RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ „ZASTOSOWANIA TEORII KATEGORII W TOPOLOGII OGÓLNEJ" AUTORSTWA MGR MARTY WALCZYŃSKIEJ

Ocena rozprawy

Recenzowana rozprawa dotyczy pewnych zagadnień z topologii ogólnej, analizy rzeczywistej i teorii kategorii. W pracy przedstawiono wyniki dotyczące operacji Kuratowskiego (tzn. operacji domykania i dopełniania zbiorów w przestrzeni topologicznej), wyniki związane z silną jednorodnością (topologiczną i miarową) zbioru Cantora, analizę zbiorów typu Cantorval (związanych ze zbiorami podsum szeregów zbieżnych), twierdzenie dotyczące ciągów mających te same punkty skupienia (będące uogólnieniem twierdzenia von Neumanna) oraz pewne ogólne twierdzenia o własnościach pewnych kategorii, z których wynika istnienie ciągów Fraïsségo i istnienie obiektów uniwersalnych. Uzyskane wyniki pokazują, że rozprawa stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego. Badania rozważanych zagadnień przeprowadzono używając różnorodnych pojęć matematycznych, w tym pojęć teorii mnogości, topologii i teorii kategorii (np. doktorantka używa drzew i przestrzeni gałęzi, metody back-and-forth, granic ciągów odwrotnych, pochodnej i rangi Cantora-Bendixsona, diagramów i stożków nad diagramami, ciągów i granic Fraïsségo). Zastosowanie rozmaitych metod pokazuje, że autorka wykazuje ogólną wiedzę teoretyczną w dyscyplinie matematyka. Wyniki umieszczone w rozprawie pokazują, że autorka posiada umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Ponadto zagadnienia badane przez doktorantkę wpisują się w tematykę rozważaną przez innych matematyków.

W mojej ocenie rozprawa spełnia wszystkie warunki konieczne do uzyskanie stopnia doktora nauk matematycznych zawarte w ustawie.

Szczegółowe uzasadnienie oceny

W rozdziale 1 autorka wspomina o swoich wynikach opublikowanych w artykule [8], które dotyczą operacji Kuratowskiego (tzn. operacji domykania i dopełniania zbiorów w przestrzeni topologicznej). W 1922 roku Kuratowski udowodnił, że jeśli na dowolnym zbiorze wykonujemy operacje domykania i dopełnienia dowolną liczbę razy, to otrzymamy maksymalnie 14 różnych zbiorów. Zbiór wszystkich operacji Kuratowskiego z działaniem składania jest monoidem. Autorka podaje tablicę Cayleya tego monoidu, a następnie zauważyła, że grupa automorfizmu tego monoidu jest grupą $\mathbb{Z}_2$. Ostatnio operacjami Kuratowskiego zajmowali się Banakh

Fil-y

i in. w artykule [1], gdzie przedstawili wyniki związane z operacjami Kuratowskiego zastosowanymi do kilku topologii na tym samym zbiorze.

W podrozdziale 1.2.1 autorka analizuje drzewa wysokości ω oraz przestrzenie gałęzi takich drzew. W szczególności podaje dowody, że przestrzeń gałęzi jest zupełna oraz każda zerowymiarowa, ośrodkowa przestrzeń zupełna jest przestrzenią gałęzi pewnego drzewa. Następnie analizuje przestrzenie zupełne nieośrodkowe i podaje dowód, że taka przestrzeń jest ciągłym obrazem przestrzeni Baire'a o ciężarze równym wadze badanej przestrzeni. Jak sama autorka napisała, fakty podane przez nią w tym podrozdziale powinny być zaliczone do tzw. folkloru matematycznego. Zakładam, że dowody tych faktów zostały umieszczone w rozprawie, ponieważ autorka nie znalazła żadnej publikacji zawierającej dowody tych faktów.

W podrozdziale 1.2.1 autorka wspomina również o swoim artykule [9], gdzie przedstawiła uogólnienia pewnych faktów dotyczących przeliczalnych przestrzeni metrycznych na przypadek nieośrodkowy.

