mgr Joanna Kubieniec
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii
Uniwersytet Śląski w Katowicach

Katowice, 13 września 2019 r.

STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

ERGODYCZNE WŁASNOŚCI LOSOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH ZE SKOKAMI O INTENSYWNOŚCI ZALEŻNEJ OD STANU

W niniejszej rozprawie analizujemy asymptotykę operatora Markowa, działającego na miarach przestrzeni polskiej, determinującego ewolucję rozkładów jednorodnego łańcucha Markowa opisującego stany pojawiające się bezpośrednio po skokach pewnego kawałkami deterministycznego procesu Markowa. Pomiędzy dwoma kolejnymi skokami, ów proces, ewoluuje w sposób deterministyczny, wyznaczony przez pewien potok, wybrany losowo (ze skończonego zbioru) w momencie skoku. Same skoki, występujące w losowych odstępach czasu z częstotliwością zależną od stanu procesu, realizowane są poprzez zadany zbiór transformacji ciągłych, losowanych z prawdopodobieństwami zależnymi od obecnego stanu układu.

Procesy tego typu (badane np. w [1–3, 7, 8]) wykorzystuje się głównie w modelach biologicznych związanych z ekspresją genu (zob. [2, 13]). W odróżnieniu od prac [1–3, 7, 8], intensywność skoków w rozpatrywanym przez nas modelu zależna będzie od obecnego stanu układu. Wyniki zawarte we wspomnianych pracach obejmują bowiem przypadek, w którym przedziały czasu miedzy skokami mają jednakowy rozkład wykładniczy o stałej intensywności.

Naszym celem jest przedstawienie dwóch różnych metod prowadzących do wykazania ergodyczności rozważanego operatora Markowa w metryce Fortet – Mouriera. Bazując na koncepcjach nierozszerzalności i semikoncentracji, odgrywających kluczową rolę m.in w pracach T. Szarka [15, 16], pokazujemy, iż rozważany operator jest asymptotycznie stabilny. Część pracy poświęcona temu zagadnieniu stanowi adaptację wyników uzyskanych w artykule [11]. W drugiej części rozprawy, opartej na artykule [4], wykazujemy natomiast (nakładając nieco silniejsze założenia na rozważany zbiór potoków), iż wspomniana zbieżność rozkładów łańcucha do miary niezmienniczej następuje w tempie geometrycznym. Własność ta bywa również nazywana geometryczną ergodycznością operatora (łańcucha) w metryce Forter- Mouriera. W tym celu, posługujemy się techniką sprzęgania łańcuchów Markowa (ang. coupling), zainicjowaną przez M. Hairera w pracy [5] (i podjętą również w artykule [9]). Dodatkowo, bazując na prawie wielkich liczb A. Shirikyana [14], udawadniamy mocne prawo wielkich liczb dla rozważanego łańcucha.

Ostatni rozdział ilustruje zastosowanie wyniku uzyskanego w paragrafie 2.2 w analizie geometrycznej ergodyczności operatora Markowa związanego z pewną wersją stochastycznego równania różniczkowego Poissona, będącą uogólnieniem modeli rozważanych w pracach A. Lasoty i J. Traple [12], K. Horbacz [6] oraz J. Kazak [10].

Literatura

[1] Czapla D., Horbacz K., Wojewódka-Ściążko H. The Strassen Invariance Principle for Certain Non-Stationary Markov-Feller Chains. *arXiv: 1810.07300*, 2018.

[2] Czapla D., Horbacz K., Wojewódka-Ściążko H. Ergodic properties of some piecewise-deterministic Markov process with application to gene expression modelling. *doi: 10.1016/j.spa.2019.08.006*, praca przyjęta do druku w *Stochastic Processes and their Applications*, 2019.

[3] Czapla D., Horbacz K., Wojewódka H. A useful version of the central limit theorem for a general class of Markov Chains. *arXiv: 1804.09220*, 2018.

[4] Czapla D., Kubieniec J. Exponential ergodicity of some Markov dynamical system with application to a Poisson driven stochastic differential equation. *Dynamical Systems: An International Journal*, 34:130–156, 2019.

[5] Hairer M. Exponential mixing properties of stochastic PDEs through asymptotic coupling. *Probability Theory and Related Fields*, 124:345–380, 2002.

[6] Horbacz K. Invariant measures related with randomly connected Poisson driven differential equations. *Annales Polonici Mathematici*, 79:31–44, 2002.

[7] Horbacz K. Invariant measures for random dynamical systems. *Dissertationes Mathematicae*, 451:1–63, 2008.

[8] Horbacz K., Ślęczka M. Law Of Large Numbers For Random Dynamical Systems. *Journal of Statistical Physics*, 162:671–684, 2016.

[9] Kapica R., Ślęczka M. Random iteration with place dependent probabilities. *arXiv:1107.0707v3*, 2017, praca przyjęta do druku w *Probability and Mathematical Statistics.*

[10] Kazak J. Piecewise-deterministic Markov processes. *Annales Polonici Mathematici*, 109:279–296, 2013.

[11] Kubieniec J. Random dynamical systems with jumps and with a function type intensity. *Annales Mathematicae Silesianae*, 30:63–87, 2016.

[12] Lasota A., Traple J. Invariant measures related with Poisson driven stochastic differential equation. *Stochastic Processes and their Applications*, 106:81–93, 2003.

[13] Mackey M. C., Tyran-Kamińska M., Yvinec R. Dynamic behavior of stochastic gene expression models in the presence of bursting. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 73:1830–1852, 2013.

[14] Shirikyan A. A version of the law of large numbers and applications, in: Probabilistic Methods in Fluids. *Proceedings of the Swansea 2002 Workshop*, pages 263–271, 2003.

[15] Szarek T. Invariant measures for Markov operators with applications to function systems. *Studia Mathematica*, 154:207–222, 2003.

[16] Szarek T. Invariant measures for nonexpansive Markov operators on Polish spaces. *Dissertationes Mathematicae*, 415:1–62, 2003.