Gdańsk, 16 października 2019 r.

Tomasz Szarek
WFTiMS Politechniki Gdańskiej
oraz IM PAN oddział w Sopocie

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Joanny Kubieniec pt. „Ergodyczne własności losowych układów dynamicznych ze skokami o intensywności zależnej od położenia"

Pani Magister Kubieniec przedstawiła jako swoją dysertację doktorską 54–stronicową rozprawę poświęconą pewnym stochastycznym układom dynamicznym. Autorka badała procesy stochastyczne odpowiadające kawałkami deterministycznym układom z losowymi perturbacjami. Losowość w badanych modelach wpływa na system w trójnasób. Losowy jest interwał czasu, w którym proces porusza się po zadanej deterministycznej trajektorii. Trajektoria będąca realizacją pewnego potoku także wybierana jest w sposób losowy. Ewolucja procesu kończy się skokiem będącym *de facto* przekształceniem punktu trajektorii przez wylosowanie z pewnego zbioru ciągłych funkcji pewnej transformacji. Dodatkowa trudność występująca w rozważanym tu procesie wiąże się z faktem, że rozkłady prawdopodobieństw dla losowych zaburzeń zależne są od położenia. Czyni to całe rozważania bardzo złożonymi.

Autorka w swojej rozprawie formalizuje to, co powyżej powiedziałem, otrzymując pewien łańcuch Markowa, a następnie bada jego operator przejścia. Istotnie, przedmiotem pracy nie jest cały proces Markowa (z czasem ciągłym), ale łańcuch opisujący rozkłady w momencie kolejnego skoku. Główne wyniki to dowód stabilności tak określonego procesu, a następnie uzasadnienie, że zbieżność do stanu stacjonarnego dokonuje się wykładniczo szybko.

Zawartość pracy: Praca składa się ze wstępu i trzech rozdziałów. Rozdział I ma charakter wprowadzający i zawiera definicje podstawowych pojęć występujących w pracy. Przytoczone zostały tu także twierdzenia, z których Autorka będzie korzystać w swoich dowodach. Mam tu na myśli oprócz podstawowego kryterium istnienia miary niezmienniczej dla operatorów semikoncentrujących i nierozszerzających, także delikatne twierdzenie formułujące warunki wystarczające do istnienia *couplingu* dla startujących z różnych punktów trajektorii łańcuchów Markowa, którego autorami są R. Kapica i M. Ślęczka.

Rozdział II to główna część pracy. Rozpoczyna się od opisu badanego modelu. Autorka ustala tu także założenia dotyczące parametrów rozważanego procesu, a następnie wyprowadza postać funkcji przejścia dla łańcuchu Markowa opisującego zachowanie w chwilach skoku. Dalej Mgr Kubieniec pokazuje, że operator przejścia P jest globalnie koncentrujący; sprawdza to przez uzasadnienie nierówności

$$PV(x) \leq aV(x) + b \qquad \text{dla wszystkich } x,$$

gdzie $a < 1$, $b > 0$ dla pewnej funkcji Lapunowa V. Warunek ten gwarantuje, że rozważany proces nie będzie uciekał do ∞ - jest to tzw. *globalne koncentrowanie*. Dzięki klasycznemu zabiegowi ze zmianą metryki w przestrzeni fazowej udaje się Autorce dowieść warunku nierozszerzania, który gwarantuje także własność *fellerowskości* dla operatora przejścia. Ponieważ cała struktura jest z dodatnim prawdopodobieństwem kontrakcyjna (albo zwęża sam potok, albo zwężająca jest funkcja skoków) z faktu, że spełniony jest warunek globalnego koncetrowania udaje się uzasadnić warunek semikoncentrowania. Ogólne twierdzenia implikują istnienie miary niezmienniczej i stabilność.

W drugiej części Rozdziału II Mgr Kubieniec konstruuje *coupling* sprzęgający trajektorie startujące z różnych położeń początkowych. Dzięki istnieniu wspomnianej struktury kontrakcyjnej udaje się dobrać to sprzężenie tak, że w jego wyniku uzyskujemy geometryczne tempo zbieżności do stanu stacjonarnego (*geometryczną ergodyczność*).