W rozdziale 2 autorka przypomina pojęcia teorii kategorii, które wykorzystuje w dalszej części rozprawy. Na stronie 21 w tabelce z kategoriami powinno być, że dla kategorii **P** obiektami są elementy zbioru P. Na stronie 23_6 powinno być „obiekt słabo początkowy" zamiast „obiekt słabo końcowy". Na stronach 25_{15}, 25_6 i innych autorka pisze o „kategorii stożków". Pojęcie stożka zostało wcześniej wprowadzone, więc można przyjąć, że to będą obiekty kategorii stożków, ale nigdzie nie jest napisane czym są strzałki i operacje w tej kategorii.

W rozdziale 3 autorka analizuje dowód twierdzenia Knastera-Reichbacha, mówiącego, że przestrzeń Cantora jest, w pewnym sensie, silnie jednorodna. Przypomnijmy, że przestrzeń topologiczna jest jednorodna, gdy dla dowolnych dwóch punktów tej przestrzeni istnieje homeomorfizm przekształcający jeden z tych punktów na drugi. W 1953 roku Knaster i Reichbach udowodnili w pracy [4], że każdy homeomorfizm pomiędzy domkniętymi i nigdziegęstymi podzbiorami przestrzeni Cantora można rozszerzyć do homeomorfizmu całej przestrzeni Cantora.

W podrozdziale 3.1 autorka prezentuje konstrukcję zbioru Cantora jako granicy odpowiedniego ciągu odwrotnego. Należy zaznaczyć, że konstrukcja taka nie jest nowa – pojawia się np. w książce [12, strona 213, twierdzenie 29.15]. Wydaje się, że celem autorki w tym podrozdziale było przedstawienie tej konstrukcji wraz z uwypukleniem miejsc, w których można tę konstrukcję wypowiedzieć używając pojęć teorii kategorii (stożków, diagramów, itp.).

W podrozdziale 3.2 autorka prezentuje dowód twierdzenia Knastera-Reichbacha wykorzystując granice systemów odwrotnych. Należałoby dopisać, że dowód używający granic odwrotnych pojawił się wcześniej w pracy Salachny [11]. Zakładam, że doktorantka nie znała tej pracy i dlatego prezentuje konstrukcję wraz z dowodami potrzebnych własności. Z drugiej strony, do pracy Salachny można dotrzeć dość łatwo używając MathSciNetu (wystarczy przejrzeć prace, których „review" w MathSciNecie cytują artykuł Knastera-Reichbacha – link do tych prac jest w prawym górnym rogu, gdy przeglądamy „review" pracy Knastera-Reibacha w MathSciNecie).

Ostatnio Korch [5], odpowiadając na pytanie Kubisia, podał warunki wystarczające na rozszerzanie homeomorfizmów z pewnych domkniętych i nigdziegęstych podzbiorów uogólnionej przestrzeni Cantora 2^κ na całą przestrzeń dla pewnych liczb kardynalnych $\kappa > \omega$.

W podrozdziale 3.3 autorka omawia pewne uogólnienie twierdzenia Knastera-Reichbach dotyczące rozszerzania homeomorfizmów α-tych pochodnych Cantora-Bendixsona danych przestrzeni na całe przestrzenie. W tym przypadku zakładamy, że wyjściowe przestrzenie są przeliczalnymi metrycznymi przestrzeniami zwartymi, a α-te pochodne są zbiorami nigdziegęstymi. Przynajmniej dowód takiego twierdzenia jest przedstawiony na stronach 40 i 41 – niestety autorka nie napisała treści tego twierdzenia, a jedynie napisała, że jest to inny dowód twierdzenia z pracy Knastera-Reichbacha, którego treść podała na stronie 37. Niestety w założeniach podanego na stronie 37 twierdzenia autorka pominęła (wpisując „ ... ") pewne założenia, których spełnienie w wersji twierdzenia dowodzonego przez autorkę nie jest w żaden sposób skomentowane. W dowodzie powyższego twierdzenia autorka wykorzystuje twierdzenie Mazurkiewicza-Sierpińskiego [10] (mówiące, że przeliczalne zwarte przestrzenie metryczne są homeomorficzne z przeliczalnymi liczbami porządkowymi wyznaczonymi przez rangę Cantora-Bendixsona danej przestrzeni).

