdzie iterowanie ε-pochodnej Szlenka dla zmiennych wartości $\varepsilon = \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ daje zawsze pustą iterowaną pochodną gdy $\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n > M$.

Wyniki pracy obracają się wokół zachowywania się powyższych pojęć gdy bierzemy nieskończone sumy przestrzeni Banacha lub podprzestrzenie ośrodkowe. Często założenia twierdzeń odnoszą się do asymptotyki przestrzeni Banacha X tj. asymptotycznego zachowania normy na podprzestrzeniach o wymiarze skończonym. Zagadnienia te na pierwszy rzut oka wydają się dość techniczne i specyficzne, jednakże nie jest to właściwe wrażenie. Ta tematyka została rozwinięta conajmniej dwie dekady temu przez takich wielkich badaczy geometrii przestrzeni Banacha jak

Godefroy, Kalton czy Lancien, a obecnie jest ona także rozwijana i leży bardzo blisko centrum zainteresowań młodych badaczy pierwszej klasy jak Causey, Beanland czy Motakis. Z drugiej strony tematyka ta jest dość wymagająca zarówno w sensie technicznym jak i ogólnej wiedzy z teorii przestrzeni Banacha.

2. Omówienie wyników rozprawy doktorskiej

Nie powtarzając bardziej technicznych sformułowań, poniżej omawiam poszczególne części rozprawy. Pierwsze dwa rozdziały mają charakter wprowadzający i głównie organizują podstawowe definicje i opisują obecne w literaturze techniki stosowane w dalszych częściach. Jednak elementy geometrii asymptotycznej, wiadomości na temat przenormowań oraz techniki związane z odwzorowaniami drzewowymi są dalekie od podstawowych czy elementarnych i należy podkreślić, iż ich swobodne opanowanie u autora rozprawy jest godne podziwu.

Wyniki dotyczące sumowalności indeksu Szlenka w sumach prostych przestrzeni Banacha zaprezentowane są w rozdziale trzecim. Główny wynik to Twierdzenie 3.14 mówiące, iż c_0-suma przestrzeni Banacha z jednakowo sumowalnym indeksem Szlenka ma sumowalny indeks Szlenka. To że wynik ten ogranicza się do c_0-sum jest dalece nieprzypadkowe, bowiem jeśli rozpatrujemy X-sumy dowolnych nieskończenie wymiarowych przestrzeni Banacha względem bazy 1-bezwarunkowej $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ przestrzeni X z sumowalnym indeksem Szlenka przy czym $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest równoważna bazie kanonicznej ℓ_1, to suma ta nie ma sumowalnego indeksu Szlenka (Stwierdzenie 3.17).

Rozprawa podaje tutaj kilka bardzo ciekawych przykładów zastosowań powyższych wyników jako kryterium nieizomorficzności przestrzeni Banacha. Np. mamy $\mathfrak{T}(c_0) \not\sim c_0(\mathfrak{T})$, $\mathfrak{T} \not\sim \mathfrak{T}(\mathfrak{T})$, $T(T) \not\sim T$, gdzie T jest przestrzenią Tsirelsona i $\mathfrak{T}$ jej przestrzenią dualną, tj. jest oryginalną przestrzenią Tsirelsona w nomenklaturze podrozdziału 1.5. Brak izomorfizmu wynika z tego, że jedna z przestrzeni ma sumowalny indeks Szlenka na mocy 3.14 a druga nie ma tej własności na mocy 3.17. Wydaje się, że autor nie bada jednak sum względem innych predualnych przestrzeni do ℓ_1 niż c_0.

Pozostałe części rozdziału trzeciego dotyczą sum prostych skończonych (zachowują one sumowalność indeksu Szlenka, 3.12) oraz sum przestrzeni skończenie wymiarowych, co do których jest udowodnione, iż zachowują one sumowalność indeksu Szlenka, jeśli sumujemy względem przestrzeni z sumowalnym indeksem Szlenka. Pierwszy z powyższych faktów oparty jest na Stwierdzeniu 3.10, które posiada żmudny i trudny dowód, który został w pełni samodzielnie opracowany przez doktoranta.

