prof. Grzegorz Plebanek
Instytut Matematyczny
Uniwersytetu Wrocławskiego
pl. Grunwaldzki 2/4, 50–384 Wrocław
e-mail: GRZES@MATH.UNI.WROC.PL

11 lipca 2017 roku

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Szymona Dragi
Sumowalność i typ potęgowy indeksu Szlenka sum prostych przestrzeni Banacha

1. Informacje ogólne

Rozprawa doktorska Szymona Dragi została napisana pod kierunkiem dr. hab. Janusza Morawca, pełniącego rolę promotora w przewodzie doktorskim autora rozprawy, oraz dr. Tomasza Kochanka, który jest promotorem pomocniczym. Całość składa się z pięciu rozdziałów, przy czym dwa pierwsze mają charakter wprowadzenia — autor przypomina w nich podstawowe pojęcia oraz referuje najważniejsze wyniki, których znajomość jest istotna przy lekturze dalszych części. Trzy następne rozdziały prezentują główne tezy rozprawy i opierają się w znacznej mierze na dwóch artykułach autorstwa Szymona Dragi i Tomasza Kochanka, opublikowanych niedawno w *Journal of Functional Analysis* oraz *Proceedings of the American Mathematical Society.*

2. Główne tezy rozprawy

Rozprawa poświęcona jest indeksowi Szlenka przestrzeni Banacha, a w szczególności zagadnieniom ilościowym związanym z przestrzeniami, których indeks Szlenka wynosi ω.

W rozdziale trzecim autor bada sumowalność indeksu Szlenka przestrzeni X, która jest c_0-sumą prostą $\bigoplus_n X_n$ ciągu ośrodkowych przestrzeni Banacha X_n. Główny wynik tej części (Twierdzenie 3.14) orzeka, że jeżeli przestrzenie X_n mają jednakowo sumowalny indeks Szlenka to X także ma sumowalny indeks. Dowód tego twierdzenia jest dość złożony. Pierwszy jego etap polega na udowodnieniu analogicznego faktu dla ciągu skończonego poprzez czysto geometryczne rachunki związane z pokrywaniem kuli w X^* za pomocą prostokątów. Przejście do przypadku sumy prostej nieskończonej istotnie wykorzystuje podejście z pracy Godefry, Kaltona i Lanciena, wiążące indeks Szlenka z istnieniem pewnych drzew złożonych z elementów X^*. W uzupełnieniu głównego wyniku autor wyjaśnia rolę pełnioną tu przez przestrzeń c_0.

W rozdziale czwartym badany jest typ potęgowy indeksu Szlenka, to znaczy asymptotyczne zachowanie definiujących go wielkości $Sz(X, \varepsilon)$ przy $\varepsilon \to 0^+$. Twierdzenie 4.17 podaje wzór na typ potęgowy $\mathfrak{E}$-sumy prostej $\bigoplus_n X_n$, gdzie $\mathfrak{E}$ jest przestrzenią z wyróżnioną baza bezwarunkową (o pewnych własnościach). Dowód tego rezultatu jest także dość złożony; wymagał on zastosowania szeregu faktów o bazach bezwarunkowych i sumach prostych oraz bardzo dokładnej ilościowej analizy pewnych wielkości związanych z drzewami w kuli przestrzeni sprzężonej.

Rozdział piąty poświęcony jest zagadnieniu ośrodkowej redukcji wcześniej rozważanych pojęć i wielkości. Na przykład Twierdzenie 5.2 orzeka, że dowolna przestrzeń Banacha X ma sumowalny indeks Szlenka wtedy i tylko wtedy gdy taką własność ma jej każda ośrodkowa podprzestrzeń

3. Ocena rozprawy i uwagi

Omawiania rozprawa doktorska zawiera kilka wartościowych i daleko niebanalnych twierdzeń o sumach prostych przestrzeni Banacha. W szczególności wyniki przedstawione w rozdziale trzecim stanowią naturalne i interesujące pogłębienie znanego faktu, że c_0 ma sumowalny indeks Szlenka. Twierdzenie 3.14 nie jest w tym świetle zaskakujące, ale jego dowód wymagał kilku dobrych pomysłów i precyzyjnych rozważań ilościowych.

Rezultaty przedstawione w rozprawie nie tyle odpowiadają na postawione w literaturze pytania, co raczej wynikają z naturalnego rozwoju pewnego nurtu badań prowadzonych przez szereg znanych matematyków. Rozumowania przedstawione w pracy wymagały znacznej biegłości analitycznej i umiejętnonego zastosowania wyrafinowanych narzędzi stosowanych w badaniu geometrii przestrzeni Banacha.