W przypadku uogólnienia twierdzenia Knastera-Reichbacha i twierdzenia Mazurkiewicza-Sierpińskiego autorka przedstawia inne dowody tych znanych twierdzeń. W mojej opinii nowe dowody znanych twierdzeń stanowią oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, jednakże, o ile w przypadku nowego twierdzenia wystarczy dowód, to w przypadku innego dowodu znanego twierdzenia przydałaby się dokładna analiza na czym polega różnica między tymi dowodami.

W rozdziale 4 autorka przedstawiła wyniki dotyczące zbiorów podsum szeregów liczbowych bezwzględnie zbieżnych (zwanych „Cantorvalami") oraz wyniki dotyczące zbiorów możliwych odległości między elementami przestrzeni metrycznej (zwane „centers of distances"). Wyniki z tego rozdziału pochodzą z artykułu [2], gdzie autorzy podają twierdzenia łączące oba pojęcia. Niestety w rozprawie zabrakło jakiejkolwiek uwagi mówiącej dlaczego wyniki dotyczące „centers of distances" znajdują się w rozdziale o „Cantorvalach".

Tematyka związana ze zbiorami podsum szeregów jest cały czas obecna w pracach innych matematyków (np. pewne wyniki otrzymali matematycy łódzcy: Bartoszewicz, Filipczak i Głąb). To pokazuje, że zagadnienia badane przez doktorantkę wpisują się w tematykę rozważaną przez innych matematyków.

W podrozdziale 4.1 autorka opisuje podsumy szeregów bezwzględnie zbieżnych. Przypomnijmy, że Guthrie i Nymann udowodnili w artykule [3], że zbiór możliwych podsum szeregu liczbowego bezwzględnie zbieżnego może mieć jedną z 3 postaci: jest sumą skończonej rodziny przedziałów domkniętych lub jest zbiorem zwartym całkowicie niespójnym i doskonałym lub jest zwartym zbiorem regularnie domkniętym takim, że końce składowych nietrywialnych są punktami skupienia składowych trywialnych. Zbiory trzeciej postaci nazywane są Cantorvalami symetrycznymi. O ile Cantorval symetryczny, który jest zbiorem podsum szeregu bezwzględnie zbieżnego jest zbiorem symetrycznym, to dowolny Cantorval symetryczny nie musi być symetryczny. Powstaje pytanie dlaczego zbiory, które nie są symetryczne nazywać symetrycznymi. Nie jest to oczywiście pytanie do doktorantki, tylko do Niteckiego, który w artykule [6] wprowadził taką nazwę.

Powyższy opis możliwych zbiorów podsum szeregów bezwzględnie zbieżnych jest pełnym opisem topologicznym. Rzeczywiście, dobrze wiadomo, że dowolne dwa zbiory zwarte, całkowicie niespójne i doskonałe są homeomorficzne (ze zbiorem trójkowym Cantora), a Guthrie, Nymann i Sáenz udowodnili w artykułach [3] i [7], że każde dwa Cantorvale są homeomorficzne.

Ciekawym przykładem Cantorvala jest zbiór otrzymany w sposób podobny do zbioru trójkowego Cantora. Mianowicie, konstruując zbiór trójkowy Cantora „wyrzucamy" w n-tym kroku sumę odpowiednich 2^n odcinków otwartych. Jeżeli w tej konstrukcji będziemy „wyrzucać" tylko odcinki w krokach parzystych, to otrzymamy Cantorval symetryczny. Otrzymany zbiór jest topologicznie tym samym, co każdy inny Cantorval, ale geometryczne własności różnych Cantorvalów mogą być inne. W podrozdziale 4.1 autorka opisuje pewne geometryczne własności Cantorvala $\mathbb{X}$ rozważanego przez Guthrie i Nymann w artykule [3]. W szczególności, doktorantka dowodzi, że $\mathbb{X}$ zawiera przedział $[2/3; 1]$ co jest wzmocnieniem wyniku uzyskanego przez Guthrie i Nymann (oni pokazali, że $\mathbb{X}$ zawiera przedział $[3/4; 1]$). Dowód tego zawierania jest wieloetapowy, technicznie skomplikowany i wymagał dużej biegłości w konstruowaniu odpowiednich podszeregów.

