Łódź, dn. 25 maja 2018 r.

dr hab. Szymon Głąb
Instytut Matematyki
Politechnika Łódzka

Recenzja pracy doktorskiej Pani mgr Marty Walczyńskiej pt. „Zastosowania teorii kategorii w topologii ogólnej"

Rozprawa zawiera rozważania na temat granic i kogranic ciągów struktur skończonych (dokładniej zbiorów lub porządków) w ujęciu teorii kategorii.

Praca zaczyna się od Wprowadzenia. Autorka zarysowuje przedmiot rozprawy, czyli powiązania topologii i teorii kategorii. We Wprowadzeniu zawarte są wybrane fakty – użyteczne w dalszej części dysertacji – z teorii mnogości.

Rozdział drugi zawiera podstawowe definicje z teorii kategorii. Rozdział konieczny dla każdego, kto, tak jak ja, nie miał okazji bliżej jej poznać, a chciałby zrozumieć dalsze wywody.

W rozdziale trzecim Autorka bierze na warsztat dowód twierdzenia Knastera–Reichbacha, które mówi o tym, że każdy homeomorfizm pomiędzy nigdziegęstymi podzbiorami domkniętymi przestrzeni Cantora można przedłużyć do autohomeomorfizmu całej przestrzeni Cantora. Wykorzystywany jest fakt, że każda zwarta zerowymiarowa przestrzeń metryzowalna jest granicą odwrotną ciągu przestrzeni skończonych. Kategoryjny dowód twierdzenia Knastera–Reichbacha jest dobrym wprowadzeniem z jednej strony do tytułowych zastosowań teorii kategorii, a z drugiej do rozważań zawartych w rozdziale szóstym. Na koniec w podrozdziale 3.3 podany jest nowy dowód innego twierdzenia Knastera–Reichbacha dla zwartych przeliczalnych przestrzeni metrycznych. Dowód ten jest czysto topologiczny, bez języka teorii kategorii.

Rozdział czwarty zawiera wyniki opublikowane wspólnie z Wojciechem Bielasem i Szymonem Plewikiem w pracy *On the center of distances*, European Journal of Mathematics 4(2) (2018), 687–698. Dotyczą one tzw. Cantorvali symetrycznych. Metody dowodowe nie mają w sobie nic z teorii kategorii. Rozdział ten ma dość luźny związek z resztą pracy i jej tytułem. Związek ten ujawnia się w rozdziale ósmym, gdzie wspomniane jest, że granicę ciągu Fraïssé w kategorii $\mathbf{S}_{\leq}$ można interpretować jako symetryczny Cantorval.

Rozdział piąty zawiera kolejną dawkę wiedzy na temat teorii kategorii. Zawartość tego rozdziału nie jest konieczna do zrozumienia dalszego ciągu pracy, gdyż przedstawione tam pojęcia nie są później wykorzystywane. W moim odczuciu można było włączyć zawartość tego rozdziału do rozdziału drugiego lub usunąć.

Rozdział szósty dotyczy ciągów ciągów Fraïssé i ich granic. Zdefiniowane są ciągi Fraïssé i pokazane jest, że kogranice ciągów Fraïssé ustalonej kategorii są izomorficzne. Następnie podane jest kryterium istnienia ciągu Fraïssé, którego dowód to zastosowanie topologii w teorii

Sz. Głąb

kategorii. Podrozdział 6.2 dotyczy ciągów Fraïssé w kategorii $\mathbf{Finset}^{op}/A$. Dzięki odwróceniu kierunku strzałek granicę odwrotną ciągu przestrzeni skończonych można rozważać jako kogranicę ciągu induktywnego zbiorów skończonych. Autorka przedstawia teoriokategoryjną charakteryzację tych odwzorowań $\Omega : A \to 2^\omega$ będących zanurzeniami podzbiorów nigdziegęstych domkniętych $A \subset 2^\omega$, których obraz $\Omega[A]$ jest nigdziegęsty. Jest to rozszerzenie tezy twierdzenia Knastera–Reichbacha, bo każdy z trzech równoważnych warunków przedstawionych w Twierdzeniu 35 implikuje, że odwzorowanie Ω daje się rozszerzyć do autohomeomorfizmu. Następnie zostają sformułowane i udowodnione w oparciu o Twierdzenie 35 dwa nowe sformułowania twierdzenia Knastera–Reichbacha.

Pierwsze moje spotkanie z odwrotną kategorią przecinkową $\mathbf{Finset}^{op}/A$ było dość trudne – obiekty to strzałki, a strzałki działają w odwrotnym kierunku. Wydaje się, że doktorantka mogła zawrzeć więcej przykładów i opisów zanim przeszła do dowodów. Niektóre rozumowania wydają się zbyt skrótowe. Na przykład implikacja (2)$\Rightarrow$(3) w twierdzeniu 35: Aby skorzystać z Lematu 34 należy sprawdzić wszystkie założenia. Nie jest to specjalnie trudne, ale nie należało tego zostawiać czytelnikowi. Zdanie „Skoro pullback w kategorii **Finset** jest również pullbackiem w kategorii **Top**, to kategoria $\mathbf{Finset}^{op}/A$ ma własność amalgamacji" jest dla mnie niezrozumiałe. Własność amalgamacji łatwo można sprawdzić wprost z definicji. Poza tym jest to jedyne miejsce w rozprawie, gdzie Autorka korzysta z pullbacku. Pozostałe pojęcia wprowadzone z rozdziale piątym nie są wspomniane ani razu w rozprawie.