Wyniki dotyczące typu potęgowego indeksu Szlenka sum przestrzeni Banacha znajdują się w rozdziale czwartym. Jego pierwsze dwa podrozdziały to wprowadzenie do wielu głębokich wyników dotyczących norm i asymptotyki przestrzeni Banacha. W trzecim podrozdziale podane jest główne Twierdzenie 4.17 z imponującym dowodem. Twierdzenie to podaje wzór na typ potęgowy pewnych sum prostych pewnych przestrzeni Banacha. Założenia dotyczące sumy jak i przestrzeni są dość naturalne i dotyczą typów potęgowych jak i własności bazy bezwarunkowej oraz asymptotyki przestrzeni, względem której sumujemy. Następny podrozdział poświęcony jest analizie konieczności dość szczegółowych założeń Twierdzenia 4.17. Podane są szczegółowe i wyrafinowane przykłady. W ostatniem podrozdziale uzyskany jest ten sam wzór na typ potęgowy indeksu Szlenka sumy prostej przy dużo skromniejszych założeniach, ale za cenę rozważania jedynie skończenie wymiarowych składników sumy.

Przypadek nieośrodkowy jest potraktowany odrębnie w ostatnim, piątym rozdziale rozprawy, który jest w całości indywidualnym wkładem doktoranta. Główne jego wyniki, tj. Twierdzenia 5.2 i 5.3 sprowadzają przypadek nieośrodkowy do ośrodkowego. Okazuje się bowiem, iż przestrzeń Banacha ma sumowalny indeks Szlenka (odpowiednio, typ potęgowy indeksu Szlenka równy p) wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie jej podprzestrzenie ośrodkowe mają sumowalny indeks Szlenka (odpowiednio, wszystkie jej podprzestrzenie ośrodkowe powyżej pewnej podprzestrzeni ośrodkowej mają typ potęgowy indeksu Szlenka równy p). Następnie wyniki te są zastosowane w interesujących wnioskach 5.4, 5.5, 5.8, 5.10 i przykładzie 5.11.

Twierdzenia 5.4. i 5.5 dotyczą przeniesienia głównych wyników rodziałów 3 i 4 na przypadki nieośrodkowych składników sum prostych. Stwierdzenie 5.8 określa typ potęgowy indeksu Szlenka nieośrodkowych przestrzeni postaci $\ell_p(I)$ dla $p \in (1, \infty)$.

Ciekawe Twierdzenie 5.10 mówi, iż kwestia sumowalności indeksu Szlenka dla przestrzeni postaci $C(K)$ jest w pełni charakteryzowalna, mianowicie jest równoważna ze skończoną wysokością Cantora-Bendixsona przestrzeni K, co jest równoważne indeksowi Szlenka o wartości $\leq \omega$.

Interesujący przykład 5.11 nie wymaga jednak wyników Causeya czy Twierdzenia Samuela a główne twierdzenie rozdziału może być zastosowane w nim bezpoŕednio. Mianowicie fakt, iż ośrodkowe podprzestrzenie $C(K_A)$ są izometryczne z podprzestrzeniami $C([0, \omega^2])$, więc izomorficzne z podprzestrzeniami c_0, wynika już z tego, że przeliczalne rodziny prawie rozłączne można urozłącznić usuwając skończone fragmenty z każdego zbioru rodziny. W kwestii historycznej chciałbym wspomnieć, iż przestrzenie związane z rodzinami prawie rozłącznymi jak w przykładzie 5.11 były już rozważane przez Aleksandrowa i Urysohna wiele lat przed Mrówką.

Rezultaty opracowane w ostatnim rozdziale wymagają ogólnej kultury dotyczącej przestrzeni Banacha na profesjonalnym poziomie, ale w szczególności opierają się na Lemacie 5.1., którego udowodnienie wymagało od doktoranta dogłebnego zrozumienia zaawansowanych metod rozwiniętych przez G. Lanciena w pracy [25].

3. Ocena rozprawy

Poziom zredagowania rozprawy jest w pełni profesjonalny (ewentualnie brakuje indeksu oznaczeń i pojęć). Do tego należy podkreślić bardzo dobre wyczucie proporcji między formalizmem i elementami opisowymi jak i wyśmienite wprowadzanie czytelnika w główne idee ukryte za złożonym formalizmem. Miałem okazję słuchać referatów autora rozprawy i potwierdzam, że tak dojrzałe prezentowanie treści matematycznych nie jest jedynie wynikiem wkładu współautora publikacji wchodzących w skład rozprawy. Mgr. Draga dostrzega i kładzie odpowiedni akcent na istotne idee matematyczne jednocześnie mając pod kontrolą skomplikowane formalizmy. To świadczy o tym iż jest gotowy do samodzielnej pracy naukowej.