W tym podrozdziale autorka podaje również bardzo ciekawą charakteryzację Cantorvalów. Mianowicie zbiór jest Cantorvalem symetrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem regularnie domkniętym, którego brzeg jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora. Używając tej charakteryzacji doktorantka podaje „kategoryjny" dowód twierdzenia Guthrie, Nymann i Sáenz mówiącego, że każde dwa Cantorvale są homeomorficzne (przy czym istnieje homeomorfizm zachowujący naturalny porządek na prostej). Dowód przedstawiony przez doktorantkę jest bardzo ładny. Wspomniana powyżej charakteryzacja Cantorvalów pozwala doktorantce wykazać, że rodziny składowych wnętrza Cantorvala i wnętrza dopełnienia Cantorvala są porządkowo izomorficzne ze zbiorem liczb wymiernych. A to z kolei pozwala jej wykorzystać metodę back-and-forth do konstrukcji szukanego homeomorfizmu.

W podrozdziale 4.2 autorka dowodzi pewne uogólnienie twierdzenia von Neumanna. Mianowicie pokazuje ona, że jeżeli mamy dwa ciągi (x_n) i (y_n) w przestrzeni metrycznej zwartej i ciągi te mają ten sam zbiór punktów skupienia, to dla każdej liczby α będącej odległością jakichkolwiek dwóch punktów skupienia tych ciągów istnieje permutacja π taka, że odległości $d(x_n, y_{\pi(n)})$ dążą do α. Sam dowód jest dość prosty i wykorzystuje metodę back-and-forth.

Fil

W rozdziale 5 autorka przypomina kolejne pojęcia z teorii kategorii, które wykorzystuje w dalszej części rozprawy.

Na początku rozdziału 6 i w podrozdziale 6.1 autorka przypomina pojęcie ciągów Fraïsségo i jego granic. Podaje tam znane twierdzenia np. o jednoznaczności granic Fraïsségo oraz o istnieniu ciągów Fraïsségo. Nie wiem dlaczego autorka umieszcza tam również dowody tych znanych twierdzeń. Moim zdaniem, nie powinna ich umieszczać w rozprawie doktorskiej (wystarczyło zacytować odpowiednie źródło).

W podrozdziale 6.2 autorka charakteryzuje pewne zanurzenia domkniętych i nigdziegęstych podzbiorów zbioru Cantora w zbiór Cantora. Charakteryzacje te są wypowiedziane w języku ciągów Fraïsségo oraz w języku przedłużania obiektów odpowiedniej kategorii. Dowód tych charakteryzacji wymaga bardzo dobrej znajomości technik dowodowych związanych z teorią kategorii. Następnie doktorantka wykorzystuje te charakteryzacje do podania kolejnych „kategoryjnych" dowodów twierdzenia Knastera-Reichbacha.

W rozdziale 7 autorka przypomina m.in. pojęcia kategorii Fraïsségo oraz obiektów generycznych w takich kategoriach. Następnie podaje warunki wystarczające na istnienie i jedyność obiektów generycznych oraz podaje własności takich obiektów (uniwersalność i jednorodność).

Teoria kategorii Fraïsségo jest obecnie wykorzystywana przez różnych matematyków w celu znajdowania jednorodnych struktur uniwersalnych w danej kategorii. Ze znanych matematyków wykorzystujących tę teorię w swoich badaniach można wymienić m.in. Kechrisa, Kubisia, Soleckiego i Todorčevica.

W rozdziale 8 autorka umieściła pewne własności kategorii ZP-par związanych z kategorią zbiorów skończonych i kategorią skończonych porządków liniowych. W szczególności pokazuje, wykorzystując twierdzenia z poprzednich rozdziałów, kiedy kategorie takie spełniają aksjomaty kategorii Fraïsségo (tzn. pokazuje istotną przeliczalność, skierowanie oraz własność amalgamacji), co pociąga istnienie ciągów Fraïsségo i obiektów uniwersalnych. Dowody tych własności świadczą o bardzo dobrej znajomości technik dowodowych związanych z granicami Fraïsségo.