Rozdział siódmy zawiera przedstawienie podstawowych pojęć i faktów z odwrotnej teorii Fraïssé.

W ostanim ósmym rozdziale rozważane są kategorie ZP-par: $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_{\leq}$ oraz $\ddagger\mathbf{LO}$. Wprowadzone są pojęcia właściwej i semiwłaściwej amalgamacji. Wykazane zostało, że kategoria $\mathbf{S}_{\leq}$ ma własność amalgamacji. Dalej okazuje się, że możliwe jest przedstawienie każdej pary (A, K), gdzie A jest przeliczalnym podzbiorem zwartej zerowymiarowej przestrzeni metryzowalnej K jako granicy pewnego ciągu w kategorii $\mathbf{S}$. W końcu wykazane zostaje, że $\ddagger\mathbf{LO}$ ma semiwłaściwą amalgamację, ale nie ma właściwej amalgamacji. Reszta rozdziału, to opowieści o tym, co zostanie jeszcze w przyszłości udowodnione używając kategorii ZP-par.

Ocena nowatorskiego wkładu rozprawy jest niełatwa. Autorka przedstawiła dowód twierdzenia Knastera–Reichbacha w duchu teorii kategorii. Następnie idee tam zawarte zastosowała w rozdziale szóstym, gdzie pojawiają się wariacje na temat twierdzenia Knastera–Reichbacha. Szkoda, że narzędzi tych nie udało się wykorzystać do pokazania lub wzmocnienia wyników czysto topologicznych. Zawartość ostatniego rozdziału, dla mnie najbardziej interesującego, jest niedokończona i pozostawia niedosyt. Mam nadzieję, że ten obiecujący projekt będzie kontynuowany przez Autorkę w najbliższych latach. Nowatorski i skończony jest rozdział czwarty dotyczący Cantorvali. Nie koresponduje on jednak z tytułowym kategoryjnym charakterem pracy. Nieco dyskusyjne jest, czy Twierdzenie 35 (jeden z głównych wyników rozprawy) można potraktować jako zastosowanie teorii kategorii w topologii. Takie zastosowanie wyobrażałem sobie jako dowód czysto topologicznego stwierdzenia przy użyciu metod teoriokategoryjnych. W twierdzeniu 35 proste stwierdzenie, że *obraz* $\Omega[A]$ *jest nigdziegęsty w zbiorze Cantora* 2^ω okazuje się być równoważne stwierdzeniu, że pewien ciąg induktywny jest ciągiem Fraïssé w kategorii $\mathbf{Finset}^{op}/A$, co jest skomplikowanym zdaniem zawierającym pojęcia z teorii kategorii.

Zabrakło mi w rozważaniach z rozdziału ostatniego większej ilości informacji na temat granicy Fraïssé dla $\mathbf{S}_{\leq}$. Nie wiadomo, jakie własności granic w kategorii ZP-par ulegają wzmocnieniu, jeśli zamiast amalgamacji mamy semiwłaściwą lub właściwą amalgamację. Ta część to w znacznej mierze niedokończony projekt. Takie wrażenie można odnieść czytając dowody kolejnych faktów niezakończonych wnioskami. Pisze też o tym wprost Autorka.

Przedstawienie wyników jest niewątpliwie bardzo czytelne i zawiera dobry materiał wstępny do kategoryjnej teorii granic Fraïssé. Mam wrażenie, że Autorka starała się napisać pracę tak, jak chciałaby, by wyglądały naukowe artykuły. Można by w oparciu o jej dysertację, po dołożeniu większej liczby przykładów, skonstruować ciekawy i zrozumiały dla studentów wykład.

Dorobek doktorantki składa się z trzech opublikowanych artykułów. Ich tematyka rozmija się z tematyką rozprawy – nie dotyczą zastosowań teorii kategorii.

Z obowiązku recenzenta wspomnę jeszcze o kilku błędach literowych:
str. 67 w sformułowaniu Lematu 34 powinno być: jest mała względem **kogranicy**.
str. 68 warunek (2) w Twierdzeniu 35: formalnie ciągiem Fraïssé jest $(S_n \to S_m)_{m \leq n < \omega}$, a nie $(s_n\Omega : A \to S_n)$.
str. 71^5 powinno być $s_{n_{k+1}}$ a nie $s^{\infty}_{n_{k+1}}$.
str. 77^7 powinno być $j : U \to A'$ zamiast $j : A' \to Y$; ponadto zdanie, w którym użyty jest ten symbol jest niegramatyczne.
str. 79 na każdym z czterech diagramów przestrzeń Y na dole diagramu powinna być zastąpiona przez przestrzeń Z.
str. 86_8 powinno być $U \in \mathcal{R}_n$ zamiast $U \in \mathcal{U}_n$.

Uważam, że Autorka ma szanse na dalszą owocną karierę naukową. Uwagi krytyczne zawarte w tej recenzji nie mają wpływu na moją **pozytywną ocenę omawianej pracy**. Uważam że **spełnia ona kryteria stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej Autorki do dalszych etapów przewodu doktorskiego**.

25.05.2018
Szymon Głąb