Widoczną zaletą rozprawy jako osobnego tekstu matematycznego jest jego stosunkowo duża kompletność. Autor nie ograniczył się do prostego zreferowania zawartości dwóch swoich opublikowanych artykułów, ale dość szczegółowo omówił cały szereg faktów i technik niezbędnych do rozumienia prowadzonych w dalszym ciągu rozumowań. Ponadto w każdym rozdziale głównym twierdzeniom towarzyszą interesujące wnioski i przykłady, które na przykład wyjaśniają wagę przyjmowanych założeń i umiejętnie komentują subtelności związane z uzyskanym rezultatem. Tekst rozprawy został starannie opracowany i napisany, zarówno pod względem logicznego układu, klarowności prowadzonych rozumowań jak i czysto edytorskim.

Lista moich uwag szczegółowych nie jest zbyt długa:

(i) Z nielicznych usterek edytorskich należy wymienić brak znaku sumy mnogościowej we wzorze występującym w Definicji 1.1.

(ii) Pisanie o matematyce po polsku zawsze przynosi wyzwania związane z tłumaczeniem terminologii. Stosowany w pracy termin *derywacja* jest tłumaczeniem może zbyt dosłownym — można go zastąpić terminem *pochodna*, jako że przyjęło sie w literaturze polskiej mówić o pochodnej przy rozważaniach dotyczących przestrzeni topologicznych rozproszonych.

(iii) Wprowadzone na początku rozdziału drugiego drzewa są oczywiście podrzewami $\mathbb{N}^{<\omega}$ wszystkich skończonych ciągów liczb naturalnych. Wydaje mi sie, że mówienie o ciągach (a nie o skończonych zbiorach) byłoby bardziej naturalne, na przykład stosowane pojęcie konkatenacji odnosi się raczej do ciągów skończonych. Poza tym wprowadzenie symbolu S_{n-1} przy dopuszczalnej wartości $n = \infty$ wygląda nieco niezręcznie. Rozumiem wszakże, że formalizm dotyczący drzew dość ściśle wzoruje się na pracy [15].

(iv) Warto odnotować, że Lemat 5.1 można udowodnić bezpośrednio i w nieco krótszy sposób, często stosowany przy tego typu redukcjach; poniżej podaję szkic odpowiedniej konstrukcji.

Niech X będzie przestrzenią Banacha i niech $K \subseteq B_{X^*}$ będzie *-słabo zwartym podzbiorem kuli, takim że $\iota_\varepsilon(K) \neq \emptyset$. Wtedy istnieje ośrodkowa przestrzeń $Y \subseteq X$ taka, że $\iota_\varepsilon(T^*[K]) \neq \emptyset$, gdzie $T : Y \to X$ jest identycznością.

W konstrukcji Y definiujemy rosnący ciąg $(Y_n)_n$ ośrodkowych podprzestrzeni i ciąg przeliczalnych zbiorów $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq B_X$, taki że I_n jest gęsty w kuli przestrzeni Y_n. Na kroku indukcyjnym rozważamy wszystkie zbiory postaci $K \cap V$ gdzie V jest zbiorem *-słabo zwartym wyznaczomy przez elementy z I_n. Powiększamy Y_n do Y_{n+1}, tak aby wszystkie takie zbiory $K \cap V$ miały niezmienioną średnicę po "zrzutowaniu" na Y_{n+1}; stosownie zwiększamy I_n do I_{n+1}. Wtedy $Y = \overline{\bigcup_n Y_n}$ jest szukaną przestrzenią.

Przy zastosowaniu tej konstrukcji nie będzie potrzeby, jak się wydaje, zamieniania stałej ε na $\varepsilon/4$.

(v) W pierwszej części dowodu Stwierdzenia 5.10 nie ma potrzeby odwoływania się do twierdzenia Albiaca-Kaltona. Wystarczy zauważyć że każda ośrodkowa podprzestrzeń $Y \subseteq C(K)$ zawiera się w izometrycznej kopii podprzestrzeni $C(L)$. gdzie (metryzowalna) przestrzeń L jest ciągłym obrazem K. Istotnie, jeżeli f_n są gęste w kuli jednostkowej Y to za L można przyjąć obraz K przy odwzorowaniu przekątniowym $K \to [-1,1]^{\mathbb{N}}$.

4. Konkluzja recenzji

Rozprawa doktorska mgr. Szymona Dragi zawiera oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, polegającego na zbadaniu indeksu Szlenka wybranych typów sum prostych przestrzeni Banacha. Nie ulega wątpliwości, że rozprawa spełnia wymagania ustawowe i wymagania środowiska matematycznego stawiane rozprawom doktorskim. Dlatego też wnoszę o dopuszczenie doktoranta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Jednocześnie sugeruję, aby Komisja Doktorska rozważyła możliwość wyróżnienia recenzowanej rozprawy. W moim odczuciu rozprawa zawiera wartościowe rezultaty opublikowane w bardzo dobrych czasopismach matematycznych. Oświadczenie dr. Tomasza Kochanka, który jest współautorem obu atykułów podkreśla istotny wkład doktoranta w ich powstanie.

G. Plebanek