Na stronie 78 autorka pisze, że wyniki z tego rozdziału mogą być wykorzystane w dalszych badaniach naukowych. To czy tak będzie okaże w przyszłości, ale dostrzeżenie analogii między dowodami różnych twierdzeń i próba opisania tego przy użyciu granic Fraïsségo pokazuje już teraz, że doktorantka wykazuje umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej.

W podrozdziale 8.6 autorka podaje pewne twierdzenia dotyczące miar borelowskich na zbiorze Canotra. Między innymi jest tam twierdzenie o istnieniu dokładnie jednej (z dokładności do homeomorfizmu zachowującego miarę) ściśle dodatniej i wymiernej miary borelowskiej na zbiorze Cantora, która spełnia pewien warunek „wymiernego dzielenia". Inne twierdzenie jest miarową wersję twierdzenia Knastera-Reichbacha. Mianowicie doktorantka twierdzi, że każdy homeomorfizm

Fily

pomiędzy zbiorami domkniętymi i miary zero (tutaj chodzi o miarę z poprzedniego twierdzenia) można rozszerzyć do homeomorfizmu całego zbioru Cantora zachowującego miarę. Doktorantka nie zamieściła dowodów tych twierdzeń, więc możemy się tylko domyślać, że w dowodach wykorzystuje twierdzenia (udowodnione we wcześniejszych rozdziałach) mówiące o istnieniu obiektów uniwersalnych i obiektach mających własność przedłużania. W tym podrozdziale brakuje, moim zdaniem, komentarza dotyczącego związku miar produktowych na przestrzeni Cantora (tzn. miar postaci $\mu = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n$, gdzie μ_n są miarami probabilistycznymi na zbiorze $\{0, 1\}$ dla każdego n) z omawianymi zagadnieniami (w szczególności czy miary te spełniają warunek „wymiernego dzielenia” oraz czy spełniają miarową wersję twierdzenia Knastera-Reichbacha).

Literatura

1. Taras Banakh, Ostap Chervak, Tetyana Martynyuk, Maksym Pylypovych, Alex Ravsky, and Markiyan Simkiv, *Kuratowski Monoids of n-Topological Spaces*, Topol. Algebra Appl. **6** (2018), no. 1, 1–25. MR 3783402
2. Wojciech Bielas, Szymon Plewik, and Marta Walczyńska, *On the center of distances*, European Journal of Mathematics (2017).
3. J. A. Guthrie and J. E. Nymann, *The topological structure of the set of subsums of an infinite series*, Colloq. Math. **55** (1988), no. 2, 323–327. MR 978930
4. B. Knaster and M. Reichbach, *Notion d'homogénéité et prolongements des homéomorphies*, Fund. Math. **40** (1953), 180–193. MR 0061817
5. M. Korch, *Knaster-Reichbach Theorem for 2^{κ}*, preprint dostępny 20 maja 2008 roku na stronie `http://duch.mimuw.edu.pl/~m_korch/wp-content/uploads/2018/02/knaster-kappa.pdf`.
6. Zbigniew Nitecki, *Cantorvals and subsum sets of null sequences*, Amer. Math. Monthly **122** (2015), no. 9, 862–870. MR 3418208
7. J. E. Nymann and R. A. Sáenz, *On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series*, Colloq. Math. **83** (2000), no. 1, 1–4. MR 1750775
8. Szymon Plewik and Marta Walczyńska, *The monoid consisting of Kuratowski operations*, J. Math. (2013), Art. ID 289854, 9. MR 3100673
9. ———, *On metric σ-discrete spaces*, Algebra, logic and number theory, Banach Center Publ., vol. 108, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2016, pp. 239–253. MR 3559267
10. Mazurkiewicz S. and Sierpiński W., *Contribution à la topologie des ensembles dénombrables*, Fundamenta Mathematicae **1** (1920), no. 1, 17–27.
11. E. Salachna, *Zbiór Cantora w ujęciu teorii granic wstecznych*, Prace Mat. **10** (1966), 51–58. MR 0190892
12. Stephen Willard, *General topology*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1970. MR 0264581

Gdańsk, 14 maja 2018

Rafał Filipów
Rafał Filipów