Rozprawa stanowi część pracy zbiorowej razem z promotorem pomocniczym dr Tomaszem Kochankiem, zatem wymagania ustawodawcy w stosunku do recenzenta dotyczą oceny wkładu doktoranta a nie oceny prac i wyników, które wchodzą w skład rozprawy. Zgodnie z Rozporządzeniem Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego w sprawie szczegółowego trybu i warunków przeprowadzania czynności w przewodzie doktorskim, w postępowaniu habilitacyjnym oraz w postępowaniu o nadanie tytułu profesora §6 pkt 5. w przypadku gdy rozprawę doktorską stanowi samodzielna i wyodrębniona część pracy zbiorowej, recenzja zawiera ocenę indywidualnego wkładu kandydata w powstanie tej pracy. W oparciu o oświadczenie współautora mamy w rozprawie doczynienia z samodzielnymi i wyodrębnionymi częściami pracy zbiorowej oraz z częściami, w których wkładu indywidualnego współautorów nie da się oddzielić. Oświadczenie jednak nie do końca określa czy w tych ostatnich częściach wkład współautora ograniczał się do takiego wkładu jaki jest normalny przy opiece naukowej (tj. niepociągający za sobą współautorstwa prac, gdyby nie było innych części, gdzie wkład promotora pomocniczego jest też jego indywidualny), czy też wykraczał poza te normy. Ta interesująca z punktu widzenia rezenzenta informacja jednak praktycznie zapewne jest nie do zdeterminowania w sposób obiektywny[1]. Z drugiej strony jednoznaczność ocenianego przypadku wyklucza taką potrzebę bowiem nie wpłynęłoby to istotnie na ogólną ocene wkładu doktoranta.

Biorąc pod uwagę powyższe rozważania, wkład współautora oraz analizę głównych wyników rozprawy oceniam indywidualny wkład doktoranta w uzyskanie wyników pracy jako w pełni zadawalający i więcej niż wystarczający. Ponadto, sama rozprawa pokazuje opanowanie przez doktoranta wielu zaawansowanych technik, literatury oraz swobodę w odkrywaniu nowych ciekawych twierdzeń. Wyniki rozprawy, już opublikowane w świetnych czasopismach o zasięgu globalnym, mają sporą szanse na odziaływanie z aktualnymi międzynarodowymi badaniami przestrzeni Banacha prowadzonymi we wielu ośrodkach naukowych.

4. Konkluzja

Stwierdzam, że rozprawa jednoznacznie i solidnie spełnia wszystkie wymogi Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki. Wnoszę o dopuszczenie Pana magistra Szymona Dragi do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Piotr Koszmider

[1]Pomimo niedoskonałości aktów prawnych, które jednoznacznie wymagają uzyskania oświadczeń i oparcia recenzji na wyodrębnionych i samodzielnych częściach prac zbiorowych, jeśli takie wchodzą w skład rozprawy, ich intencja jest bardzo pozytywna i moim zdaniem należy te intencje przestrzegać w recenzjach prac doktorskich. W ten spoób m. in. zniechęca się środowisko do praktyk dopisywania się promotorów jako autorów prac z doktorantami lub odwrotnie pisania doktoratów przez promotorów. Tutaj jestem nieco rozczarowany, że na tak poważnym uniwersytecie oświadczenie zostało początkowo przeoczone przez dziekanat. Z drugiej strony należy dodać, iż możliwość uczenia się w trakcie przygotowywania doktoratu nie tylko na poziomie opieki naukowej ale poprzez wspólne tworzenie pracy zbiorowej z bardziej doświadczonym matematykiem jest wspaniałą szkołą dla doktoranta. Często na świecie jest to jedna z form projektu doktorskiego także bez wyodrębniania wkładów indywidualnych, bowiem trudno oddzielić wkład tej samej osoby jako współpracownika i jako opiekuna. Polski ustawodawca jednak nie wziął tego pod uwagę określając zakres recenzji prac doktorskich, być może ze względu na wspomniane powyżej możliwe nadużycia.