Rozdział III przynosi zastosowanie uzyskanych wyników do stochastycznego równania z zaburzeniem poissonowskim. W szczególności, w oparciu o wyniki Rozdziału II, Autorka udowadnia stabilność dla układu dysypatywnego określonego na dowolnej ośrodkowej przestrzeni Hilberta, który został zaburzony procesem Poissona. Pokazuje także geometryczną ergodyczność.

Uwagi krytyczne i ocena pracy: Autorka zajmuje się ważnym problemem współczesnej teorii ergodycznej. Podobnymi zagadnieniami zajmowali się tej klasy uczeni, co Y. Sinai czy M. Hairer. Metoda *couplingu* tak rozumianego, jak w rozprawie, została użyta po raz pierwszy przez M. Hairera do badania ergodyczności pewnych równań stochastycznych w: *Exponential mixing properties of stochastic PDEs through asymptotic coupling*, Probab. Theory Related Fields 124 (2002), 345–380, a następnie zastosowana do iterowanych układów funkcyjnych przez M. Ślęczkę w: *The rate of convergence for iterated function systems*, Studia Math. 205 (2011), 201–214. Praca cytowana przez Mgr Kubieniec (Kapicy & Ślęczki) jest rozszerzeniem artykułu Ślęczki. Wynik Ślęczki powinien również zostać przytoczony w bibliografii.

Podobnie w ostatnim rozdziale. Równania stochastyczne zaburzane procesami Poissona to bardzo 'gorący' temat. Przydałoby się wspomnieć o bogatej literaturze poświęconej temu zagadnieniu i ukazać swoje wyniki w nieco szerszym kontekście. Razi mnie pewna jednostronność bibliografii; dominują pozycje autorów z kręgu Profesora Lasoty (jego samego i jego uczniów), a przecież tymi zagadnieniami zajmują się matematycy w wielu ośrodkach naukowych na całym świecie.

Praca, mimo że poświęcona jest pewnemu szczególnemu modelowi, podoba mi się i to pomimo pewnej ograniczoności zastosowanych metod. Niedosyt z tego wynikający jest rekompensowany godną podziwu sprawnością rachunkową Kandydatki do stopnia doktora. Rozprawa doktorska Mgr Kubieniec to dobre rzemiosło; nie ma tu może spektakularnych pomysłów i nowych idei, czego zresztą trudno oczekiwać na tym etapie kariery naukowej, ale zaproponowany model zbadany jest niemalże całkowicie. Autorka opisała zachowanie procesu w nieskończoności dowodząc prawa wielkich liczb. Myślę że zachodzić powinno także Centralne Twierdzenie Graniczne – szkoda, że Autorka tym problemem się nie zajęła; udowodnienie twierdzenia granicznego wzmocniłoby znacznie samą rozprawę doktorską. Mając geometryczną ergodyczność można byłoby także spróbować dowieść Prawo Iterowanego Logarytmu. Innym możliwym wzmocnieniem rozprawy mogłoby być rozważenie półgrupy z czasem ciągłym.

Praca zredagowana jest niezwykle starannie i jej studiowanie stanowiło dla mnie prawdziwą przyjemność. Mimo bardzo uważnej lektury znalazłem tylko dwie drobne usterki:

- na str 36, linijka 4 od góry, winno być $\int_0^\infty te^{-\lambda t} dt\delta(i_1, i_2)$, zamiast $\int_0^\infty te^{\lambda t} dt\delta(i_1, i_2)$;
- na str 12, linijka 4 od dołu, winno być *pożądaną* zamiast *porządaną*.

Konkluzja: Podsumowanie mojej recenzji jest oczywiste. Pani Magister Joanna Kubieniec przedstawiła jako dysertację doktorską bardzo solidną rozprawę, w której zbadała pewien model o dużym potencjale aplikacyjnym, dowodząc jego stabilności oraz eksponencjalnej ergodyczności. **Rozprawę oceniam pozytywnie, dlatego wnoszę o dopuszczenie Pani Joanny Kubieniec do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

Tomasz Szarek