mgr Piotr Helbin
Zakład Informatyki i Matematyki Dyskretnej
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii
Uniwersytet Śląski w Katowicach

Katowice, 6 maja 2017 r.

Praca doktorska

Implikacje rozmyte generowane z kopuł

Streszczenie

Celem następującej rozprawy doktorskiej jest uporządkowanie informacji o implikacjach rozmytych generowanych z dwuwartościowych kopuł, bądź z funkcji ogólniejszych (np. z semikopuł). Kopuły są ważnymi funkcjami w probabilistyce. Ważność kopuł w rachunku prawdopodobieństwa wynika z twierdzenia Sklara, które mówi, że dla wspólnej dystrybuanty H zmiennych losowych $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ (dla $n \geq 2$) z dystrybuantami brzegowymi $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ istnieje taka kopuła $C\colon [0,1]^n \to [0,1]$, że dystrybuantę H można zapisać w następującej postaci

$$H(x_1, x_2, \dots x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots F_n(x_n)), \qquad x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}.$$

Jeżeli dystrybuanty $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ są ciągłe, to kopuła C jest jedyna. Ponadto, gdy funkcja H jest zdefiniowana za pomocą powyższego wzoru, to jest wspólną dystrybuantą z dystrybuantami brzegowymi $(F_i)_{1\leq i\leq n}$. W pracach [7], [8] Grzegorzewski wprowadził cztery nowe klasy implikacji rozmytych, oparte na kopułach wykorzystując twierdzenie Sklara. Mianowice, implikacje probabilistyczne, implikacje s-probabilistyczne, implikacje dualne oraz implikacje s-dualne. W pracy [5] autorzy, w podobny sposób jak Grzegorzewski, wprowadzili nową rodzinę implikacji opartych na kopułach, tak zwane implikacje warunkowe. Okazuje się, że klasa funkcji $J_{I,B}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ (zaprezentowana pierwszy raz na konferencji IFSA-EUSFLAT 2015 [2]) następującej postaci

$$J_{I,B}(x, y) = I(x, B(x, y)), \qquad x, y \in [0,1],$$

gdzie I jest implikacją rozmytą, a B semikopułą, uogólnia wszystkie cztery klasy implikacji generowanych z kopuł wprowadzone przez Grzegorzewskiego.

Rozdział I zawiera informacje wstępne dotyczące podstawowych spójników logicznych, kopuł, qausikopuł i semikopuł wraz z ich najważniejszymi własnościami oraz kilka przydatnych własności funkcji rzeczywistych.

Rozdział II jest poświęcony rozwiązaniu równania Franka [6], który to dowód jest rzadko prezentowany w monografiach, ale t-normy Franka, które są rozwiązaniem równania Franka, są dość często przytaczane w wielu pracach. Ponadto okazuje się, że wiele równań dla kopuł, wynikających z odpowiednich własności dla implikacji s-probabilistycznych, można rozwiązać wykorzystując t-normy Franka. Dlatego też prezentujemy pełny dowód rozwiązania równania Franka.

Rozdział III jest poświęcony omówieniu dwóch ważnych klas implikacji. Pierwszą z nich są implikacje indukowane z semikopuł. Implikacje indukowane były znane dużo wcześniej w literaturze (por. [4]). Przez implikację indukowaną z t-normy T rozumiemy funkcję $I_T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następującej postaci

$$I_T(x, y) = \sup\{t \in [0,1] \mid T(x,t) \leq y\}, \qquad x, y \in [0,1].$$

W zastosowaniach wymóg t-normy dla implikacji indukowanej jest dość „kłopotliwy”, ze względu na łączność t-norm. Dlatego zachodzi potrzeba rozważenia implikacji indukowanych generowanych z semikopuł. Semikopuły nie wymagają warunku łączności. Ponadto do klasy semikopuł należą t-normy, kopuły i quasikopuły. Drugą z klas implikacji omawianych w rozdziale III są funkcje wspomniane już wcześniej, mianowicie funkcje postaci $I(x, B(x, y))$, gdzie I jest implikacją rozmytą, a B jest semikopułą. Przedstawione własności tej klasy funkcji bazują na wynikach pracy [3] uzyskanych przez Autora we współpracy z M. Baczyńskim, R.Mesiarem, P. Grzegorzewskim, W. Niemyską.

W rozdziale IV pokazano jak przy pomocy twierdzenia Sklara można otrzymać takie funkcje jak implikacje probabilistyczne, s-probabilistyczne, warunkowe, dualne oraz s-dualne. Ponadto przedstawiano podstawowe własności tych klas funkcji.

W ostatni rozdziale V zaprezentowane są nowe wyniki z pracy [1], uzyskane przez Autora we współpracy z M. Baczyńskim, P. Grzegorzewskim, W. Niemyską oraz nieopublikowane wyniki uzyskane przez Autora. W skład tych wyników wchodzą takie własności implikacji z rozdziału IV jak prawa kontrapozycji, prawo importacji, T-conditionality oraz przecięcia klas tych funkcji z innymi znanymi klasami implikacji rozmytych.

Literatura

[1] M. Baczyński, P. Grzegorzewski, P. Helbin, and W. Niemyska. Properties of the Probabilistic Implications and S-Implications. *Information Sciences*, 331:2–14, 2016.

[2] M. Baczyński, P. Grzegorzewski, and R. Mesiar. Fuzzy implications based on semicopulas. In *IFSA-EUSFLAT 2015*, pages 792–798, Amsterdam, 2015.

[3] M. Baczyński, P. Grzegorzewski, R. Mesiar, P. Helbin, and W. Niemyska. Fuzzy implications based on semicopulas. *Fuzzy Sets and Systems*, 2016. accepted, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.fss.2016.09.009.

[4] G. Birkoff. *Lattice Theory.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 3rd edition, 1967.

[5] A. Dolati, J.F. Sánchez, and M. Úbeda Flores. A copula-based family of fuzzy implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 211:51–61, 2013.

[6] M.J. Frank. On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$. *Aequationes Mathematicae*, 19:194–226, 1979.

[7] P. Grzegorzewski. Probabilistic implications. In *EUSFLAT-2011 and LFA-2011*, pages 254–258, Amsterdam, 2011.

[8] P. Grzegorzewski. Survival implications. In S. Greco, B. Bouchon-Meunier, G. Coletti, M. Fedrizzi, B. Matarazzo, and R.R. Yager, editors, *IPMU 2012, Part II*, volume 298 of *Communications in Computer and Information Science*, pages 335–344, 2012.